Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

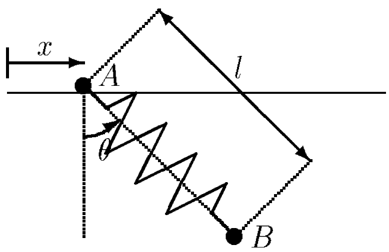
PROBLEMA PUNTUABLE (17 de Enero de 1997)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

En un plano vertical fijo se mueven dos partículas iguales, de masa m, que se encuentran unidas entre sí por un resorte elástico de constante k y longitud natural b. Una de las partículas debe permanecer sobre una recta horizontal fija y lisa. Se abandona el sistema en reposo, estando las partículas a una distancia b y a la misma altura.

Se pide:

1. Número de grados de libertad del sistema.
2. Definir, precisa pero brevemente, unos parámetros independientes que resulten adecuados para ser utilizados como coordenadas generalizadas para describir el movimiento del sistema.
3. Expresión de las fuerzas generalizadas correspondientes a estos parámetros.
4. Expresión de la energía cinética del sistema.
5. Expresión de su energía potencial.
6. Ecuaciones de Lagrange, diferenciales de segundo orden.
7. Caso de existir integrales primeras, escribirlas e interpretarlas.
8. ¿Se modifican estas ecuaciones (las de los dos apartados anteriores), si la distancia inicial entre las partículas es inferior a b?



1.- El sistema posee tres grados de libertad.

2.- Tomaremos las coordenadas libres que se indican en la figura: abscisa x del punto A sobre la recta horizontal; distancia l entre A y B; y ángulo θ que forma AB con la vertical, medido en sentido antihorario.

3.- Aunque en este caso la manera más simple de calcular las fuerzas generalizadas es a partir del potencial de las fuerzas, las obtendremos aquí aplicando el procedimiento general a partir de la expresión del trabajo virtual. Obtenemos en primer lugar los desplazamientos virtuales de A y B, en función de variaciones virtuales de las coordenadas libres, $(\delta x, \delta\theta, \delta l)$:

$$\delta \boldsymbol{r}_A = \delta x\, \boldsymbol{i};$$
$$\delta \boldsymbol{r}_B = \delta x\, \boldsymbol{i} + l\delta\theta\, \boldsymbol{u}_\theta + \delta l\, \boldsymbol{u}_l;$$

donde $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ son los versores horizontal y vertical respectivamente, y $(\boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{u}_l)$ son los versores según las líneas coordenadas θ y l respectivamente. Las fuerzas activas son las del muelle y el peso:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_A &= k(l-b)\,\boldsymbol{u}_l - mg\,\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{f}_B &= -k(l-b)\,\boldsymbol{u}_l - mg\,\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

Expresamos ahora el trabajo virtual,

$$\delta W = \boldsymbol{f}_A \cdot \delta \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{f}_B \cdot \delta \boldsymbol{r}_B = -k(l-b)\delta l - mgl\,\mathrm{sen}(\theta)\delta\theta + mg\cos(\theta)\delta l,$$

de donde, identificando coeficientes,

$$\begin{cases} Q_x = 0 \\ Q_\theta = -mgl\,\mathrm{sen}(\theta) \\ Q_l = mg\cos\theta - k(l-b) \end{cases}$$

4.- La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta + \dot{l}\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 + (l\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta - \dot{l}\cos\theta)^2\right]$$

5.- La energía potencial es

$$V = -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}k(l-b)^2$$

6.- Restando las dos expresiones anteriores, la Lagrangiana resulta

$$L = \frac{1}{2}m\left[2\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + \dot{l}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{x}\dot{l}\,\mathrm{sen}\,\theta\right] + mgl\cos\theta - \frac{1}{2}k(l-b)^2$$

Derivando se obtienen las ecuaciones de Lagrange:

$$\begin{aligned} 2m\ddot{x} + 2m\dot{l}\dot{\theta}\cos\theta + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,\theta + m\ddot{l}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \\ ml^2\ddot{\theta} + 2ml\dot{l}\dot{\theta} + m\ddot{x}l\cos\theta + mgl\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \\ m\ddot{l} + m\ddot{x}\,\mathrm{sen}\,\theta - ml\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + k(l-b) = 0 \end{aligned}$$

7.- La coordenada x es cíclica, al ser $\partial L/\partial x = 0$:

$$p_x = 2m\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta + m\dot{l}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

Esta ecuación corresponde a la constancia de la cantidad de movimiento del conjunto en dirección horizontal, ya que no hay ninguna fuerza exterior en esta dirección. Por otra parte, al ser todas las fuerzas conservativas, se conserva la energía total $E = T + V$:

$$E = \frac{1}{2}m\left[2\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + \dot{l}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{x}\dot{l}\,\mathrm{sen}\,\theta\right] - mgl\cos\theta + \frac{1}{2}k(l-b)^2 = 0$$

8.- Las ecuaciones de la dinámica de segundo orden no dependen nunca de las condiciones iniciales. Sin embargo, las integrales primeras sí que dependen de ellas, a través de las constantes al lado derecho del signo = en las dos ecuaciones anteriores. En concreto, si la longitud inicial del muelle fuese $l_0 \neq b$ la ecuación de conservación de la energía quedaría modificada para expresarse como

$$E = \frac{1}{2} m \left[2\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + \dot{l}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{x}\dot{l}\,\mathrm{sen}\,\theta \right] - mgl\cos\theta + \frac{1}{2}k(l-b)^2 = \frac{1}{2}k(l_0-b)^2$$