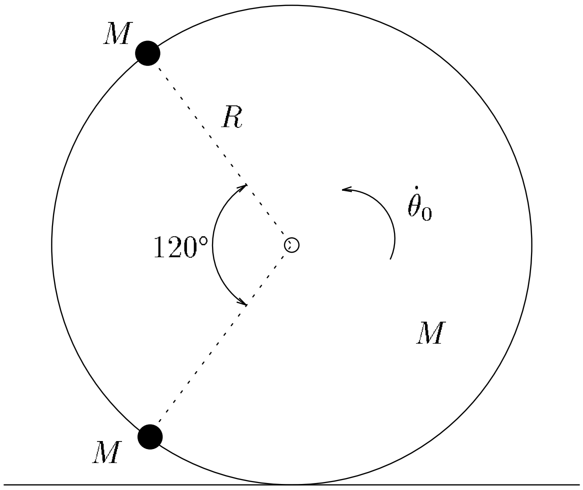
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (19 de Diciembre de 1996)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Un disco homogéneo de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre una recta horizontal, manteniendose en un plano vertical. En el perímetro del disco y a 120° estan situadas dos masas puntuales M, de forma que no estorban la rodadura. En un instante dado el conjunto está situado con las dos masas puntuales en una misma vertical (ver figura), y con velocidad angular $\dot{\theta}_0$.

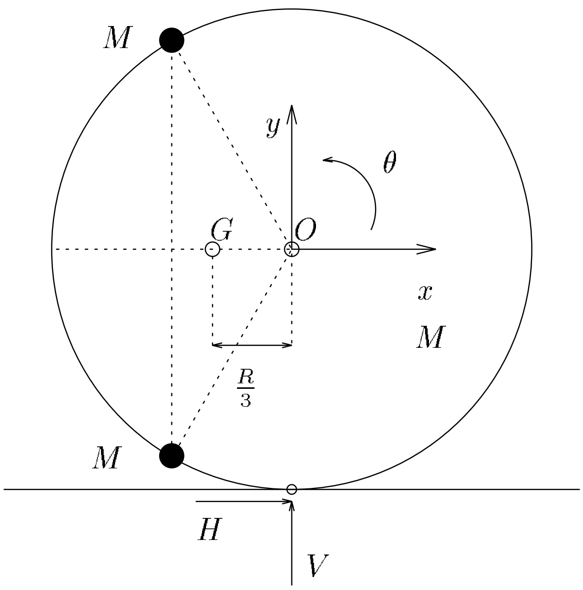


Para este instante se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento que resultan de aplicar los teoremas de cantidad de movimiento y momento cinético al sistema conjunto en función de $\ddot{\theta}$ y de la reacción del enlace debido a la recta.
2. Eliminar la reacción del enlace para obtener una única ecuación diferencial en $\ddot{\theta}$.
3. Obtener las componentes de la reacción.
4. Valor mínimo del coeficiente de rozamiento entre disco y recta para que no se produzca deslizamiento.

1.- El Centro de Masas del sistema rígido conjunto está situado en la horizontal por el centro del disco, $R/3$ a la izquierda del mismo. El momento de inercia en este punto vale

$$I_G = \frac{1}{2}MR^2 + M\left(\frac{R}{3}\right)^2 + 2M\left(\frac{3}{4}R^2 + \frac{1}{36}R^2\right) = \frac{13}{6}MR^2.$$



Con los ejes de la figura, la aceleración de G tiene las componentes

$$(a_G)_x = -R\ddot{\theta} + \frac{R}{3}\dot{\theta}^2; \quad (a_G)_y = -\frac{R}{3}\ddot{\theta}$$

Denominando H y V a las componentes de la reacción, las ecuaciones pedidas son

$$H = 3M\left(-R\ddot{\theta} + \frac{R}{3}\dot{\theta}^2\right) \tag{1}$$

$$V - 3Mg = 3M\left(-\frac{R}{3}\ddot{\theta}\right) \tag{2}$$

$$HR + V\frac{R}{3} = \frac{13}{6}MR^2\ddot{\theta} \tag{3}$$

2.- Eliminando H y V de (3) mediante las ecuaciones (1) y (2), resulta

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{11}\left(\dot{\theta}^2 + \frac{g}{R}\right) \tag{4}$$

3.- Mediante (4) podemos eliminar $\ddot{\theta}$ de las expresiones de H y V en (1) y (2) respectivamente, para obtener

$$H = \frac{M}{11}(-6g + 5R\dot{\theta}^2) \tag{5}$$

$$V = \frac{M}{11}(31g - 2R\dot{\theta}^2) \tag{6}$$

4.- El rozamiento definido por un coeficiente μ establece que

$$|H| \leq \mu|V|.$$

En el límite, el mínimo valor necesario de μ es aquél para el que se produce la igualdad en la expresión anterior:

$$\mu_{\min} = \frac{|H|}{|V|} = \frac{|-6g + 5R\dot{\theta}^2|}{|31g - 2R\dot{\theta}^2|}$$