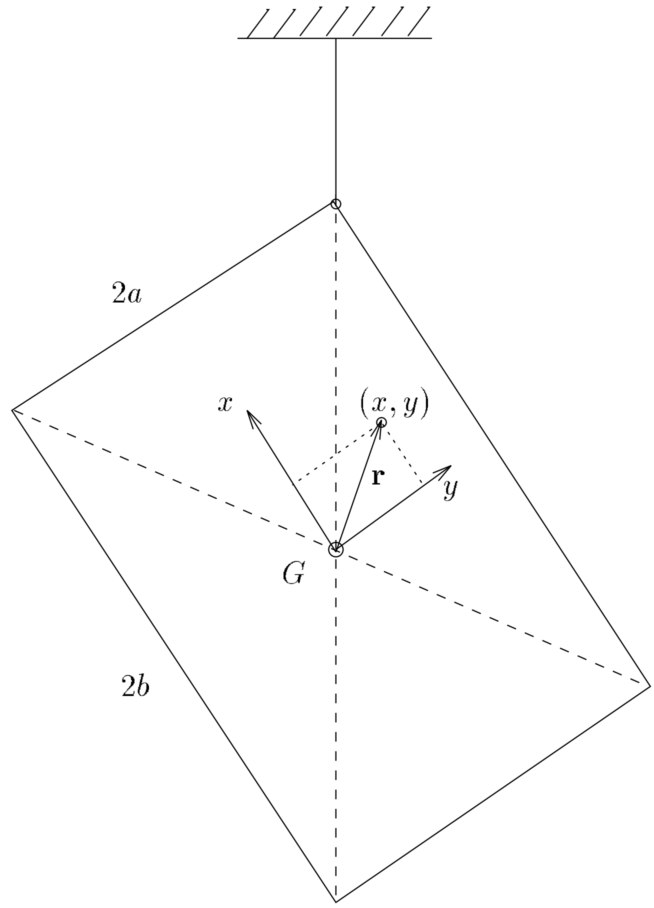
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (11 de Abril de 1997)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*



Una placa rectangular, de masa M y lados $2a$ y $2b$ está en reposo suspendida por una esquina mediante un hilo de masa despreciable. Recibe en un punto de su superficie el impacto de una masa puntual m, con velocidad v normal a la placa, siendo $m < M$. El coeficiente de restitución es igual a e. Se pide:

- Determinar el valor de la percusión P sobre la placa, así como el movimiento de la placa y de la partícula m después del choque, cuando el impacto se produce en una posición genérica (x, y) (ver figura).

  Sugerencias: considerar que el vector $\boldsymbol{\Omega}$, velocidad angular de la placa después del choque, debe estar contenido en el plano de la misma; para evitar expresiones demasiado largas emplear como variable auxiliar $u = \frac{1}{M} + \frac{x^2}{B} + \frac{y^2}{A}$, siendo A y B los momentos principales de inercia;

- Calcular la energía cinética de la placa (T_M) y de la partícula (T_m) después del choque. Obtener la fracción de energía del conjunto (placa más partícula) perdida en relación con la energía inicial.

  Sugerencias: Calcular la diferencia de energía cinética directamente y comprobar este resultado con la fórmula general $\Delta T = \frac{1}{2}\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{w}(1 - e)$.

- Hallar el lugar geométrico de los puntos de impacto en los que la energía cinética adquirida por la placa (T_M) es máxima. Demostrar que para un impacto en el centro de la placa T_M es un mínimo.

  Sugerencias: empleando la variable auxiliar u antes definida, derivar ($dT_M/du = 0$) para obtener el máximo. En el centro de la placa también se produce un extremo, pero éste no puede ser estudiado mediante el cambio de variable a u, que no es regular en este punto, debiendo estudiarse mediante el Jacobiano y Hessiano directamente.

1.- Al ser la impusión normal a la placa, después del choque el C.D.M. de ésta tendrá una velocidad v_G normal a la misma. La partícula m tendrá una velocidad v_1 también normal. Llamaremos $\boldsymbol{\Omega}$ a la velocidad de rotación adquirida por la placa.

Tomamos unos ejes móviles ligados a la placa, siendo (Gx, Gy) paralelos a los lados $(2b, 2a)$ respectivamente, y Gz normal a la misma con el sentido positivo según la percusión. Suponemos que el impacto se verifica en un punto genérico de la placa $Q \equiv (x, y, 0)$.

