MECANICA

Practica nº 3

curso 95-96

11. Un oscilador lineal está formado por una masa $m = 10\,\text{kg}$, con un resorte elástico de constante $k = 10\,000\,\text{N/m}$. Para determinar el coeficiente de amortiguamiento viscoso c, se sabe que sometido a vibraciones libres, el movimiento reduce su amplitud a la mitad al cabo de $100\,\text{s}$. Estando el sistema en reposo, comienza a actuar de manera súbita una fuerza constante de valor $F = 1000\,\text{N}$, manteniéndose esta carga a lo largo del tiempo. Se pide:

a. Calcular el valor de c.

b. Ecuación del movimiento para el régimen transitorio con el valor de c calculado antes.

c. Ecuación del movimiento para el régimen permanente (transcurrido suficiente tiempo).

d. Suponiendo que el valor de c es muy pequeño, y se puede por tanto despreciar a efecto del régimen transitorio, obtener la máxima elongación de este movimiento respecto a la posición inicial, y calcular el factor de amplificación.

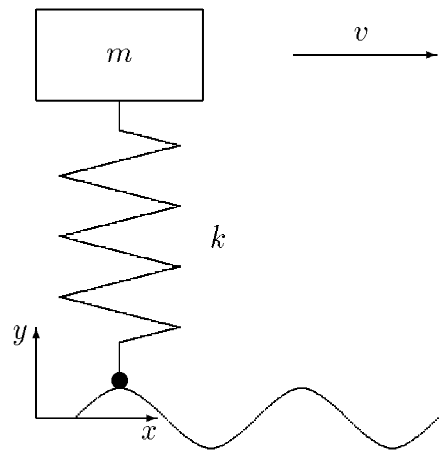
(Se llama factor de amplificación al cociente entre la máxima elongación del movimiento para la carga dinámica y la que produciría en el resorte una carga estática, impuesta de forma suficientemente lenta para que no se produzcan vibraciones)

12. Un oscilador lineal está formado por una masa de $100\,\text{kg}$ unida a un resorte elástico de constante $10\,000\,\text{N/m}$. La oscilación, sin resistencias pasivas, debe realizarse según una recta horizontal. El sistema está montado sobre un dispositivo al que se le comunica un movimiento impuesto paralelo a la recta anterior de acuerdo con la ley $u = 0.20 \operatorname{sen} \omega t$ en metros. Se pide:

1. Obtener la frecuencia angular ω que produce la resonancia.
2. Ecuación del movimiento relativo de la masa respecto del dispositivo que la soporta, siendo las condiciones iniciales (en $t = 0$) el muelle sin tensión y la masa sin velocidad relativa. Para este punto se tomará $\omega = 8\ \text{rad/s}$.
3. Suponiendo que existe un pequeño amortiguamiento inevitable, expresar el régimen permanente del movimiento relativo y el máximo esfuerzo que soporta el muelle en este régimen.

4. Discutir razonadamente si este máximo esfuerzo se puede ver superado durante el régimen transitorio.

13. Un vehículo de masa m posee una suspensión que se puede representar mediante un resorte elástico de constante k y amortiguamiento despreciable, interpuesto entre la masa del vehículo y las ruedas (consideradas de masa despreciable), tal como se muestra en la figura adjunta. Se pide:



1. El vehículo viaja con velocidad constante v sobre un pavimento irregular, pudiendo representarse la superficie del mismo como ondulaciones de la superficie según la coordenada x en dirección de la marcha

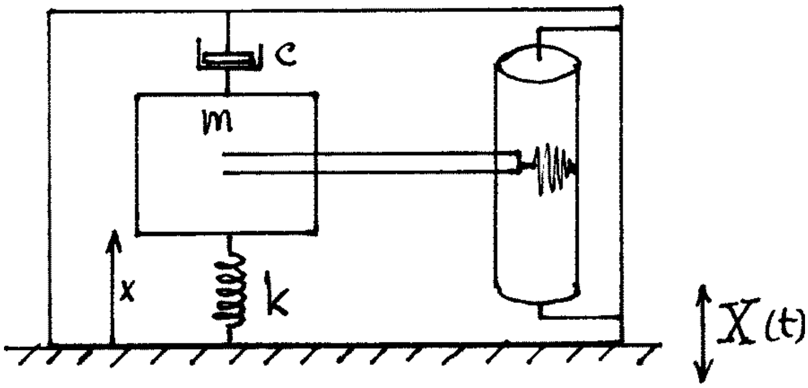
$$y = a \operatorname{sen} \lambda x$$

siendo y la coordenada vertical. Calcular la amplitud del movimiento y la aceleración máxima experimentada por el vehículo en el régimen permanente (admitiendo que se alcanza el mismo gracias a un pequeño amortiguamiento inevitable), así como el cociente entre dicha aceleración y la que se produciría en caso de no haber suspensión de ningún tipo.

