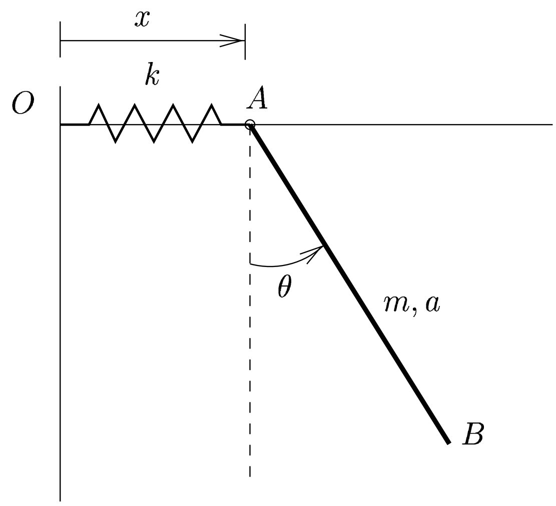
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (13 de Mayo de 1997)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Una varilla AB homogénea, pesada, de masa m y longitud a, puede moverse en un plano vertical fijo de forma que su extremo A desliza sin rozamiento sobre una recta horizontal fija de dicho plano, estando unido al punto fijo O mediante un muelle de longitud natural nula y constante de rigidez k.
El punto O repele a cada partícula material de la varilla con una fuerza proporcional al producto de la masa de la partícula por su distancia al mismo, siendo $k/2m$ la constante de proporcionalidad. Se considera que $k = \frac{8mg}{a}$ y que una posición generica está determinada por los parámetros (x, θ) de la figura.



Se pide:

1. Calcular la energía potencial del sistema.
2. Obtener todas las posiciones de equilibrio posibles.
3. Discutir la estabilidad de las posiciones de equilibrio.
4. Obtener la reacción en el punto A.

1.- Llamemos V_m al potencial del muelle, V_g al gravitatorio, y V_r al de la fuerza de repulsión del origen:

$$V = V_m + V_g + V_r$$

Los dos primeros valen

$$V_m = \frac{1}{2}kx^2; \quad V_g = -mg\frac{a}{2}\cos\theta \tag{1}$$

y el de la fuerza de repulsión

$$V_r = \int_0^a -\frac{1}{2}\frac{k}{2m}(x^2 + u^2 + 2xu\operatorname{sen}\theta)\,\frac{m}{a}du = -\frac{k}{4}\left(x^2 + \frac{a^2}{3} + xa\operatorname{sen}\theta\right) \tag{2}$$

Nótese que, a falta de una constante, el potencial de esta fuerza repartida equivale al de una fuerza puntual desde O a la masa m situada en el C.D.M.:

$$V_r' = -\frac{k}{4}\left(x^2 + \frac{a^2}{4} + xa\operatorname{sen}\theta\right)$$

(la diferencia entre esta expresión y (2) es tan sólo una constante, que no influye para el estudio del potencial).

Teniendo en cuenta el dato $k = 8mg/a$ y sumando las componentes del potencial,

$$V = \frac{2mg}{a}x^2 - \frac{mg}{2}a\cos\theta - 2mgx\operatorname{sen}\theta - \frac{2}{3}mga \tag{3}$$

2.- El equilibrio se da en los extremos de V,

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{4mg}{a}x - 2mg\operatorname{sen}\theta; \\ 0 &= \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{mg}{2}a\operatorname{sen}\theta - 2mgx\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (0,0) \\ (0, 180^\circ) \\ (a\sqrt{3}/4, 60^\circ) \\ (-a\sqrt{3}/4, -60^\circ) \end{cases} \tag{4}$$

3.- Para estudiar la estabilidad evaluamos el Hessiano,

$$\mathbf{H} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right) = 2mg\begin{pmatrix} \frac{2}{a} & -\cos\theta \\ -\cos\theta & x\operatorname{sen}\theta + \frac{a}{4}\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{5}$$

que tiene que ser definido positivo para la estabilidad. Puesto que el primer término de la diagonal principal es positivo, basta con evaluar el determinante $|\mathbf{H}|$ para cada solución de equilibrio:

$$\begin{aligned} (0,0) \quad &\Rightarrow \quad |\mathbf{H}| = -2m^2g^2 \quad \text{(inestable)} \\ (0,180^\circ) \quad &\Rightarrow \quad |\mathbf{H}| = -6m^2g^2 \quad \text{(inestable)} \\ (a\sqrt{3}/4, 60^\circ) \quad &\Rightarrow \quad |\mathbf{H}| = 3m^2g^2 \quad \text{(estable)} \\ (-a\sqrt{3}/4, -60^\circ) \quad &\Rightarrow \quad |\mathbf{H}| = 3m^2g^2 \quad \text{(estable)} \end{aligned} \tag{6}$$

4.- Particularizando los valores de las fuerzas sobre la varilla en cada caso de equilibrio, se obtiene la reacción pedida, que es vertical y de valor:

$$\begin{aligned} (0,0) \quad &\Rightarrow \quad Y_A = 3mg \\ (0,180^\circ) \quad &\Rightarrow \quad Y_A = -mg \\ (a\sqrt{3}/4, 60^\circ) \quad &\Rightarrow \quad Y_A = 2mg \\ (-a\sqrt{3}/4, -60^\circ) \quad &\Rightarrow \quad Y_A = 2mg \end{aligned} \tag{7}$$