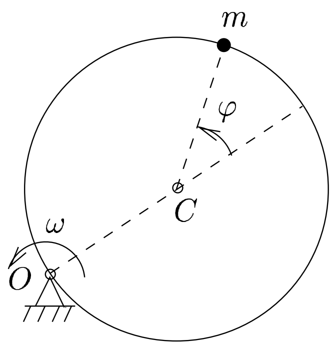
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (30 de Octubre de 1997)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Una partícula de masa m está ligada a una circunferencia lisa de radio R sobre la que desliza libremente. A su vez la circunferencia se mueve en un plano horizontal, girando con velocidad de rotación uniforme ω alrededor de un punto O de su perímetro.



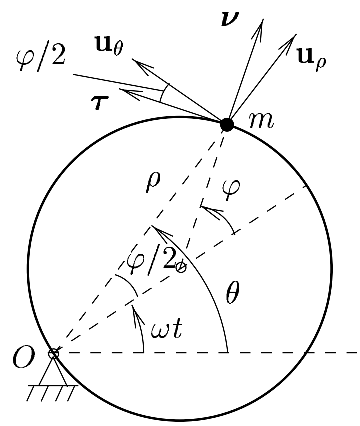
Se pide:

1. Empleando como parámetro el ángulo φ (ver figura adjunta), determinar la aceleración (absoluta) de la partícula en un instante genérico.
2. Obtener la ecuación diferencial del movimiento.
3. Obtener la expresión de la reacción de la circunferencia sobre la partícula.
4. ¿Se conserva la energía total (T+V)? (responder razonadamente).
5. Obtener una integral primera del sistema (constante del movimiento, igual a una expresión de las derivadas primeras, en este caso $\dot{\varphi}$). Tomar como condiciones iniciales $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = \omega$.

---

1. Utilizando las coordenadas polares (ρ, θ) de la figura adjunta, se obtiene:

$$\theta = \omega t + (\varphi/2) \qquad \rho = 2R\cos(\varphi/2) \qquad (1)$$



La aceleración absoluta tiene las componentes (a_ρ, a_θ):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= a_\rho \mathbf{u}_\rho + a_\theta \mathbf{u}_\theta & (2)\\ a_\rho &= \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 & (3)\\ a_\theta &= 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} & (4) \end{aligned}$$

con lo que:

$$\begin{aligned} a_\rho &= -R\ddot{\varphi}\,\mathrm{sen}(\varphi/2) - R\dot{\varphi}^2/2\cos(\varphi/2) - 2R\cos(\varphi/2)(\omega + \dot{\varphi}/2)^2 & (5)\\ a_\theta &= -2R\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}(\varphi/2)(\omega + \dot{\varphi}/2) + 2R\cos(\varphi/2)\ddot{\varphi}/2 & (6) \end{aligned}$$

2. Sean $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})$ los versores tangente y normal a la circunferencia respectivamente. La única fuerza sobre la partícula es la reacción de la circunferencia que lleva la dirección de $\boldsymbol{\nu}$. La componente de la aceleración según $\boldsymbol{\tau}$ será por tanto nula, lo que proporciona la ecuación del movimiento buscada.

$$a_\tau = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\tau} = -a_\rho \operatorname{sen}(\varphi/2) + a_\theta \cos(\varphi/2) = R\ddot{\varphi} + R\omega^2 \operatorname{sen}\varphi \tag{7}$$

La ecuación buscada es, por tanto:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \operatorname{sen}\varphi = 0 \tag{8}$$

Esta indica que se produce un movimiento pendular alrededor del punto diametralmente opuesto al punto O, con longitud de péndulo equivalente $l_{equiv} = g/\omega^2$

3. Sea la reacción $\boldsymbol{N} = N\boldsymbol{\nu}$. Obtenemos el valor de N proyectando la aceleración sobre $\boldsymbol{\nu}$ y expresando la ecuación dinámica según esta dirección:

$$a_\nu = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_\rho \cos(\varphi/2) + a_\theta \operatorname{sen}(\varphi/2) = -R\left[(\omega + \dot{\varphi})^2 + \omega^2 \cos\varphi)\right] \tag{9}$$

Por tanto:

$$N = ma_\nu \qquad\qquad \boldsymbol{N} = -mR\left[(\omega + \dot{\varphi})^2 + \omega^2 \cos\varphi)\right]\boldsymbol{\nu} \tag{10}$$

4. *No se conserva la energía*, ya que se trata de una curva móvil, en la que la fuerza de reacción desarrolla un trabajo. Es necesario aplicar un momento al sistema para conseguir la rotación uniforme ω, momento que no es una fuerza conservativa.

Aunque a primera vista pudiera parecer que la reacción de la circunferencia, al ser lisa la ligadura, no desarrolla trabajo alguno, ésto no es así, ya que la reacción es normal a la circunferencia pero no a la trayectoria (absoluta) de la partícula.

5. Multiplicando (8) por $\dot{\varphi}$:

$$\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + \omega^2 \dot{\varphi} \operatorname{sen}\varphi = 0 \tag{11}$$

ecuación que tiene la integral inmediata:

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos\varphi = C \tag{12}$$

Aplicando las condiciones iniciales, resulta $C = -\omega^2$. La integral primera es por tanto:

$$\dot{\varphi}^2 + \omega^2(1 - 2\cos\varphi) = 0 \tag{13}$$

Puede comprobarse que la expresión de la energía total del sistema es:

$$T + V = \frac{1}{2}mR^2\left[\dot{\varphi}^2 + 2(1 + \cos\varphi)(\omega^2 + \omega\dot{\varphi})\right] \tag{14}$$

por lo que, comparándola con (13), se deduce que la energía total no puede ser constante, ya que ambas expresiones no coinciden.