MECÁNICA

Práctica nº 7 curso 95-96

Soluciones

Ejercicio nº 31

Este problema puede considerarse una variante del *sistema binario*, en el que, en vez de estar aislado del resto del universo, está sometido al campo gravitatorio simplificado. Como las únicas fuerzas exteriores actuantes son los pesos, el c.d.m. G tendrá una aceleración:

$$\mathbf{a}_G = \frac{m\mathbf{g} + m'\mathbf{g}}{m + m'} = \mathbf{g}$$

por lo que describirá una parábola (la llamada *balística*).

Si estudiamos el movimiento de una cualquiera de las partículas respecto el S.C.M., su peso se compensará con la fuerza de inercia debida a la traslación del S.C.M., por lo que sólo habrá que considerar la tensión *F* del hilo.

Es decir, este movimiento relativo es equivalente al de una partícula sujeta a un punto fijo (G) mediante un hilo inextensible, y a la que se le imprime una velocidad inicial que pone en tensión al hilo, por lo que describirá una circunferencia con centro G, manteniéndose constante la tensión del hilo.

El movimiento total de cada partícula será la composición de la parábola descrita por G con la circunferencia descrita respecto al S.C.M.

Ejercicio nº 32

El sistema tiene dos grados de libertad, uno para cada partícula (que se mueven sobre sendas trayectorias dadas). La reacción sobre la partícula B (que tendrá una dirección desconocida a priori, dentro del plano normal a la hélice) hace que no podamos aplicar con plena eficacia ni el teorema de la cantidad de movimiento ni el del momento cinético, al hacer ambos intervenir esta reacción desconocida que no forma parte de las incógnitas pedidas. En cambio, el teorema de la energía sí es fácilmente aplicable, ya que la fuerza de atracción deriva de un potencial conocido:

$$V = \tfrac{1}{2}\, k\, d^2 = \tfrac{1}{2}\, k\, (r^2 + h^2) = \tfrac{1}{2}\, k\, h^2 + cte$$

siendo *d* la distancia y *h* la diferencia de altura entre las dos partículas.

Podemos, en resumen, plantear un sistema con dos ecuaciones: la conservación total de la energía del sistema y la del movimiento de A sobre el eje vertical de la hélice.

Refiriendo la hélice a sus ejes habituales, las coordenadas de B serán:

$$X_B = \sqrt{3}\cos u, \quad Y_B = \sqrt{3}\ \mathrm{sen}\, u, \quad Z_B = u$$

y su velocidad

$$V_B = (3+1)\dot{u}^2 = 4\dot{u}^2$$

La posición de A viene definida por $Z_A = z$. Su velocidad: $V_A = \dot{z}$

Con estas coordenadas resulta: $h = u - z$

1.- Conservación de la energía total del sistema:

$$\tfrac{1}{2} m\,(4\dot{u}^2) + \tfrac{1}{2}\, 2m\ \dot{z}^2 + \tfrac{1}{2} k\,(u-z)^2 + mgu + 2mgz = cte = 0 \tag{1}$$

Movimiento de A:

$$2m\ddot{z} = -2mg + k(u-z) \tag{2}$$

Si llamamos: k/m = b y derivamos (1):

$$4\dot{u}\ddot{u} + 2\dot{z}\ddot{z} + b(u-z)(\dot{u} - \dot{z}) + g\dot{u} + 2g\dot{z} = 0 =$$

$$= \dot{u}\ \{4\ddot{u}\ b(u-z) + g\} + \dot{z}\ \{2\ddot{z}\ -b(u-z) + 2g\}$$

que, teniendo en cuenta (2), se convierte en:

$$4\ddot{u} + b(u-z) + g = 0 \tag{3}$$

Sumando (3) + (2)/*m:* $\qquad 4\ddot{u} + 2\ddot{z} + 3g = 0$

que, integrada dos veces, nos da:

$$2u + z + \tfrac{3}{4} gt^2 = 0 \tag{4}$$

Despejando z, entrando en (3) e integrando:

$$u = -\frac{1}{4}gt^2 + \frac{g}{3b}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{3b}{4}}\ t\right) \tag{5}$$

luego:

$$z = -\frac{1}{4}gt^2 - \frac{2g}{3b}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{3b}{4}}\ t\right) \tag{6}$$

2.- Para $t = 0$, sabemos que $u = z = 0$. Si para $t = T$ tenemos que $u = z = s$, de (4) sacamos que:

$$s = -\tfrac{1}{4} gT^2$$

Particularizando en (5) ó (6) se obtiene: $T = \frac{2\pi}{\sqrt{3b/4}}$

La velocidad de A en esa posición la obtenemos particularizando $\dot{u}$ (obtenida derivando (5)):

$$V_A\ (T) = -\frac{1}{2}gT = -\frac{g\pi}{\sqrt{3b/4}}$$

y particularizando la segunda derivada de (6),

$$a_A\ (T) = -g$$

Ejercicio nº 33

Para simplificar, podemos tomar la masa común como unidad. Llamemos y al espacio recorrido por A (el más atrasado), u al recorrido por B (el más adelantado) y h a la separación inicial (luego: $y_0 = 0;\ u_0 = h$). Podemos plantear directamente las ecuaciones diferenciales del movimiento de ambos vehículos:

$$\ddot{y} = -k\ \dot{u} \tag{1}$$

$$\ddot{u} = -k'\dot{y} \tag{2}$$

(Advertencia muy importante: estas ecuaciones son válidas siempre que ninguna de las velocidades sean nulas, pues en el momento en que uno de los vehículos anule su velocidad, carece de sentido hablar de fuerza *resistente* sobre él, ocurriendo, sencillamente, que este vehículo quedará parado mientras el otro prosigue con velocidad uniforme, al ser nula la fuerza resistente sobre él.)

