MECÁNICA

Práctica nº 19

curso 95-96

91. Una varilla AB homogénea de peso P y longitud L se mueve por un plano vertical de forma que A se mueve sin rozamiento sobre la parábola $y^2 = 2px$. Además sobre A y B actúan dos fuerzas horizontales constantes F_1 y F_2 (en el sentido positivo del eje x).

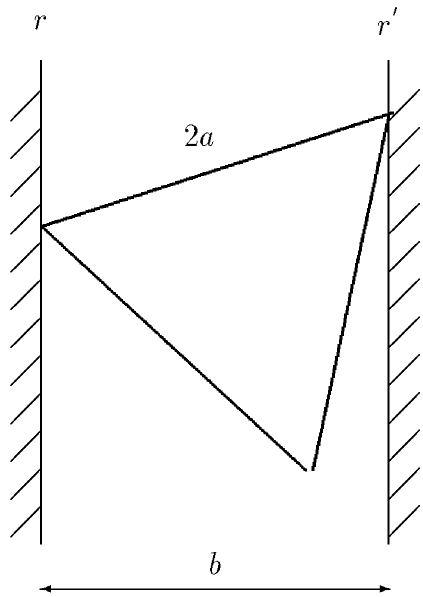
Se pide:

1. Determinar las posiciones de equilibrio.
2. Discutir la estabilidad.
3. Aplicar los resultados anteriores al caso particular

$$y^2 = 2x, \quad L = 1/4, \quad F_1 = F_2 = P$$

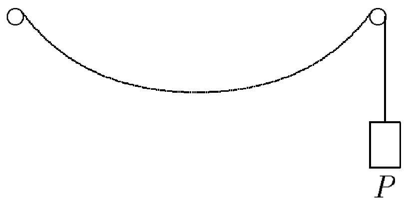
92. Una placa triangular equilátera, de lado $2a$ y peso P, se encuentra confinada en un plano vertical entre dos rectas verticales rugosas r y r' que distan entre sí una distancia b (por supuesto, se cumple siempre que $a\sqrt{3} < b < 2a$), de forma que se apoya contra ellas por sus dos vértices superiores quedando acodalada. Se pide:

1. Obtener el mínimo valor del coeficiente k de rozamiento al deslizamiento de forma que la placa permanezca en equilibrio, en función de a y de b.
2. Calcular el valor de las reacciones de r y r' en el supuesto de que el rozamiento tenga el valor mínimo arriba calculado, es decir, si la placa está en el límite de deslizamiento.
3. Demostrar que existe un valor mínimo k_0 del coeficiente de rozamiento que permite que la placa esté en equilibrio para cualquier valor de b dentro del rango especificado, y calcular k_0.

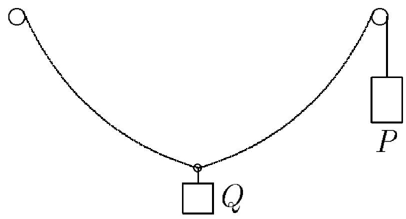


93. Un transbordador salva una luz de 549 m entre apoyos a igual altura, mediante un carro que circula colgado de cables guía, cada uno de los cuales pesa 3.47 kg/m. Los cables están fijos en un extremo y en el otro soportan un contrapeso de $P = 9070$ kg cada uno mediante una polea sin rozamiento. Se pide:

1. Flecha máxima que se produce cuando los cables están sometidos únicamente a su propio peso, admitiendo la hipótesis de que al estar muy tensos, se puede suponer la carga constante por unidad de abscisa horizontal.
2. Colgado de los cables circula un carro con una carga de $Q = 1058$ kg por cable. Se desea calcular la flecha que se produce cuando el carro está en el centro del vano, sin admitir la simplificación del punto anterior, debiendo considerarse el peso del cable constante por unidad de longitud del mismo.
   (a) Plantear las ecuaciones para el cálculo de la flecha, indicando claramente el proceso de resolución numérica a seguir.
   (b) Obtener el valor numérico de la flecha, resolviendo las ecuaciones anteriores. Para la resolución numérica puede tomarse como valor inicial de las iteraciones el parámetro de la catenaria $a = 2000$ m, o mejor aún, el valor de a que se deduce del apartado 1. Bastará con realizar dos iteraciones por Newton.



