Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

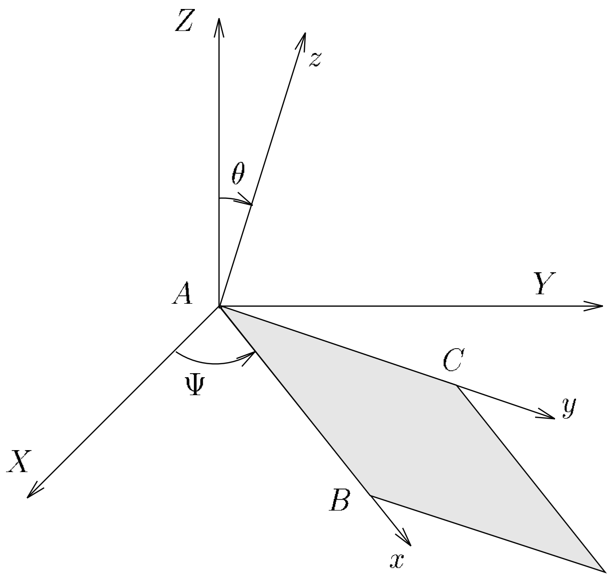
PROBLEMA PUNTUABLE (7 de Marzo de 1997)

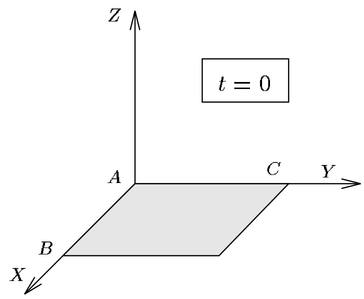
Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Una placa cuadrada homogénea de lado a cae bajo la acción de la gravedad de forma que el vértice A permanece fijo y la arista AB siempre permanece contenida en el plano XY. En el instante inicial, la placa está contenida el el plano XY y la arista AB coincide con el eje X.

Se consideran dos sistemas de referencia: uno fijo (XYZ) y uno móvil ligado a la placa (xyz) de forma que en todo momento el eje x coincide con la arista AB, el eje y con la arista AC y el eje z es perpendicular al plano de la placa por A.

Una posición genérica está totalmente determinada con los parámetros Ψ y θ de la Figura.





Se pide:

1. Calcular $\boldsymbol{I}_A$ expresado en el triedro del cuerpo (xyz).
2. Expresar la velocidad angular absoluta Ω en una posición genérica en el triedro (xyz).
3. Expresar $\boldsymbol{H}_A$ en el triedro (xyz) en una posición genérica.
4. Expresar las integrales primeras $T + V =$ cte. y $\boldsymbol{H}_A \cdot \boldsymbol{K} =$ cte. ($\boldsymbol{K}$ es el vector unitario fijo según el eje Z).
5. Expresar el momento de las fuerzas externas $\boldsymbol{M}_A$ y plantear las ecuaciones de Euler de la dinámica, todo ello en el triedro (xyz).

1.- Aplicaremos la expresión del campo tensorial de inercia, conocido el tensor central de inercia $\boldsymbol{I}_G = ma^2 \begin{pmatrix} 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{AG} = (a/2,\, a/2,\, 0)$. Resulta

$$\boldsymbol{I}_A = \boldsymbol{I}_G + m(|\boldsymbol{AG}|^2\mathbf{1} - \boldsymbol{AG}\otimes\boldsymbol{AG}) = ma^2 \begin{pmatrix} 1/3 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

2.- La velocidad angular es $\boldsymbol{\Omega} = -\dot\theta\,\boldsymbol{i} + \dot\psi\,\boldsymbol{K}$. Para expresarla en el triedro que nos piden consideramos que $\boldsymbol{K} = \cos\theta\,\boldsymbol{k} - \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j}$, resultando

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot\theta\,\boldsymbol{i} - \dot\psi\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} + \dot\psi\cos\theta\,\boldsymbol{k} \tag{2}$$

3.- El momento cinético se obtiene directamente,

$$\boldsymbol{H}_A = \boldsymbol{I}_A\cdot\boldsymbol{\Omega} = ma^2\left[\left(-\frac{\dot\theta}{3} + \frac{\dot\psi}{4}\operatorname{sen}\theta\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\dot\theta}{4} - \frac{\dot\psi}{3}\operatorname{sen}\theta\right)\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\dot\psi\cos\theta\,\boldsymbol{k}\right] \tag{3}$$

4.- La energía total se conserva al ser las fuerzas gravitatorias conservativas y los enlaces lisos. La expresión de la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{H}_A = \frac{ma^2}{2}\left[-\dot\theta\left(-\frac{\dot\theta}{3} + \frac{\dot\psi}{4}\operatorname{sen}\theta\right) - \dot\psi\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\dot\theta}{4} - \frac{\dot\psi}{3}\operatorname{sen}\theta\right) + \frac{2}{3}\dot\psi^2\cos^2\theta\right],$$

mientras que la energía potencial, tomando el cero en la posición inicial, es $V = -mg\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta$. Puesto que se parte del reposo, la integral primera es

$$T + V = \frac{ma^2}{2}\left[\frac{\dot\theta^2}{3} + \frac{\dot\psi^2}{3}(1+\cos^2\theta) - \frac{\dot\theta\dot\psi}{2}\operatorname{sen}\theta\right] - mg\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{4}$$

Admitiremos que la reacción del plano horizontal que mantiene al lado AB en él se materializa como un apoyo puntual liso en B. El momento cinético según el eje vertical Z se conserva porque las las fuerzas que dan momento en A, tanto el peso ($-mg\boldsymbol{K}$) como la reacción del plano en B ($R_B\boldsymbol{K}$), son paralelas a esta dirección. Teniendo en cuenta el estado inicial de reposo, la integral primera vale

$$\boldsymbol{H}_A\cdot\boldsymbol{K} = ma^2\left[-\frac{\dot\theta}{4}\operatorname{sen}\theta + \frac{\dot\psi}{3}(1+\cos^2\theta)\right] = 0 \tag{5}$$

5.- El momento de las fuerzas en A vale

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_A &= \boldsymbol{AG}\wedge(-mg\boldsymbol{K}) + \boldsymbol{AB}\wedge R_B\boldsymbol{K} \\ &= -mg\frac{a}{2}\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \left(mg\frac{a}{2} - aR_B\right)\cos\theta\,\boldsymbol{j} + \left(mg\frac{a}{2} - aR_B\right)\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{6}$$

La ecuación (vectorial) de Euler es

$$\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{I}_A \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{H}_A$$

Empleando las expresiones (1), (2), (3) y (6) y operando, resultan finalmente las tres ecuaciones escalares

$$-mg\frac{a}{2}\cos\theta = ma^2\left(-\frac{\ddot{\theta}}{3} + \frac{\ddot{\psi}}{4}\operatorname{sen}\theta - \frac{\dot{\psi}^2}{3}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right) \tag{7}$$

$$\left(mg\frac{a}{2} - aR_B\right)\cos\theta = ma^2\left(\frac{\ddot{\theta}}{4} - \frac{\ddot{\psi}}{3}\operatorname{sen}\theta + \frac{\dot{\psi}^2}{4}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right) \tag{8}$$

$$\left(mg\frac{a}{2} - aR_B\right)\operatorname{sen}\theta = ma^2\left(\frac{2}{3}\ddot{\psi}\cos\theta - \frac{2}{3}\dot{\psi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta - \frac{\dot{\theta}^2}{4} + \frac{\dot{\psi}^2}{4}\operatorname{sen}^2\theta\right) \tag{9}$$