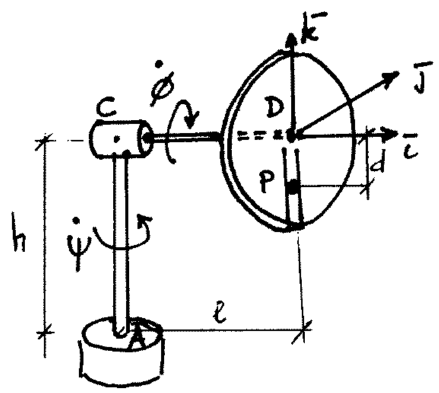
MECANICA

Practica n$^{\underline{o}}$ 4 curso 95-96

16. El dispositivo de la figura consta de un eje vertical AC de longitud h que gira con velocidad cte $\dot{\psi}$. Dicho eje mueve un árbol horizontal CD, de longitud l, en cuyo extremo D se halla un disco con una ranura que gira con velocidad $\dot{\phi}$ cte respecto al eje CD. Por la ranura se mueve una partícula P con velocidad v en dirección vertical hacia abajo en el instante considerado y aceleración a vertical hacia arriba en ese mismo instante. Se pide:

1. Aceleración angular del disco.
2. Considerando la referencia $\{D, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ solidaria al disco, como sistema de referencia móvil, aceleraciones absoluta, de arrastre, relativa y de Coriolis de P.
3. Las mismas cuestiones para la referencia $\{A, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}\}$ solidaria al eje AC que gira por tanto con velocidad $\dot{\psi}$ con el mismo.



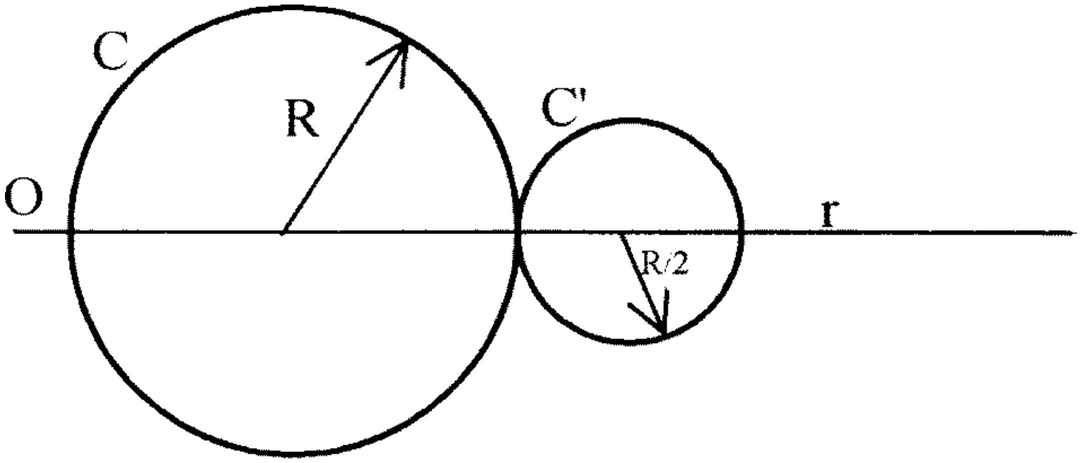
17. Una circunferencia C de radio R gira en su plano alrededor de uno de sus puntos O con velocidad angular constante ω. Al mismo tiempo, otra circunferencia C', de radio $R/2$, rueda sin deslizar por el exterior de la circunferencia C de forma que el punto de contacto entre ambas describe una recta fija r.

Inicialmente los centros de las dos circunferencias se encuentran sobre la recta r.

Se pide calcular en un instante genérico:

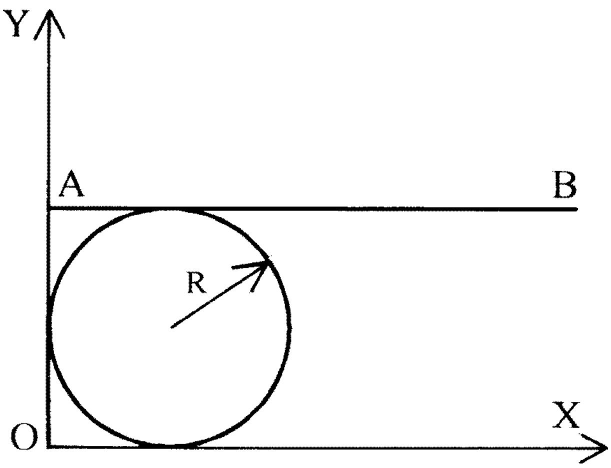
1. Velocidad angular de la circunferencia C'.

