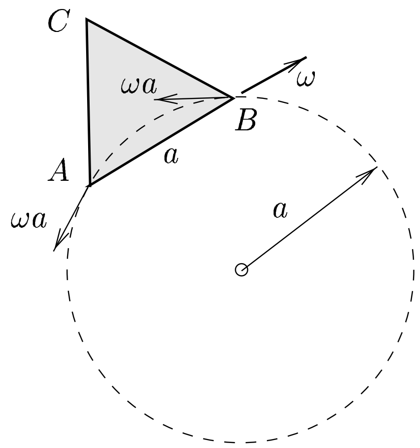
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (25 de Noviembre de 1997)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Una placa ABC con forma de triángulo equilátero de lado a se mueve de forma que A y B recorren una circunferencia fija de radio a con velocidad ωa. A su vez la placa gira alrededor de AB con velocidad angular ω.



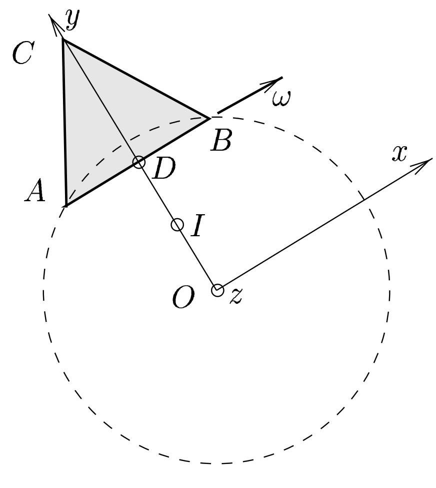
Se pide:

1. Obtener el eje del movimiento helicoidal tangente y la velocidad de rotación de la placa.
2. ¿El movimiento de la placa es una rotación?; responder razonadamente. Calcular en cualquier caso la velocidad mínima o velocidad de deslizamiento.
3. Calcular la aceleración angular de la placa.
4. Calcular la velocidad y aceleración del vértice C en una configuración en la que la placa se encuentre perpendicular al plano de la circunferencia.
5. Obtener los axoides (fijo y móvil) del movimiento.

---

1. Consideremos por conveniencia unos ejes móviles (O, x, y, z) con una velocidad de rotación ω alrededor de la vertical, respecto de los cuales la placa tiene únicamente un movimiento de rotación pura alrededor del la arista AB (ver figura adjunta). Se observa de esta forma que el movimiento absoluto es la composición de dos rotaciones:

- Una rotación alrededor de la arista AB de módulo ω y con el sentido de A a B.
- Una rotación alrededor del eje vertical z de módulo también ω que sale del papel.



Los ejes de estas dos rotaciones se cruzan (son no concurrentes), por lo que resulta un movimiento helicoidal general, en el que no hay ningún punto de velocidad nula. Ambas rotaciones tienen igual módulo, por lo que el eje helicoidal tiene la dirección de la bisectriz de ambas rotaciones, y pasará por el punto medio del segmento de mínima distancia.

En este caso, por tanto, el eje forma 45° con el plano de la figura y pasa por el punto I (punto medio del segmento OD) La ecuación paramétrica del eje en el sistema móvil resulta:

$$\boldsymbol{\rho} = \underbrace{\frac{a\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{j}}_{punto} + \underbrace{\lambda\boldsymbol{\Omega}}_{direccion} \qquad\qquad \boldsymbol{\Omega} = \omega\boldsymbol{i} + \omega\boldsymbol{k} \tag{1}$$

De forma alternativa, un punto por donde pasa el eje (I) se puede obtener de forma analítica, a partir de la posición y velocidad del punto D mediante la expresión:

$$\boldsymbol{DI} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_D}{\Omega^2} \tag{2}$$

La velocidad de D es conocida, de valor $\boldsymbol{v}_D = \omega\frac{a\sqrt{3}}{2}(-\boldsymbol{i})$. Introduciendo ésto (junto con la expresión de $\boldsymbol{\Omega}$ ya calculada) en (2), obtenemos el punto por el que pasa el eje respecto de D, que coincide exactamente con el que aparece en (1) respecto de O.

2. *No es una rotación*, sino un movimiento helicoidal general, ya que el movimiento absoluto es la composición de dos rotaciones de ejes no concurrentes, y no hay puntos de velocidad nula. La velocidad mínima es la proyección de la velocidad de un punto cualquiera según el eje helicoidal. Teniendo en cuenta que conocemos la velocidad de D:

$$v_{min} = \left| \boldsymbol{v}_D \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} \right| = \frac{\omega a}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \tag{3}$$

3. Teniendo en cuenta que desde el sistema móvil el vector $\boldsymbol{\Omega}$ es constante, su derivada absoluta es:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \omega\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{\Omega} = \omega^2\boldsymbol{j} \tag{4}$$

4. $\boldsymbol{v}_C$ se obtiene a partir de la velocidad de D mediante la expresión:

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{DC} \tag{5}$$

En la configuración pedida, $\boldsymbol{DC} = a(\sqrt{3}/2)\boldsymbol{k}$ (cuando C se encuentra hacia fuera del papel; con signo - cuando se encuentra hacia adentro), con lo que resulta:

$$\boldsymbol{v}_C = -a\omega\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}\right) \qquad\qquad v_C = 2v_{min} \tag{6}$$

Mediante la expresión del campo de aceleraciones, se obtiene $\boldsymbol{a}_C$ a partir de $\boldsymbol{a}_D$:

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_D + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{DC} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{DC}) \tag{7}$$

teniendo en cuenta que $\boldsymbol{a}_D = -\omega^2 a(\sqrt{3}/2)\boldsymbol{j}$, resulta:

$$\boldsymbol{a}_C = a\omega^2\sqrt{3}\left(\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\boldsymbol{j} - \frac{1}{2}\boldsymbol{k}\right) \tag{8}$$

5. Tanto el axoide fijo como el móvil son sendos hiperboloides de una hoja, superficies regladas generadas por una recta que se cruza (pero no corta) con una cierta recta directriz y que gira alrededor de ella. En el axoide fijo, la recta directriz es el eje $\boldsymbol{z}$ vertical, y en el móvil es el segmento AB. La generatriz es en ambos casos el eje del movimiento helicoidal, y ambas superficies tienen una garganta de radio $a\sqrt{3}/4$