Por la conservación de la cantidad de movimiento,

$$mv = mv_1 + Mv_G. \tag{1}$$

Por la conservación del momento cinético,

$$\boldsymbol{GQ} \wedge mv\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{GQ} \wedge mv_1\,\boldsymbol{k} + \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega},$$

siendo

$$\boldsymbol{I}_G \equiv \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix} = \frac{M}{3}\begin{pmatrix} a^2 & & \\ & b^2 & \\ & & a^2+b^2 \end{pmatrix}.$$

Resultan las ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} mvy &= mv_1y + A\Omega_x & (2)\\ -mvx &= -mv_1x + B\Omega_y & (3)\\ 0 &= \Omega_z & (4) \end{aligned}$$

de las cuales la última (4) indica simplemente que $\boldsymbol{\Omega}$ está contenida en el plano de la placa, como era lógico esperar.

Para resolver el problema se necesita plantear una ecuación más, la del coeficiente de restitución. Expresamos para ello la velocidad del punto Q de la placa después del choque,

$$\boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{GQ} = (v_G + \Omega_x y - \Omega_y x)\boldsymbol{k},$$

por lo que resulta

$$e = -\frac{v_1 - (v_G + \Omega_x y - \Omega_y x)}{v}. \tag{5}$$

Las incógnitas v_G, v_1, Ω_x y Ω_y las obtenemos a partir de las ecuaciones (1), (2), (3) y (5). Resolviendo este sistema se obtiene el valor de la percusión P sobre la placa:

$$P = m(v - v_1) = Mv_G = \frac{v(1+e)}{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{M} + \dfrac{x^2}{B} + \dfrac{y^2}{A}}, \tag{6}$$

o bien, empleando la variable auxiliar $u = \frac{1}{M} + \frac{x^2}{B} + \frac{y^2}{A}$,

$$\boxed{P = \frac{mv(1+e)}{1+mu}} \tag{7}$$

En función de P el movimiento posterior al choque queda definido por:

$$v_G = \frac{P}{M}; \quad v_1 = v - \frac{P}{m}; \quad \Omega_x = \frac{Py}{A}; \quad \Omega_y = \frac{-Px}{B}.$$

De donde resultan las expresiones:

$$\boxed{v_G = \frac{m}{M}\frac{v(1+e)}{1+mu}}; \quad \boxed{v_1 = v\frac{-e+mu}{1+mu}} \tag{8}$$

$$\boxed{\Omega_x = \frac{mvy(1+e)}{A(1+mu)}}; \quad \boxed{\Omega_y = -\frac{mvx(1+e)}{B(1+mu)}} \tag{9}$$

2.- La energía cinética de m y M es respectivamente

$$T_m = \frac{1}{2}m{v_1}^2 = \frac{1}{2}mv^2\frac{(-e+mu)^2}{(1+mu)^2} \tag{10}$$

$$T_M = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\left(A\Omega_x^2 + B\Omega_y^2\right) = \frac{1}{2}mv^2(1+e)^2\frac{mu}{(1+mu)^2} \tag{11}$$

El incremento de energía es

$$\Delta T = T_M + T_m - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{mv^2}{(1+mu)^2}\left[(-e+mu)^2 + (1+e)^2mu - (1+mu)^2\right];$$

simplificando y dividiendo esta expresión por $T_0 = \frac{1}{2}mv^2$ resulta

$$\boxed{\frac{\Delta T}{T_0} = -\frac{1-e^2}{1+mu}}$$

donde el signo $-$ indica pérdida de energía. Podemos verificar que la aplicación de la fórmula general para variación de energía en las percusiones conduciría a este mismo resultado:

$$\Delta T = \frac{1}{2}\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{w}(1-e) = \frac{1}{2}(-Pv)(1-e) = -\frac{1}{2}mv^2\frac{1-e^2}{1+mu}$$

como queríamos demostrar.

3.- Para obtener los extremos de T_M derivamos en primer lugar la expresión (11) respecto de la variable auxiliar u. Llamando $C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2(1+e)^2 > 0$:

$$\frac{dT_M}{du} = C\frac{m(1-mu)}{(1+mu)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{m}$$

que corresponde al lugar geométrico definido por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{M}{m} - 1\right),$$

que al ser $M/m > 1$ es una elipse. Calculando la derivada segunda,

$$\frac{d^2T_M}{du^2} = Cm^2\frac{2mu-4}{(1+mu)^4},$$

que es negativa para $u = 1/m$, correspondiendo por tanto el lugar geométrico anterior a un máximo de T_M.