2. El vehículo viaja con velocidad constante v sobre un pavimento regular y horizontal en el que existe un pequeño escalón transversal de altura h y longitud L. Estudiar el movimiento vertical del vehículo (en el régimen transitorio), calculando el periodo propio y la amplitud de las oscilaciones. Se supondrá que:
   - La rueda pasa instantáneamente del pavimento al escalón y viceversa.
   - No existen efectos relativos a percusiones.
   - Se desprecia el desplazamiento vertical que pueda sufrir la carrocería del vehículo al subir el escalón.

14. Un ventilador de masa 100 kg tiene una excentricidad con respecto a su eje de giro equivalente a 20 kg a 1 cm del eje. El ventilador gira a velocidad constante de 1000 rpm. Si los amortiguadores utilizados tienen un factor de amortiguamiento $\xi = 0.2$, determinar los resortes que deben utilizarse de modo que solo un 10% de la fuerza excéntrica sea transmitida al suelo (en el régimen permanente).

15. El aparato cuyo esquema se representa en la figura es un sismógrafo.



se pide:

a. Escribir la ecuación diferencial que permite calcular el desplazamiento relativo x, cuando la caja está animada de un movimiento vertical armónico $X(t) = R \operatorname{sen} \Omega t$.

b. Integrar esta ecuación diferencial. Demostrar que las oscilaciones libres se amortiguan rápidamente. Tomando sólo en cuenta las oscilaciones forzadas debidas al movimiento de pulsación Ω, calcular la relación r/R en función de Ω/ω_0. Se denomina r a la amplitud del movimiento relativo $x(t)$, R a la amplitud del movimiento forzado $X(t)$ y ω_0 a la pulsación del movimiento libre no amortiguado.

c. Demostrar que la medida de la amplitud r del movimiento relativo permite determinar: o bien la amplitud R del movimiento forzado, si Ω es muy grande con relación a ω_0; o bien la aceleración máxima $\Omega^2 R$ del movimiento forzado, si Ω es es muy pequeño en relación a ω_0.

⋆

MECANICA

Practica nº 3 curso 95-96

Soluciones

Ejercicio nº 11.-

a.- El movimiento para vibraciones libres es

$$x(t) = \underbrace{Ae^{-\frac{c}{2m}t}}_{\text{amplitud}} \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0).$$

Imponiendo que la amplitud se reduzca a la mitad en 100 s,

$$Ae^{-\frac{c}{2m}100} = \frac{A}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = \frac{\ln 2}{5} = 0.13863\,\mathrm{N/(m/s)}.}$$

b.- En el régimen transitorio es preciso considerar la solución de la ecuación completa:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = Ae^{-\frac{c}{2m}t} \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) + \frac{F}{k},$$

siendo

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = 31.623\,\mathrm{rad/s}.$$

Calculamos el valor de A y ϕ_0 mediante las condiciones iniciales $x(0) = \dot{x}(0) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 = x(0) &= A \operatorname{sen}\phi_0 + 0.1 \\ 0 = \dot{x}(0) &= A\left(-\frac{c}{2m}\right) \operatorname{sen}\phi_0 + A\omega\cos\phi_0 \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\tan\phi_0 = \frac{\omega}{c/2m} = 4562.2 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \begin{cases} 89.987° = 0.4999302\pi \text{ rad} \\ 89.987° + 180° = 1.4999302\pi \text{ rad} \end{cases}$$

