Mecánica

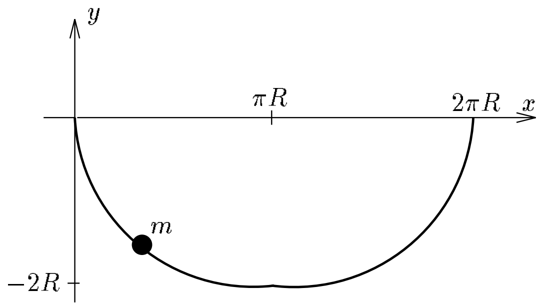
PROBLEMA PUNTUABLE (8 de Noviembre de 1996)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Bajo la acción de la gravedad, una partícula m se mueve sin rozamiento en la cicloide (ver figura adjunta) definida en forma paramétrica por las expresiones:

$$x = R(\theta - \operatorname{sen}\theta); \quad y = -R(1-\cos\theta),$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



Del movimiento así definido se pide:

1. Obtener la relación $s(\theta)$, siendo s la longitud de arco medido desde el punto más bajo de la cicloide ($\theta = \pi$).
2. Hallar las expresiones de T (Energía cinética). y V (Energía potencial) en función de s y $\dot{s} = ds/dt$.
3. Obtener la ecuación dinámica del movimiento (ecuación diferencial de orden 2 en $s(t)$).
4. Si la partícula se libera, partiendo del reposo, desde la posición $s = -4R$ ($\theta = 0$), obtener el tiempo que tarda en llegar al punto más bajo de la cicloide ($s = 0$).
5. Calcular el tiempo que tardaría la partícula en llegar al punto más bajo si se libera esta vez desde la posición $s = -2R$ ($\theta = 120°$), partiendo también del reposo.
6. Caracterizar el movimiento resultante, estableciendo la similitud con un péndulo simple en pequeñas oscilaciones, hallando la longitud equivalente del péndulo. ¿Qué diferencia existiría con un péndulo simple general, es decir, no limitado a pequeñas oscilaciones?.

1.- El elemento de arco se obtiene a partir de las ecuaciones paramétricas del enunciado:

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = R\sqrt{2(1-\cos\theta)} = 2R\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

Integrando entre π y una posición genérica θ resulta:

$$s(\theta) = -4R\cos\frac{\theta}{2}, \tag{1}$$

verificándose que $s(0) = -4R$, $s(\pi) = 0$ y $s(2\pi) = +4R$.

2.- La energía cinética se expresa directamente como

$$T = \frac{1}{2}m\dot{s}^2.$$

Empleamos (1) para expresar el potencial en función de s:

$$V = mgy = -mgR(1-\cos\theta) = -2mgR\left[1 - \left(\frac{s}{4R}\right)^2\right]$$

3.- La ecuación dinámica de 2º orden se puede obtener a partir de la conservación de la energía:

$$E = T + V = \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = 0$$

resultando

$$\boxed{\ddot{s} + \frac{g}{4R}s = 0} \tag{2}$$

4.- y 5.- La ecuación obtenida corresponde a un movimiento armónico simple, con frecuencia angular $\omega = \sqrt{g/(4R)}$ y periodo $\tau = 2\pi/\omega$. En los dos casos el tiempo empleado es el mismo y corresponde a un cuarto del periodo,

$$T = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

6.- La ecuación del péndulo simple es

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\varphi = 0, \tag{3}$$

siendo φ el ángulo formado por el hilo con la vertical. Si las oscilaciones son pequeñas ($\operatorname{sen}\varphi \approx \varphi$), resulta

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0,$$

por lo que el movimiento definido por (2) equivale a un péndulo con pequeñas oscilaciones y longitud equivalente $l_{eq} = 4R$.

En el péndulo simple general (3), el período depende de la amplitud, cosa que no ocurre en el caso de la cicloide (movimiento tautócrono).