Mecánica

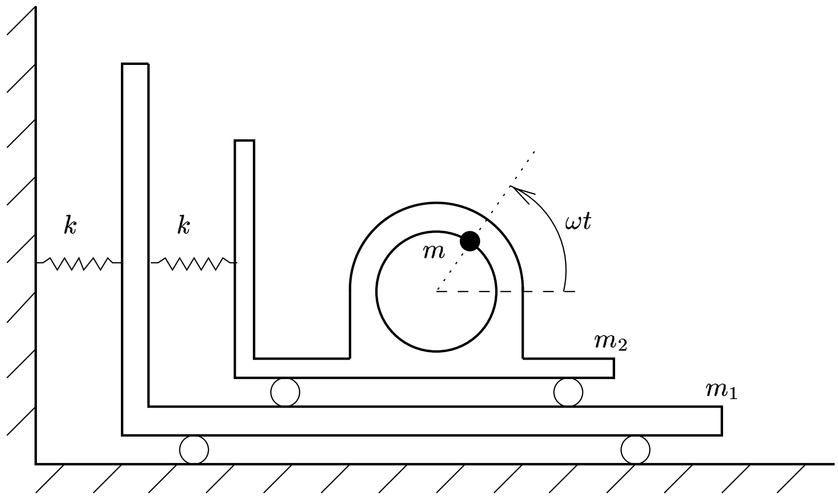
PROBLEMA PUNTUABLE (22 de Abril de 1997)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Un motor gira con una velocidad constante ω. Su eje lleva una excéntrica cuyo efecto dinámico equivale al de una masa puntual m situada a una distancia e del eje de giro. El motor está fijo a un carretón de masa m_2 (incluída la masa del motor pero no la de la excéntrica). Éste puede deslizar horizontalmente respecto de un segundo carretón de masa m_1, que a su vez desliza sobre una recta horizontal fija (ver figura). Entre los dos carretones, así como entre el carretón inferior y una pared vertical fija, hay sendos resortes iguales de elongación horizontal y constante elástica k. Se considera que el desplazamiento vertical de ambos carretones es nulo en todo momento, y que no existe rozamiento en ninguna de las superficies.
Se pide:

1. Ecuaciones de Lagrange del sistema.
2. Frecuencias propias.
3. Modos normales de vibración (vectores propios).
4. Expresión de las coordenadas normales.
5. Suponiendo que se alcanza el régimen permanente (por la existencia de un pequeño amortiguamiento inevitable), obtener la expresión del movimiento resultante.

Nota: Particularizar para los siguientes valores numéricos: $\omega = 900$ rpm, $m = 40$ kg., $m_2 = 5000$ kg., $m_1 = 8000$ kg., $k = 8000$ N/m.



Elegimos como coordenadas los desplazamientos absolutos de los carretones, (x_1, x_2). La masa excéntrica tiene un movimiento impuesto relativo al carretón 2 definido por las coordenadas $(e\cos\omega t, e\,\mathrm{sen}\,\omega t)$. La Lagrangiana resulta

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\left[(\dot{x}_2 - e\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t)^2 + (e\omega\cos\omega t)^2\right] - mge\,\mathrm{sen}\,\omega t - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 \tag{1}$$

Operando se obtienen las ecuaciones de Lagrange,

$$m_1\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \tag{2}$$
$$(m_2 + m)\ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = me\omega^2 \cos\omega t \tag{3}$$

En forma matricial,

$$\mathsf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathsf{K} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{F} \cos\omega t \tag{4}$$

$$\mathsf{K} = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}; \quad \mathsf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m2 + m \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ me\omega^2 \end{Bmatrix}$$

Para obtener las frecuencias propias empleamos la ecuación característica del problema de autovalores,

$$|\mathsf{K} - \lambda\mathsf{M}| = m_1(m_2 + m)\lambda^2 - k(m_1 + 2m_2 + 2m)\lambda + k^2 = 0 \tag{5}$$

Dando valores numéricos y resolviendo resulta

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0.51698, & \omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = 0.7190\,\mathrm{rad/s} \\ \lambda_2 = 3.07032, & \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1.7522\,\mathrm{rad/s} \end{cases} \tag{6}$$

Los modos normales son los vectores propios $\mathbf{v}_i$, que se obtienen de resolver para cada caso la ecuación

$$(\mathsf{K} - \lambda_i\mathsf{M})\mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{v}_1 = (1,\ 1.4830) \\ \mathbf{v}_2 = (1,\ -1.0703) \end{cases}$$

donde se ha empleando como criterio de normalización el tomar la primera componente de cada vector igual a la unidad. En función de la matriz modal

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1.4830 \\ 1 & -1.0703 \end{pmatrix}$$

las coordenadas normales se obtienen como

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathsf{A}^{-\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4192 & 0.3916 \\ 0.5808 & -0.3916 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

La respuesta en régimen permanente resulta de suponer una solución del tipo $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{D}\cos\omega t$ en la ecuación matricial (4), resultando

$$\mathbf{x}_p(t) = (\mathsf{K} - \omega^2\mathsf{M})^{-1} \cdot \mathbf{F} \cos\omega t = \begin{Bmatrix} 0.08938 \cdot 10^{-6} \\ -793.8 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} \cos\omega t \tag{8}$$