Tomaremos la segunda solución de ϕ_0 para que el valor de A salga positivo:

$$A = \frac{-0.1}{\operatorname{sen}\phi_0} = 0.100000002 \approx 0.1$$

(la pequeñísima diferencia respecto del valor $A = 0.1$ se debe al pequeño amortiguamiento existente). La ecuación del movimiento es por tanto

$$\boxed{x(t) = 0.1\,e^{-0.006931\,t} \operatorname{sen}(31.623\,t + 1.4999302\pi) + 0.1}$$

c.- El régimen permanente correspondiente a la fuerza constante F es un desplazamiento constante de valor

$$\boxed{x = \frac{F}{k} = 0.1\,\mathrm{m}}$$

d.- Si $c = 0$, la máxima elongación es $0.1 + 0.1 = 0.2\,\mathrm{m}$; la elongación estática es $0.1\,\mathrm{m}$; por tanto, el factor de amplificación vale

$$\boxed{\mathrm{f.a.} = \frac{0.2}{0.1} = 2,}$$

lo que quiere decir que si se aplica la carga de golpe el desplazamiento del resorte es es doble que si se aplica de manera estática.

Ejercicio nº 12.-

1.- La ecuación diferencial del movimiento se obtiene igualando la aceleración absoluta multiplicada por la masa a la fuerza actuante sobre la masa, que será sólo la acción del muelle. Llamando x a la abcisa relativa,

$$100(\ddot{x} + \ddot{u}) = -10\,000\,x$$

es decir.

$$\ddot{x} + 100\,x = 0.2\,\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \tag{1}$$

La frecuencia de resonancia es

$$\omega_r = \sqrt{100} = 10\,\mathrm{rad/s}$$

2.- Para $\omega = 8$ rad/s la ecuación (1) es

$$\ddot{x} + 100\,x = 12.8 \operatorname{sen} 8t \tag{2}$$

Cuya solución general es del tipo

$$x = \underbrace{A \operatorname{sen}(10t + \varphi)}_{x_h} + \underbrace{B \operatorname{sen}(8t + \delta)}_{x_p}$$

sustituyendo x_p en la ecuación diferencial (2) se obtiene

$$\delta = 0; \quad B = \frac{12.8}{36} = 0.355556\,\mathrm{m}$$

y con las condiciones iniciales dadas ($x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$) se obtiene

$$\varphi = 0; \quad A = -\frac{8}{10}B = -0.284444\,\mathrm{m}$$

por lo que la solución es

$$x = -0.284444\,\mathrm{sen}\,10t + 0.355556\,\mathrm{sen}\,8t \tag{3}$$

3.- Si existe un amortiguamiento pequeño, al cabo del tiempo queda sólo el segundo sumando de (3), que proviene de la solución particular. El esfuerzo máximo del muelle es la amplitud de esta oscilación multiplicada por la constante del resorte,

$$F_{max} = 0.355556 \cdot 10^4 = 3555.56\,\mathrm{N}$$

4.- En el régimen transitorio el esfuerzo en el muelle será el producto de la constante del resorte por la elongación x de (3). Esta es la suma de dos armónicos, que en los puntos en que coincidan los máximos podrá tener una elongación mayor que el de los armónicos componentes, y por tanto mayor que el régimen permanente.

De forma más precisa podemos derivar para obtener el máximo de (3), resultando

$$-\cos 10t + \cos 8t = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\mathrm{sen}(9t)\,\mathrm{sen}(t) = 0$$

Esta condición se cumple para

$$\begin{aligned} t &= n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ 9t &= m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

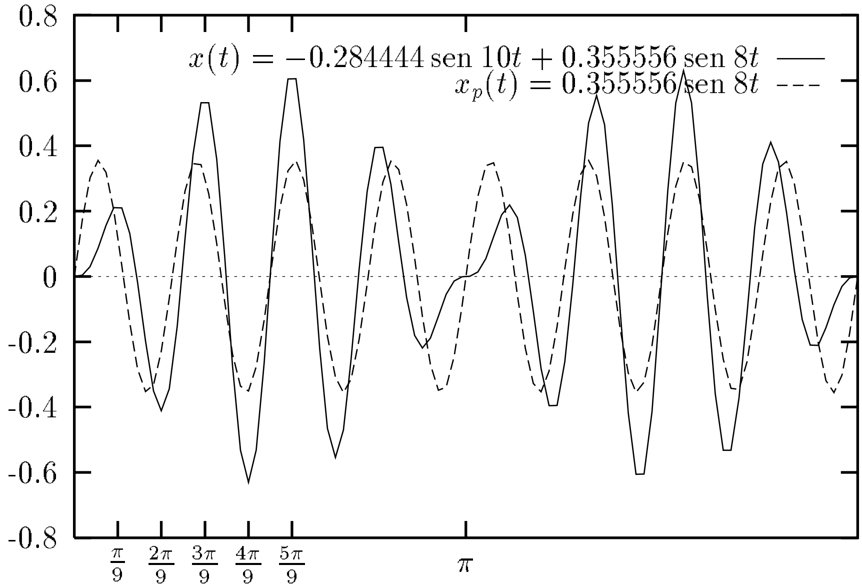
La primera corresponde a puntos de elongación nula que, por las condiciones iniciales dadas, tienen tangente horizontal. La segunda (excepto el valor $m = 0$) da vértices superiores o inferiores de altura distinta, siendo el más alto el que corresponde (por primera vez) a $m = 4$ para negativos (compresión) y a $m = 5$ para positivos (tracción), dando -0.630277 y 0.630277 respectivamente.