2. Posición del c.i.r. y polares del movimiento de C'.
3. Velocidad de sucesión del c.i.r.



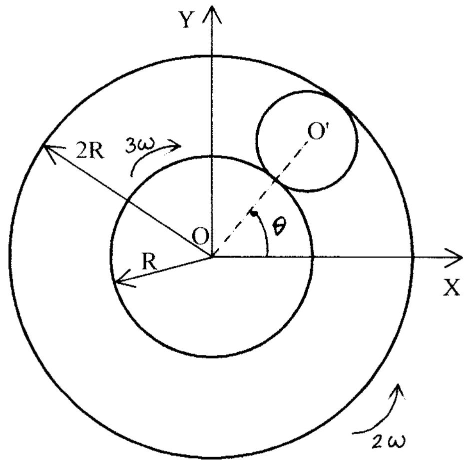
18. El sistema de la figura está formado por una barra AB que se mueve permaneciendo tangente a un disco C fijo. La barra AB está inicialmente horizontal como se representa. El punto A comienza a ascender ligado al eje de ordenadas Y con aceleración a positiva y constante. Se pide calcular en un instante genérico:

1. Velocidad y aceleración del punto de contacto de la barra con el disco en función del ángulo θ que la barra forma con la vertical.
2. Posición del c.i.r. y polares del movimiento de la barra.
3. Particularizar los resultados anteriores para $\theta = \frac{\pi}{3}$.



19. El rodillo de radio $\frac{R}{2}$ y centro O' de la figura engrana con los cilindros de radio R y $2R$ con centro en O que giran con velocidades angulares constantes 3ω y 2ω respectivamente, con los sentidos indicados en la figura. Se pide:

1. Calcular la velocidad de rotación del rodillo, velocidad absoluta de su centro O' y posición angular θ en función del tiempo.
2. Determinar la posición del c.i.r. y las polares del movimiento del rodillo.
3. Calcular la velocidad de sucesión del c.i.r. del rodillo.



20. Se tiene un disco de radio r que se mueve paralelo al plano horizontal OXY mientras su centro describe una hélice de ecuaciones:

$$\rho = R\,;\; z = \frac{h}{2\pi}\theta$$

con velocidad angular constante $\omega = \dot{\theta} = cte.$

A su vez el disco posee una velocidad de rotación vertical constante tal que $\dot{\varphi} = N\dot{\theta}$.

Se pide:

1. Ecuación de la trayectoria de un punto A del disco situado en el perímetro.
2. Axoides del movimiento del disco.

MECANICA

Practica nº 4 curso 95-96

Soluciones

Ejercicio nº 16.-

1.- La velocidad angular del disco es:

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\phi}\boldsymbol{i} + \dot{\psi}\boldsymbol{k}$$

Derivando esta expresión se obtiene la aceleración angular; para ello consideramos que las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$ son constantes en el triedro de referencia que gira solidario con el eje AC:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_{rel} + \dot{\psi}\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{\Omega} = -\dot{\psi}\dot{\phi}\boldsymbol{j}$$

2.- La expresión de la aceleración del punto P en el sistema de referencia $\{D, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, es:

$$\boldsymbol{a}_{abs} = \boldsymbol{a}_{arr} + \boldsymbol{a}_{cor} + \boldsymbol{a}_{rel}$$

con:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{arr} &= \boldsymbol{a}_D + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{DP} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{DP}) && (1) \\ \boldsymbol{a}_{cor} &= 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_{rel} && (2) \\ \boldsymbol{a}_{rel} &= a\boldsymbol{k} && (3) \end{aligned}$$