Cables sin carro



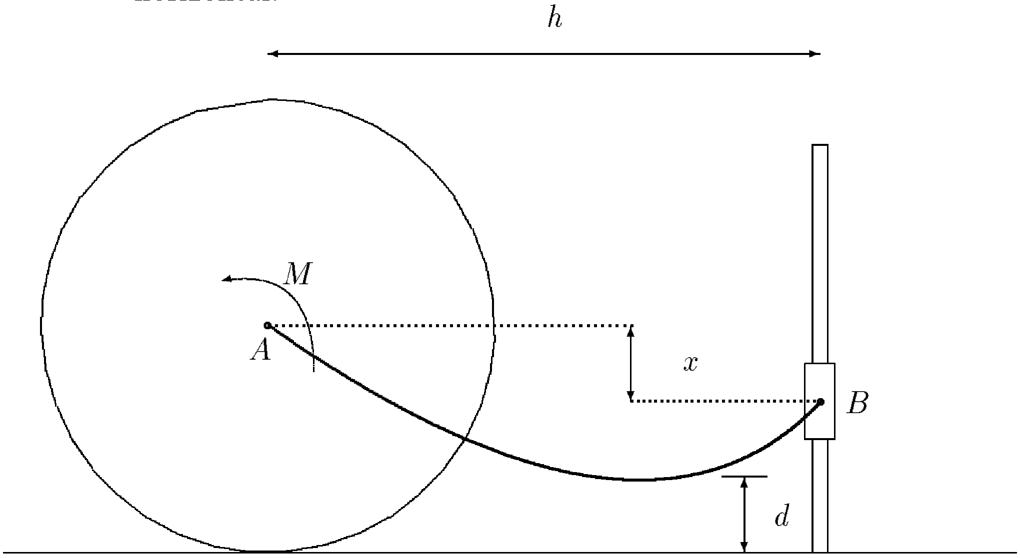
Cables cargados con carro

(NOTA: los datos corresponden al transbordador del Niágara (1916) del Ing. de Caminos Leonardo Torres Quevedo)

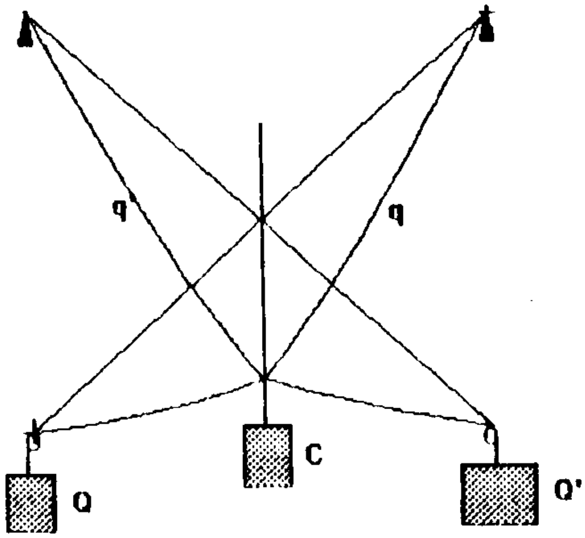
94. El sistema plano de la figura está formado por un disco de radio R, que rueda sin deslizar en todo momento sobre una recta horizontal. El disco lleva articulado en su centro A un cable de peso total P y longitud L. El otro extremo del cable, B, está obligado a moverse según una guía vertical rugosa, mediante una deslizadera sin peso. Sobre el disco actúa un par constante de valor $M = P\,R/2$.

Si el coeficiente de rozamiento entre la deslizadera y la guía vertical vale 0.5, admitiendo que el cable no llega a tocar a la recta horizontal, se pide calcular en la posición de equilibrio estricto:

1. Tensiones en los extremos del hilo.
2. Valores de x, h y d (ver figura).
3. Longitud máxima del hilo para que no llegue a tocar la recta horizontal.