Para completar el estudio de los extremos de T_M debemos comprobar asimismo el centro de la placa ($x = y = 0$) donde el cambio de variable es singular:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_0 = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_0 = 0$$

Las derivadas valen

$$\frac{\partial T_M}{\partial x} = \frac{dT_M}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = C\frac{m(1-mu)}{(1+mu)^3}\frac{2x}{B}$$

$$\frac{\partial T_M}{\partial y} = \frac{dT_M}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = C\frac{m(1-mu)}{(1+mu)^3}\frac{2y}{A}$$

por tanto en $(x, y) = (0, 0)$ se produce otro extremo, al ser nulas ambas derivadas. Evaluamos el Hessiano para establecer la naturaleza de este extremo:

$$\frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2} = \frac{d^2 T_M}{du^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{dT_M}{du}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}^2 = Cm^2\frac{2mu-4}{(1+mu)^4}\left(\frac{2x}{B}\right)^2 + Cm\frac{1-mu}{(1+mu)^3}\frac{2}{B}$$

$$\frac{\partial^2 T_M}{\partial x \partial y} = \frac{d^2 T_M}{du^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dT_M}{du}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = Cm^2\frac{2mu-4}{(1+mu)^4}\frac{2x}{B}\frac{2y}{A}$$

$$\frac{\partial^2 T_M}{\partial y^2} = \frac{d^2 T_M}{du^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{dT_M}{du}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}^2 = Cm^2\frac{2mu-4}{(1+mu)^4}\left(\frac{2y}{A}\right)^2 + Cm\frac{1-mu}{(1+mu)^3}\frac{2}{A}$$

y particularizando en $(x, y) = (0, 0)$,

$$u|_{(0,0)} = \frac{1}{M}$$

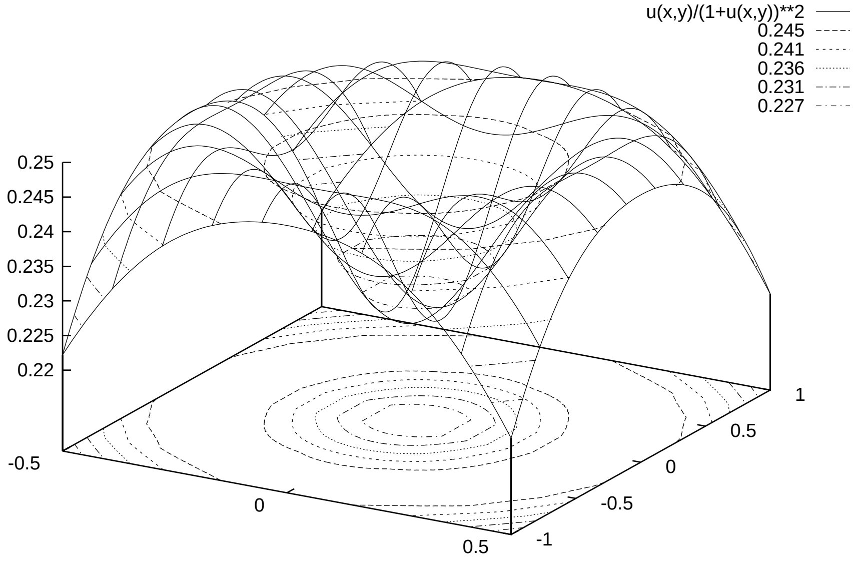
$$\left.\frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = Cm\frac{1-m/M}{(1+m/M)^3}\frac{2}{B} > 0;$$

$$\left.\frac{\partial^2 T_M}{\partial y^2}\right|_{(0,0)} = Cm\frac{1-m/M}{(1+m/M)^3}\frac{2}{A} > 0;$$

$$\left.\frac{\partial^2 T_M}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)} = 0.$$

Al ser definido positivo el Hessiano, T_M es mínimo en $(0, 0)$.

El resultado se puede visualizar claramente dibujando el gráfico de T_M como superficie en tres dimensiones:



u(x,y)/(1+u(x,y))**2
0.245
0.241
0.236
0.231
0.227
0.25
0.245
0.24
0.235
0.23
0.225
0.22
-0.5
0
0.5
-1
-0.5
0
0.5
1