Las expresiones de los términos de (1) y (2) en el instante dado son:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_D &= -\dot{\psi}^2 l\, \boldsymbol{i} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{DP} &= -\dot{\psi}\dot{\phi}\, \boldsymbol{j} \wedge (-d)\boldsymbol{k} = \dot{\psi}\dot{\phi} d\, \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{DP}) &= (-\dot{\phi}\, \boldsymbol{i} + \dot{\psi}\, \boldsymbol{k}) \wedge \left[(-\dot{\phi}\, \boldsymbol{i} + \dot{\psi}\, \boldsymbol{k}) \wedge (-d)\, \boldsymbol{k}\right] = \dot{\phi}\dot{\psi} d\, \boldsymbol{i} + \dot{\phi}^2 d\, \boldsymbol{k} \\ 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_{rel} &= 2(-\dot{\phi}\, \boldsymbol{i} + \dot{\psi}\, \boldsymbol{k}) \wedge (-v)\, \boldsymbol{k} = -2\dot{\phi} v\, \boldsymbol{j} \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (1) y (2), resultan las aceleraciones pedidas:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{arr} &= -(\dot{\psi}^2 l - 2\dot{\psi}\dot{\phi} d)\boldsymbol{i} + \dot{\phi}^2 d\, \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{a}_{rel} &= a\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{a}_{cor} &= -2\dot{\phi} v\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{a}_{abs} &= (-\dot{\psi}^2 l + 2\dot{\psi}\dot{\phi} d)\boldsymbol{i} - 2\dot{\phi} v\boldsymbol{j} + (\dot{\phi}^2 d + a)\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

3.- Realizamos ahora el cálculo de la aceleración de P, considerando como referencia móvil $\{A, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}\}$ solidaria con el eje AC. En el instante considerado, las direcciones y sentidos de los versores $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}\}$ coinciden con las de $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$. La velocidad angular y aceleración angular del sistema de referencia es:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{K}; \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

y la velocidad relativa de P respecto al nuevo sistema de referencia:

$$\boldsymbol{v}_{rel} = -\dot{\phi}d\,\boldsymbol{J} - v\,\boldsymbol{K} \tag{5}$$

Por tanto las componentes de la aceleración de P en el nuevo sistema de referencia resultan:

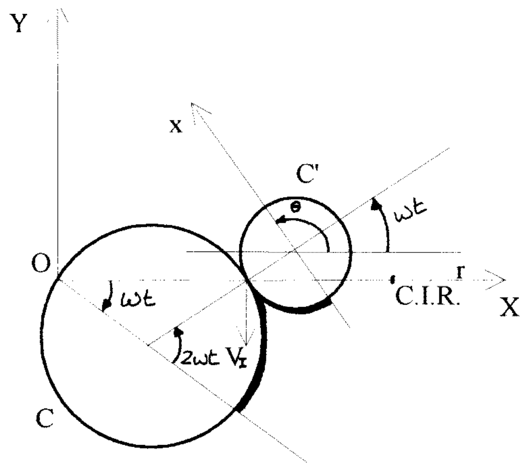
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{arr} &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \boldsymbol{AP} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{AP}) = -\dot{\psi}^2 l\,\boldsymbol{I} \\
\boldsymbol{a}_{cor} &= 2\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}_{rel} = 2\dot{\psi}\dot{\phi}d\,\boldsymbol{I} \\
\boldsymbol{a}_{rel} &= -2\dot{\phi}v\,\boldsymbol{J} + (a + \dot{\phi}^2 d)\boldsymbol{K}
\end{aligned}$$

y sumando todas,

$$\boldsymbol{a}_{abs} = (-\dot{\psi}^2 l + 2\dot{\psi}\dot{\phi}d)\,\boldsymbol{I} - 2\dot{\phi}v\,\boldsymbol{J} + (a + \dot{\phi}^2 d)\boldsymbol{K}$$

Se comprueba que la expresión obtenida de la aceleración absoluta es la misma que en el punto anterior, como era lógico esperar.

Ejercicio nº 17.-



1.- Para obtener la velocidad angular de C' imponemos la condición de rodadura sin deslizamiento igualando los arcos "rodados" en cada circunferencia:

$$2\omega t R = (\theta - \omega t)\frac{R}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 5\omega t$$

derivando:

$$\boxed{\dot{\theta} = 5\omega}$$

2.- El C.I.R. debe estar sobre el eje X y a una distancia del punto de contacto I que se obtiene estableciendo la igualdad de la velocidad de I como perteneciente a cada una de las circunferencias:

$$\left.\begin{array}{rcl} v_I & = & 2R\omega cos(\omega t) \\ v_I & = & d\dot{\theta} \end{array}\right\}$$