Vemos que los máximos son casi la suma de las dos amplitudes ($0.284444 + 0.355556 = 0.64$) aunque no exactamente. la fuerza ejercida por el muelle se obtiene multiplicando por la constante,

$$F_{max} = 6302.77\,\mathrm{N}$$

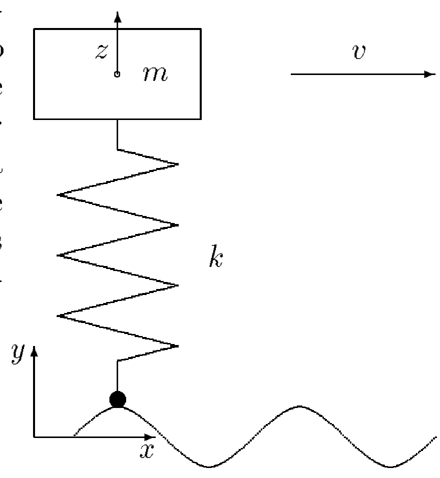
Todo el proceso se repite cada π segundos, por lo que el periodo T entre máximos será también π.

El gráfico de la elongación (3) ayuda a comprender la discusión anterior:



Ejercicio nº 13.-

1.- Sea z el desplazamiento vertical del vehículo respecto de la posición de equilibrio del muelle (incluyendo el efecto del peso de la masa m). Las fuerzas que actúan son por una parte el peso, $W = -mg$, y por otra la fuerza elástica. El alargamiento del resorte es $(z - y - mg/k)$, luego la fuerza elástica es $F = -k(z - y - mg/k)$. La ecuación diferencial del movimiento es por tanto



$$m\ddot{z} = -mg - k\left(z - y - \frac{mg}{k}\right),$$

es decir,

$$m\ddot{z} = -k(z - y).$$

Esta ecuación también puede escribirse como

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 y \qquad (1)$$

donde $\omega_0^2 = k/m$. El vehículo viaja con velocidad v, luego $x = vt$ y por tanto

$$y = a \operatorname{sen} \lambda vt \tag{2}$$

Sustituyendo en (1),

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 a \operatorname{sen} \lambda vt$$

Esta ecuación corresponde a oscilaciones forzadas con excitación armónica, de amplitud $q = \omega_0^2 a$ y frecuencia angular $\Omega = \lambda v$. La solución particular es

$$z_p = A \operatorname{sen}(\lambda vt) \tag{3}$$

donde

$$A = \pm \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \lambda^2 v^2}.$$

Si se admite que el vehículo se encuentra vibrando en régimen permanente, no es necesario obtener la solución de la homogénea que sólo aplica durante el régimen transitorio. El movimiento en régimen permanente del vehículo viene dado por (3).

Si no existiera la suspensión (es decir, si el vehículo estuviese rígidamente unido al terreno), sería $z(t) = y(t)$, con lo que la aceleración máxima experimentada por el vehículo sería, a partir de (2),

$$\ddot{y}_{\mathrm{max}} = a\lambda^2 v^2$$

Con la suspensión, la aceleración máxima es, a partir de (3):

$$\ddot{z}_{\mathrm{max}} = A\lambda^2 v^2$$

Por tanto el cociente pedido es

$$\frac{\ddot{z}_{\mathrm{max}}}{\ddot{y}_{\mathrm{max}}} = \frac{A}{a} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \lambda^2 v^2}.$$

Examinando esta expresión se pueden hacer las observaciones siguientes:

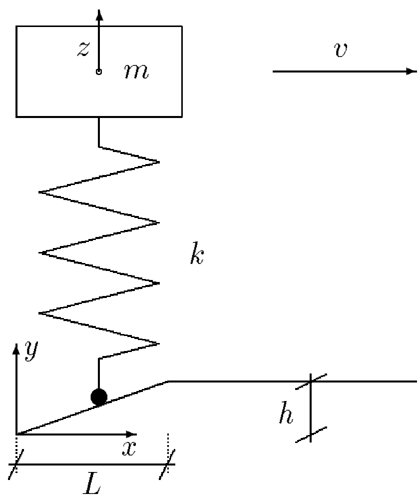
1. Si la suspensión es muy blanda (ω_0 pequeño) la aceleración máxima que experimenta el vehículo es pequeña; en el límite ($\omega_0 \to 0$) el vehículo no oscilaría.

2. Si la suspensión es muy dura (ω_0 alta) el cociente tiende a la unidad; en el límite ($\omega_0 \to \infty$) el vehículo experimenta directamente la vibración del terreno.

3. Existe un valor crítico, $\omega_0 = \lambda v$, para el que se produce resonancia y la amplificación de la aceleración tiende a infinito (en la práctica el amortiguamiento existente haría que se alcanzase un valor finito aunque muy alto).

2.- El enunciado define un escalón en forma de rampa, con longitud L y desnivel h. Tomando como plano de referencia el pavimento antes del escalón, la ordenada del pavimento viene dada por

$$y = \begin{cases} 0 & \text{antes del escalón,} \\ \frac{h}{L}x = \frac{h}{L}vt & \text{en el escalón,} \\ h & \text{después del escalón.} \end{cases} \qquad (4)$$



Sea z el desplazamiento vertical del vehículo respecto a su posición de equilibrio antes del escalón. La ecuación diferencial del movimiento es la misma que en el caso anterior (1), aunque aquí $y(t)$ es la función de altura del escalón (4):

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 y.$$

Al tratarse de un escalón y no de irregularidades periódicas, no cabe hablar de régimen permanente y debe estudiarse la respuesta en el régimen transitorio. Calculamos en primer lugar la respuesta del sistema en el escalón, que corresponde al intervalo de tiempo $(0 < t < L/v)$. La ecuación es

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 \frac{h}{L} vt$$

que admite la solución particular $z_p = hvt/L$, luego la solución completa es

$$z = \frac{h}{L} vt + A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

Particularizando para las condiciones iniciales $(z_0 = \dot{z}_0 = 0)$ obtenemos

$$\phi = 0; \quad A = -\frac{hv}{\omega_0 L}$$

luego

$$z = \frac{hv}{\omega_0 L}(\omega_0 t - \operatorname{sen}\omega_0 t) \qquad (\text{para } (0 < t < L/v)) \qquad (5)$$

Al final del escalón, $t_1 = L/v$, luego

$$z_1 = h\left(1 - \frac{v}{\omega_0 L} \operatorname{sen} \frac{\omega_0 L}{v}\right) \qquad (6)$$

$$\dot{z}_1 = \frac{hv}{L}\left(1 - \cos \frac{\omega_0 L}{v}\right) \qquad (7)$$

Después del escalón la ecuación es

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 h,$$

que admite la solución particular $z_p = h$; la solución completa es

$$z = h + B \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi)$$

que define un movimiento armónico de periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Para calcular B, debemos particularizar la solución para las condiciones iniciales dadas por (6) y (7):

$$z_1 = h + B \operatorname{sen} \varphi; \qquad \dot{z}_1 = B\omega_0 \cos \varphi \tag{8}$$

obteniéndose

$$B = \frac{2hv}{\omega_0 L} \operatorname{sen} \frac{\omega_0 L}{2v},$$

$$\varphi = \arctan \frac{\omega_0 (z_1 - h)}{\dot{z}_1} = \frac{\omega_0 L}{2v} - \frac{\pi}{2},$$

donde hemos calculado el desfase φ aunque no se pedía en el enunciado. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. En caso contrario bastaría sumar $\pm k\pi$ hasta conseguirlo, siendo k un número entero arbitrario, lo que no modifica el valor de $\tan \varphi$. El rango de la solución tomada para φ influye únicamente en el signo de B. Podemos comprobar que el signo positivo tomado para B es el que corresponde con el rango de φ supuesto: de (8), si $B > 0$, $\dot{z}_1$ y $\cos \varphi$ deben tener el mismo signo; en efecto, $\dot{z}_1 > 0$ y $\cos \varphi \geq 0$ si $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

