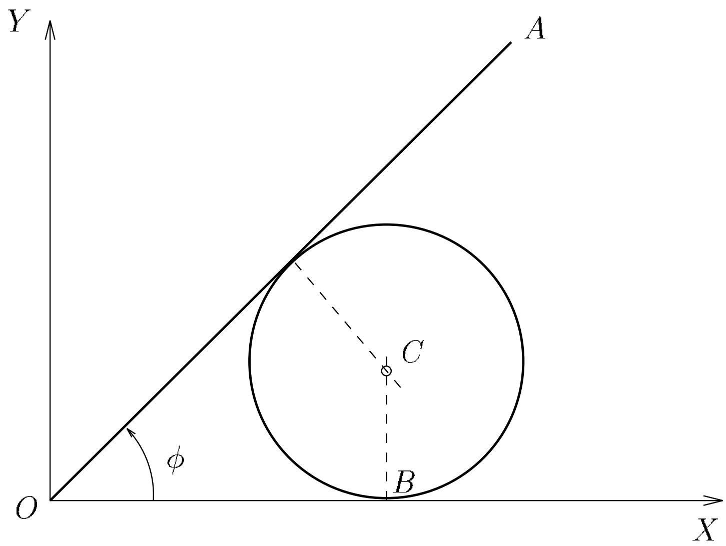
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (27 de Noviembre de 1996)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

En el mecanismo plano de la figura, la barra OA gira alrededor del punto fijo O con velocidad angular $\dot{\phi} =$ cte. Un disco de radio R se mueve de forma que desliza sobre el eje X a la vez que rueda sin deslizar sobre la barra OA.



Se pide:

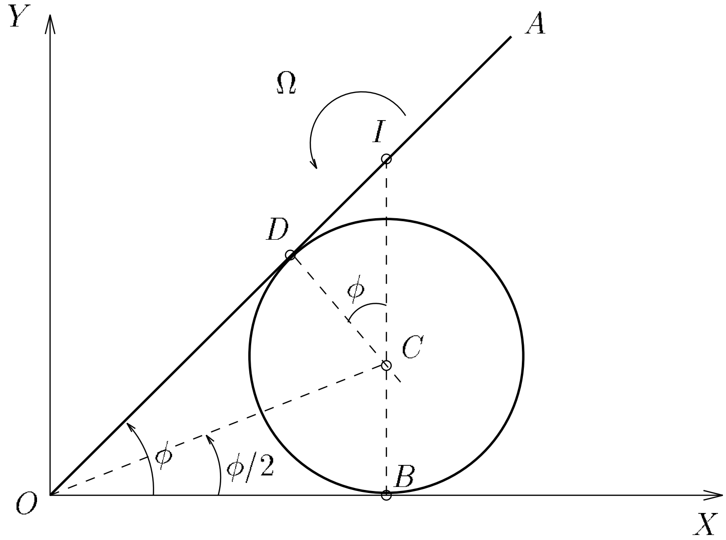
1. Velocidad y aceleración angular del disco.
2. Velocidad y aceleración del centro C del disco.
3. Ecuación de la polar fija referida a OXY.
4. Velocidad y aceleración del punto B cuando la barra forma 60° con la horizontal.

<u>*Nota*</u>*:* Se recuerdan las relaciones trigonométricas siguientes:

$$\tan\phi = \frac{2\tan\frac{\phi}{2}}{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}; \quad 2\,\mathrm{sen}^2\frac{\phi}{2} = 1-\cos\phi; \quad \cos\phi = \cos^2\frac{\phi}{2} - \mathrm{sen}^2\frac{\phi}{2}$$

---

1) La velocidad del punto D del disco en contacto con la barra móvil, al rodar sin deslizar, debe ser igual que la del punto correspondiente de la barra, llevando la dirección DC normal a la misma. El centro instantáneo de rotación está situado en la intersección I de las normales a la velocidad de B (vertical por B) y a la velocidad de D (la propia recta OA). Sus coordenadas son:



$$X_I = \overline{OB} = \frac{R}{\tan(\phi/2)} = R\frac{1+\cos\phi}{\mathrm{sen}\,\phi} \tag{1}$$

$$Y_I = \overline{OB} \cdot \tan\phi = \frac{R\tan\phi}{\tan(\phi/2)} = R\frac{1+\cos\phi}{\cos\phi} \tag{2}$$

El punto C sigue una trayectoria horizontal cuya velocidad es

$$\boldsymbol{v}_C = \frac{d}{dt}(\overline{OB})\,\boldsymbol{i} = \frac{dX_I}{dt}\boldsymbol{i} = -R\dot{\phi}\frac{1+\cos\phi}{\operatorname{sen}^2\phi}\boldsymbol{i} = -R\dot{\phi}\frac{1}{1-\cos\phi}\boldsymbol{i}. \tag{3}$$

por otra parte, interpretando el movimiento como una rotación alrededor de I,

$$\boldsymbol{v}_C = \Omega\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{IC} = \Omega \cdot \overline{IC}\,\boldsymbol{i} = \Omega\frac{R}{\cos\phi}\boldsymbol{i}; \tag{4}$$

de las expresiones (3) y (4) se deduce

$$\Omega = -\dot{\phi}\frac{\cos\phi}{1-\cos\phi} = -\dot{\phi}\frac{1}{\tan\phi\tan(\phi/2)} \tag{5}$$

y derivando esta expresión

$$\dot{\Omega} = \dot{\phi}^2\frac{\operatorname{sen}\phi}{(1-\cos\phi)^2}. \tag{6}$$

2) La velocidad de C ya quedó expresada en (3). Derivando ésta se obtiene la aceleración,

$$\boldsymbol{a}_C = R\dot{\phi}^2\frac{\operatorname{sen}\phi}{(1-\cos\phi)^2}\boldsymbol{i} \tag{7}$$

3) La polar fija viene definida en cartesianas por (1) y (2) en función del parámetro ϕ. En polares se definiría como

$$\rho = R\frac{1+\cos\phi}{\operatorname{sen}\phi\cos\phi} \tag{8}$$

4) Al ser una rotación alrededor de I, la velocidad de B es

$$\boldsymbol{v}_B = \Omega\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{IB} = -R\dot{\phi}\frac{1+\cos\phi}{1-\cos\phi}\boldsymbol{i} \tag{9}$$

La expresión general del campo de aceleración permite calcular $\boldsymbol{a}_B$:

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_C + \dot{\Omega}\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{CB} - \Omega^2\boldsymbol{CB}$$

y empleando (7), (6) resulta

$$\boldsymbol{a}_B = 2R\dot{\phi}^2\frac{\operatorname{sen}\phi}{(1-\cos\phi)^2}\boldsymbol{i} + R\dot{\phi}^2\frac{\cos^2\phi}{(1-\cos\phi)^2}\boldsymbol{j} \tag{10}$$

NOTA: Obsérvese que, de haber derivado la expresión (9), habría resultado

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_B = 2R\dot{\phi}^2\frac{\operatorname{sen}\phi}{(1-\cos\phi)^2}\boldsymbol{i},$$

que no coincide con (10), al no ser este resultado igual a la aceleración. El motivo es que se está derivando una expresión basada en posición particular de I, lo que no es correcto.

Por último, particularizando (10) para $\phi = 60°$,

$$\boldsymbol{v}_B = -3R\dot{\phi}\,\boldsymbol{i}; \quad \boldsymbol{a}_B = R\dot{\phi}^2(4\sqrt{3}\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}).$$