Si multiplicamos (1) por $k'\dot{y}$, (2) por $k\ \dot{u}$ y las restamos, obtenemos:

$$k'\ \dot{y}\ \ \ddot{y}\ -\ k\ \dot{u}\,\ddot{u}\ = 0$$

que integrada nos da:

$$k'\dot{y}^2 - k\dot{u}^2 = cte = k'a^2 - kb^2 = C$$

Sin necesidad de integrar completamente las velocidades $\dot{y}(t)$ y $\dot{u}(t)$ sabemos que ambas funciones serán decrecientes, por estar frenados ambos vehículos.

Resulta evidente que si C > 0, llegará a ser $\dot{u} = 0$ mientras que aún $\dot{y} > 0$, con lo que A acabará alcanzando a B, valga h lo que valga.

Por el contrario, si C < 0, llegará a ser $\dot{y} = 0$ mientras que aún $\dot{u} > 0$, con lo que A habrá efectuado un recorrido finito que, de ser inferior a *h*, le impedirá alcanzar a B.

La relación que debe verificarse es, por tanto:

$$k' \ a^2 > kb^2 \, .$$

Ejercicio nº 34

1.- Llamemos u_1 y u_2 a los espacios recorridos respectivamente por m_1 y m_2 desde su posición inicial. La ecuación diferencial delmovimiento de cualquiera de las partículas puede ser planteada directamente, sin más que proyectar sobre su recta las fuerzas actuantes en la partícula (tengamos en cuenta, al proyectar la fuerza de atracción, que las dos rectas son ortogonales). Como el formato es el mismo en los dos casos, suprimiremos los subíndices:

$$m\ddot{u} = mg\sqrt{2} \, / \, 2 - ku$$

que integrada da:

$$u = \frac{mg\sqrt{2}}{2k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Como vemos, se trata de sendos movimientos armónicos cuyas posiciones más altas corresponden a la inicial. Sus amplitudes y frecuencias dependen de la masa de cada partícula, por lo que no coinciden.

2.- Si ahora proyectamos según la normal a la recta, anulando las fuerzas, podemos obtener el valor de la reacción R_1 (no olvidemos que la fuerza de atracción actúa también en la dirección OZ de la mínima distancia, con lo que tenemos dos componentes)

$$R_{1u} = m_1 g\sqrt{2} \, / \, 2 + ku_2$$

$$R_{1Z} = kb = cte$$

Como puede apreciarse, los valores máximo y mínimo de R_1 se representan coincidiendo con los de u_2, que son respectivamente $m_2 g\sqrt{2}k$ y 0, por lo que:

$$R_{max}^2 = k^2 b^2 + 2g^2\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)^2$$

$$R_{min}^2 = k^2 b^2 + \frac{1}{2}m_1^2 g^2$$

3.- Evidentemente, el c.d.m. se moverá en un plano paralelo a las rectas, situado entre ellas a distancias inversamente proporcionales a las masas. dentro de este plano, sus coordenadas x (según r_1) e y (según r_2) valdrán:

$$x = u_1 m_1 / (m_1 + m_2)$$
$$y = u_2 m_2 / (m_1 + m_2)$$

que nos suministran las ecuaciones paramétricas de su trayectoria.

El módulo de su velocidad v valdrá:

$$v^2 = x'^2 + y'^2 = \frac{g^2}{2k(m_1 + m_2)} \left(m_1^3 \operatorname{sen}^2 \sqrt{\frac{k}{m_1}} t + m_2^3 \operatorname{sen}^2 \sqrt{\frac{k}{m_2}} t \right)$$

cuyo valor máximo posible se obtendría cuando fueran simultáneamente iguales a ± 1 ambos senos. esto ocurrirá para un tiempo T tal que los dos argumentos valieran un número impar de veces $\pi / 2$, lo cual exige que:

$$\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \frac{2n + 1}{2n' + 1}$$

siendo n y n' dos números enteros.

Ejercicio nº 35

El peso del trozo h "tira" del trozo b-h, que está "sujeto" por el rozamiento, luego (tomemos la densidad lineal de la cadena como unidad):

$$hg = k\,(b-h)g \quad ,, \quad h = bk/(1+k)$$

Una vez que la cadena está en movimiento, llamemos u a la longitud de cadena que cuelga en un instante cualquiera.

Para un desplazamiento elemental du, el peso efectúa un trabajo $ugdu$, mientras que el rozamiento produce un trabajo negativo $-(b-u)gkdu$.

Toda la masa de la cadena se mueve con la velocidad $\acute{u}$, por lo que su energía cinética valdrá $\frac{1}{2}b\acute{u}^2$.

Entre la posición inicial y una cualquiera podemos poner:

$$\tfrac{1}{2}b\acute{u}^2 - 0 = \int_h^u ugdu - \int_h^u gk(b-u)du = \tfrac{1}{2}\,g(1+k)(u^2-h^2) - gkb(u-h)$$

que es una primera integral del movimiento.

La velocidad v de la cadena cuando el último eslabón abandona la mesa la obtenemos sin más que hacer $u = b$ en la ecuación anterior, resultando:

$$v^2 = gb/(1+k)$$