operando:

$$d = \frac{2R\frac{\dot{\theta}}{5}\cos\frac{\theta}{5}}{\dot{\theta}} = \frac{2}{5}R\cos\frac{\theta}{5}$$

$$X_{C.I.R.} = \frac{12}{5}R\cos\frac{\theta}{5}$$

Es decir, la base corresponde con el eje de abscisas fijo OX. Si se plantea de forma analítica se tiene:

$$\left.\begin{array}{rcl} X_{O'} & = & 2R\cos\frac{\theta}{5} + \frac{R}{2}\cos\frac{\theta}{5} = \frac{5}{2}R\cos\frac{\theta}{5} \\ Y_{O'} & = & \frac{R}{2}\,\text{sen}\,\frac{\theta}{5} \end{array}\right\}$$

Base:

$$\left.\begin{array}{rcl} X & = & X_{O'} - \frac{dY_0}{d\theta} = \frac{12}{5}\cos\frac{\theta}{5} \\ Y & = & Y_{O'} + \frac{dX_0}{d\theta} = 0 \end{array}\right\}$$

Ruleta:

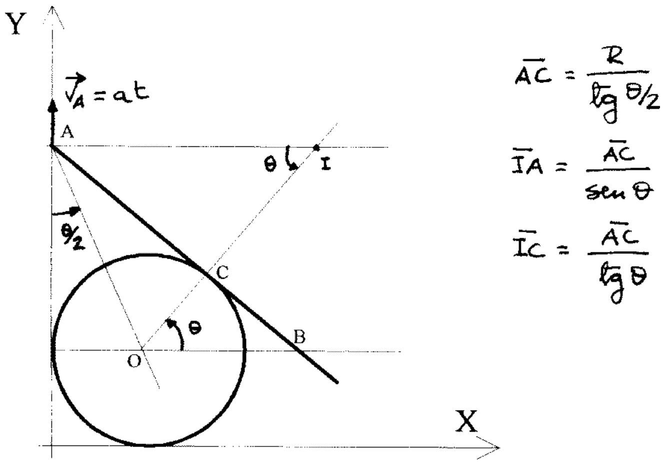
$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{dX_{O'}}{d\theta}\,\text{sen}\,\theta - \frac{dY_{O'}}{d\theta}\cos\theta = \frac{-R}{2}\,\text{sen}\,\frac{\theta}{5}\,\text{sen}\,\theta - \frac{R}{10}\cos\frac{\theta}{5}\cos\theta \\ y = \frac{dX_{O'}}{d\theta}\cos\theta + \frac{dY_{O'}}{d\theta}\,\text{sen}\,\theta = \frac{-R}{2}\,\text{sen}\,\frac{\theta}{5}\cos\theta + \frac{R}{10}\cos\frac{\theta}{5}\,\text{sen}\,\theta \end{array}\right\}$$

3.- Velocidad de sucesión del C.I.R.:

$$X_{C.I.R.} = \frac{12}{5}\cos\frac{\theta}{5}$$

$$v_s = |\dot{X}_{C.I.R.}| = \frac{12\dot{\theta}}{25}\,\text{sen}\,\frac{\theta}{5} = \frac{12}{5}\omega\,\text{sen}\,\omega t$$

Ejercicio nº 18.-



1.- Nos piden la velocidad y aceleración del punto C.

En primer lugar se calcula la velocidad angular de la barra AB. Para ello se tiene en cuenta que es una rotación alrededor del punto I:

$$\boldsymbol{V}_A = at\boldsymbol{J}$$

$$\boldsymbol{V}_A = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{IA} = -\dot{\theta}\frac{R}{\text{sen}\,\theta\tan\frac{\theta}{2}}\boldsymbol{J} = \frac{-\dot{\theta}R}{2\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}\boldsymbol{J}$$

despejando:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{K} = \frac{-2at\,\text{sen}^2(\theta/2)}{R}\boldsymbol{K}$$

Para poder escribir t en función de θ, debe integrarse la relación:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-2at\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}{R}$$

$$\int_t^0 \frac{2at}{R}dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2R}{a}\left(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}} - 1\right)}$$

La velocidad de C lleva la dirección de la barra:

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{IC} = \dot{\theta}\frac{R}{\tan\theta\tan(\theta/2)}\frac{\boldsymbol{AC}}{|\boldsymbol{AC}|} = -at\cos\theta\frac{\boldsymbol{AC}}{|\boldsymbol{AC}|}$$

$$\boldsymbol{CA} = \frac{R}{\tan(\theta/2)}(-\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{I} + \cos\theta\boldsymbol{J})$$

$$\boldsymbol{v}_C = at\cos\theta(-\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{I} + \cos\theta\boldsymbol{J})$$

La aceleración de C vendrá dada por:

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AC})$$

donde

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{-2a\operatorname{sen}^2(\theta/2)(R - at^2\operatorname{sen}\theta)}{R^2}\boldsymbol{K}$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{AC} = \frac{a\operatorname{sen}\theta(R - at^2\operatorname{sen}\theta)}{R}(-\cos\theta\boldsymbol{I} - \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{J})$$

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AC}) = \frac{-2a^2t^2\operatorname{sen}^2(\theta/2)\operatorname{sen}\theta}{R}(\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{I} - \cos\theta\boldsymbol{J})$$

$$\boldsymbol{a}_A = a\boldsymbol{J}$$

Sumando componentes, resulta

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_C &= \left[-a\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{a^2t^2}{R}\operatorname{sen}^2\theta(2\cos\theta - 1)\right]\boldsymbol{I} \\ &\quad + \left[a\cos^2\theta + \frac{a^2t^2}{R}\operatorname{sen}\theta(\cos\theta - \cos 2\theta)\right]\boldsymbol{J} \end{aligned}$$

2.- Ecuaciones de la Base:

$$\left.\begin{aligned} X_I &= |\boldsymbol{AI}| = \frac{R}{2\operatorname{sen}^2(\theta/2)} \\ Y_I &= |\boldsymbol{AC}|\cos\theta + R(1 + \operatorname{sen}\theta) = \frac{R\cos\theta}{\tan(\theta/2)} + R(1 + \operatorname{sen}\theta) \end{aligned}\right\}$$

Si se elimina el parámetro θ resulta la expresión implícita:

$$(Y_I - R)^2 = R(2X_I - R)$$

que corresponde a una parábola de eje $Y_I = R$ y vértice el punto $(\frac{R}{2}, R)$ Ecuaciones de la ruleta: Se consideran unos ejes móviles Axy tales que Ax coincide con la dirección AB y Ay es perpendicular al anterior por A:

$$\left.\begin{aligned} x_I &= |\boldsymbol{AC}| = \frac{R}{\tan(\theta/2)} \\ y_I &= |\boldsymbol{IC}| = \frac{R}{\tan\theta\tan(\theta/2)} \end{aligned}\right\}$$

Al eliminar el parámetro θ resulta:

$$x_I{}^2 - 2Ry_I - R^2 = 0$$

expresión correspondiente a una parábola de eje Ay y vértice en $y = \frac{-R}{2}$.

3.- Particularización para $\theta = \frac{\theta}{3}$

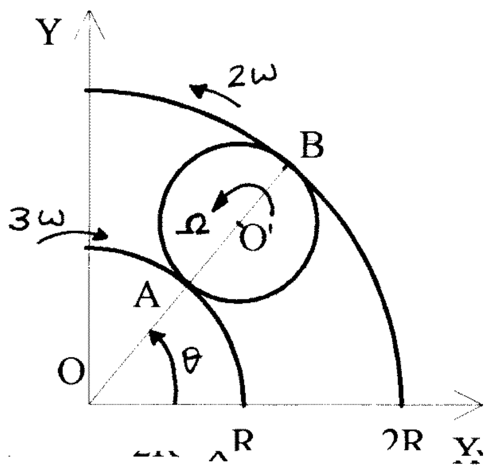
$$t = \sqrt{\frac{2R}{a}(\sqrt{3}-1)}$$

$$\dot{\theta} = -\frac{a}{2R}t = \sqrt{\frac{a}{2R}(\sqrt{3}-1)}$$

$$\boldsymbol{v}_C = \frac{at}{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{I} + \frac{1}{2}\boldsymbol{J}\right) = \sqrt{\frac{aR}{2}(\sqrt{3}-1)}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{I} + \frac{1}{2}\boldsymbol{J}\right)$$

$$\boldsymbol{a}_C = \frac{a}{4}[-\sqrt{3}\boldsymbol{I} + (13 - 4\sqrt{3})\boldsymbol{J}]$$