La solución del movimiento después del escalón es por tanto

$$z = h - \frac{2hv}{\omega_0 L} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 L}{2v}\right) \cos\left(\omega_0 t + \frac{\omega_0 L}{2v}\right) \qquad (\text{para } t > L/v) \tag{9}$$

Como comprobación, se puede ver que (5) y (9) dan el mismo resultado (z_1) para el instante de final del escalón, $t_1 = L/v$.

Ejercicio nº 14.-

Suponemos que el sistema, de masa total M, está asentado sobre resortes de constante elástica k y amortiguamiento c. La ecuación del movimiento del sistema será

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

donde F es la componente vertical de la fuerza excéntrica debida a una masa m girando con velocidad angular Ω a una distancia e del eje:

$$F = m\Omega^2 e \operatorname{sen}\Omega t.$$

La fuerza que se transmite al suelo será la suma de la fuerza que ejerce el muelle y la ejercida por el amortiguador

$$F_t = kx + c\dot{x}$$

La solución permanente es de la forma $x_p = A\operatorname{sen}(\Omega t + \delta)$, valiendo la amplitud A del movimiento:

$$A = \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\Omega^2}}$$

donde $F_0 = m\Omega^2 e$, $\omega_0 = \sqrt{k/M}$ y $\xi = c/(2\sqrt{kM})$.

Por lo tanto la amplitud o módulo de F_t es

$$|F_t| = A\sqrt{k^2 + c^2\Omega^2} = \frac{(F_0/M)\sqrt{k^2 + c^2\Omega^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\Omega^2}}$$

El coeficiente de transmisión T_r vale $T_r = F_t/F_0$ que después de sustituir F_t y A por los valores anteriores y hacer algunas operaciones nos queda

$$T_r = \frac{\sqrt{1 + 4\xi^2(\Omega/\omega_0)^2}}{\sqrt{(1 - (\Omega/\omega_0)^2)^2 + 4\xi^2(\Omega/\omega_0)^2}}$$

Llamando $r = (\Omega/\omega_0)$ y sustituyendo el dato $\xi = 0.2$ del enunciado, obtenemos para $T_r = 0.1$:

$$0.1 = \frac{\sqrt{1 + 0.16r^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + 0.16r^2}};$$

y despejando r

$$r = 4.7205 = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

Con los datos del problema, $\Omega = 104.7198\,\mathrm{rad/s}$, por lo que $\omega_0 = 22.1842\,\mathrm{rad/s}$ y

$$\boxed{k = 49\,213.7\,\mathrm{N/m}}.$$

Ejercicio nº 15.-

La ecuación del movimiento en este caso es

$$m(\ddot{x}+\ddot{X})+c\dot{x}+kx=0$$

donde x es el movimiento relativo de la masa m respecto al suelo. Sustituyendo X por su expresión, tenemos

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=mR\Omega^2\,\mathrm{sen}(\Omega t)$$

La solución completa de esta ecuación será de la forma

$$x=ae^{-\xi\omega_0 t}\,\mathrm{sen}(\omega t+\psi)+A\,\mathrm{sen}(\omega t+\delta)$$

donde

$$\tan\delta=-\frac{2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$$

y

$$A=\frac{mR\Omega^2}{\sqrt{(k-m\Omega^2)^2+c^2\Omega^2}}$$

Después de un cierto tiempo, solo la oscilación permanente será apreciable. Por tanto, la amplitud del movimiento relativo r será la amplitud A y la relación r/R valdrá

$$\frac{r}{R}=\frac{m\Omega^2}{\sqrt{(k-m\Omega^2)^2+c^2\Omega^2}}$$

que después de operar nos da

$$\frac{r}{R}=\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}-1)^2+4\xi^2\frac{1}{\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}}}$$

Las condiciones límite del enunciado del problema nos llevan a que:

$$\Omega\gg\omega_0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{r}{R}\to 1}$$

y

$$\omega_0\gg\Omega \quad\Rightarrow\quad \boxed{r\omega_0^2\to\Omega^2 R}$$