Ejercicio nº 19.-



1.- La posición de los puntos A y B en los ejes de la figura viene dada por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_A &= R\cos\theta\,\boldsymbol{I} + R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{J} \\ \boldsymbol{r}_B &= 2R\cos\theta\,\boldsymbol{I} + 2R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{J} \end{aligned}$$

y sus velocidades respectivas vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_A &= (-3\omega)\,\boldsymbol{K}\wedge\boldsymbol{r}_A &&= 3\omega R(\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{I} - \cos\theta\,\boldsymbol{J}) \\ \boldsymbol{v}_B &= 2\omega\,\boldsymbol{K}\wedge\boldsymbol{r}_B &&= 4\omega R(-\,\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{I} + \cos\theta\,\boldsymbol{J}) \end{aligned}$$

Además por ser puntos pertenecientes al rodillo se debe cumplir:

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{AB}$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad de rotación del rodillo. Por tanto:

$$\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A)$$

y sustituyendo:

$$-7\omega R(\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{I} - \cos\theta\,\boldsymbol{J}) = \Omega\boldsymbol{K}\wedge R(\cos\theta\,\boldsymbol{I} + \mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{J})$$

$$\boldsymbol{\Omega} = 7\omega\,\boldsymbol{K}$$

Además:

$$\boldsymbol{v}_{O'} = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{r}_O - \boldsymbol{r}_A)$$

y al sustituir $\boldsymbol{v}_A$ y $\boldsymbol{\Omega}$ resulta:

$$\boldsymbol{v}_{O'} = \frac{-\omega R}{2}(\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{I} - \cos\theta\,\boldsymbol{J})$$

y finalmente:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{2v_{O'}}{3R} = \frac{\omega}{3} \\ \theta(t) &= \frac{\omega}{3}t \end{aligned}$$

2.- El $C.I.R.$ del movimiento del rodillo deberá estar situado sobre la perpendicular común a $\boldsymbol{v}_A$ y $\boldsymbol{v}_B$, es decir, sobre el diámetro AB. Además deberá estar a una distancia de B tal que:

$$v_B = \Omega\,|\boldsymbol{IB}|$$

Así:

$$4\omega R = 7\omega\,|\boldsymbol{IB}| \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{IB}| = \frac{4}{7}R$$

La base es el lugar geométrico de I para los ejes fijos OXY. En este caso corresponde a una circunferencia centrada en O y de radio $|\boldsymbol{OI}| = \frac{10}{7}R$:

$$X^2 + Y^2 = \left(\frac{10}{7}R\right)^2$$

La ruleta es el lugar geométrico de I para unos ejes solidarios al rodillo en su movimiento. En este caso, es una circunferencia centrada en O y de radio $|\boldsymbol{O'I}| = \frac{1}{14}R$:

$$x^2 + y^2 = (\frac{1}{14}R)^2$$

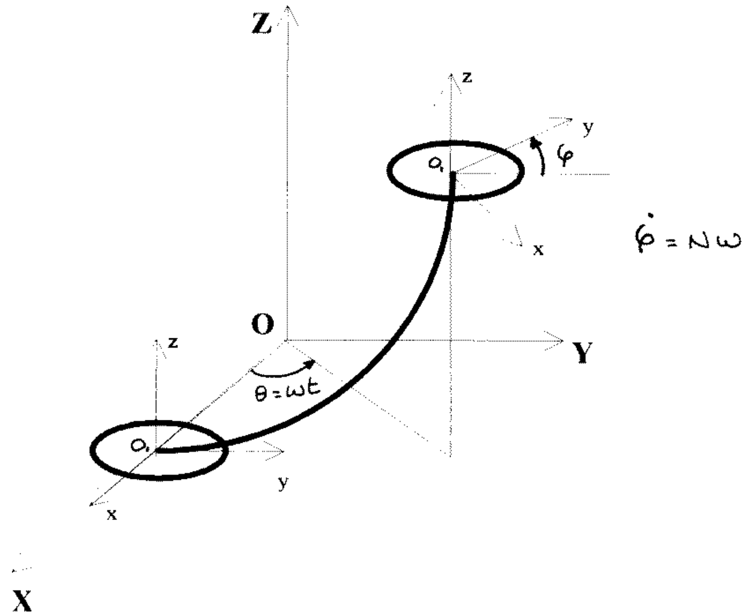
3.- Se sabe que:

$$v_S = \dot{\theta}|\boldsymbol{OI}|$$

de manera que sustituyendo valores resulta:

$$v_S = \frac{10}{21}\omega R$$

Ejercicio nº 20.-



1.- Axoides del movimiento Se definen los sistemas de referencia fijo (O, X, Y, Z) y móvil (O_1, x, y, z) representados en la figura. En ellos la velocidad de rotación del disco viene dada por:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{K} = N\omega\boldsymbol{k}$$

y la velocidad del punto O_1 respecto al sistema fijo:

$$\left.\begin{array}{lcl} X_{O_1} & = & R\cos\omega t \\ Y_{O_1} & = & R\,\mathrm{sen}\,\omega t \\ Z_{O_1} & = & \frac{h}{2\pi}\omega t \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V}_{O_1} = -R\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\boldsymbol{I} + R\omega\cos\omega t\boldsymbol{J} + \frac{h}{2\pi}\omega\boldsymbol{K}$$

Para determinar las ecuaciones del axoide fijo, se parte de considerar la velocidad de un punto cualquiera solidario al disco respecto al sistema fijo:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_{O_1} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O_1P}$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_{O_1} + N\omega\boldsymbol{K} \wedge \left[(X - R\cos\omega t)\boldsymbol{I} + (Y - R\,\mathrm{sen}\,\omega t)\boldsymbol{J} + (Z - \frac{h}{2\pi}\omega t)\boldsymbol{K}\right]$$

Para que ese punto pertenezca al eje del movimiento helicoidal tangente, $\boldsymbol{V}$ debe ser paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$, es decir:

$$\left.\begin{array}{lcl} -R\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t - N\omega(Y - R\,\mathrm{sen}\,\omega t) & = & 0 \\ R\omega\cos\omega t + N\omega(X - R\cos\omega t) & = & 0 \end{array}\right\}$$

Así, las ecuaciones del axoide fijo resultan:

$$\left.\begin{array}{l} X = \frac{N-1}{N} R \cos \omega t \\ Y = \frac{N-1}{N} R \operatorname{sen} \omega t \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad X^2 + Y^2 = \left(\frac{N-1}{N}\right)^2 R^2$$

que corresponden a un cilindro de eje Z y radio $\frac{N-1}{N} R$.

Para determinar las ecuaciones del axoide móvil se aplica un procedimiento similar. La velocidad absoluta de un punto del disco expresada en el sistema móvil viene dada por:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{O_1} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O}_1\boldsymbol{P} = \boldsymbol{v}_{O_1} + N\omega \boldsymbol{k} \wedge (x\boldsymbol{i} + (y\boldsymbol{j} + (z\boldsymbol{k})$$

donde $\boldsymbol{v}_{O_1}$ vale:

$$\boldsymbol{v}_{O_1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v}_{O_1} = \begin{bmatrix} \cos\omega t \cos N\omega t - \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen} N\omega t \\ -\cos\omega t \operatorname{sen} N\omega t - \operatorname{sen}\omega t \cos N\omega t \\ 1 \end{bmatrix}$$

y si de nuevo se impone la condición de paralelismo entre $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{\Omega}$ resulta:

$$\left.\begin{array}{rcl} R\omega \cos[(N+1)\omega t] - N\omega y & = & 0 \\ -R\omega \operatorname{sen}[(N+1)\omega t] + N\omega x & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \left(\frac{R}{N}\right)^2$$

que en este caso corresponden a un cilindro de eje z y radio $\frac{R}{N}$.

2.- Trayectoria del punto A Las coordenadas del punto A en el sistema móvil son $(r, 0, 0)$. En el sistema fijo corresponden a:

$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \\ Z_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Operando para expresarlas en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{rcl} X_A & = & R\cos\omega t + r\cos(N\omega t) \\ Y_A & = & R\operatorname{sen}\omega t + r\operatorname{sen}(N\omega t) \\ Z_A & = & \frac{h}{2\pi}\omega t \end{array}\right\}$$

Las correspondientes ecuaciones cartesianas de la trayectoria se pueden escribir sin más que eliminar el parámetro t, por ejemplo a partir de la tercera ecuación.