95.



Un hilo homogéneo de peso unitario q salva un vano horizontal de longitud L. Otro hilo homogéneo de peso unitario q' salva un vano igual situado en un plano vertical ortogonal al del primer hilo. Para fijar su tensión, ambos hilos tienen uno de sus extremos pasando por una pequeña polea, para terminar unidos a contrapesos de valores respectivos

Q y Q'. Se puede despreciar el peso de hilo entre la polea y el contrapeso. Los puntos medios de los hilos, situados en la misma vertical, están unidos y soportan conjuntamente una carga aislada C. Se pide:

a. Plantear el sistema de ecuaciones que permita determinar la forma de equilibrio y la carga soportada por cada hilo.

b. Para el caso particular $Q/q = Q'/q'$, obtener el reparto de C entre los dos hilos.

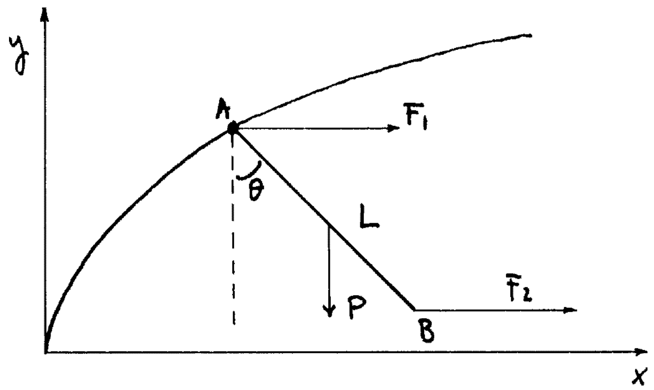
c. Aplicar el apartado 2 al caso numérico $Q = 40000\,\mathrm{kg}$, $q = 4\,\mathrm{kg/m}$, $C = 20000\,\mathrm{kg}$, $q' = 8\,\mathrm{kg/m}$, $L = 200\,\mathrm{m}$, hallando también la forma de los hilos en el equilibrio. Para ayuda de la resolución numérica se da el valor exacto de la abscisa del punto de la carga respecto del vértice de la catenaria, 1658.802649 m, y el aproximado del parámetro, 9840 m.

MECÁNICA

Práctica nº 19 curso 95-96

Soluciones

Ejercicio nº 91.-



La energía potencial, en función de las variables (y, θ), es:

$$\begin{aligned} V &= -F_1 x - F_2(x + L \operatorname{sen}\theta) + P\left(y - \frac{L}{2}\cos\theta\right) \\ &= P\left(y - \frac{L}{2}\cos\theta\right) - (F_1 + F_2)\frac{y^2}{2p} - F_2 L \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

siendo $x = \frac{y^2}{2p}$ Si hubiéramos definido V en función de (x, θ) existiría una indeterminación al tener que considerar las dos ramas de la parábola $y = \pm\sqrt{2px}$.

1.- Para el equilibrio se anulan las derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= P - (F_1 + F_2)\frac{y}{p} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{P\,p}{F_1 + F_2} \quad (> 0) \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} &= \frac{PL}{2}\operatorname{sen}\theta - F_2 L \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{2F_2}{P} \end{aligned}$$

(se obtienen dos soluciones para θ).

2.- Para la estabilidad se estudian las derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{F_1 + F_2}{p} \quad < 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = \frac{PL}{2}\cos\theta + F_2 L \operatorname{sen}\theta; \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial \theta} = 0$$

Al ser $\partial^2 V/\partial y^2 < 0$ no puede tratarse nunca de un mínimo del potencial, independientemente del valor las otras derivadas, ya que es imposible que la matriz sea definida positiva. Por lo tanto, las posiciones de equilibrio serán siempre inestables.

3.- Para los valores numéricos dados,

$$p = 1; \quad L = \frac{1}{4}; \quad F_1 = F_2 = P,$$

se obtienen las siguientes posiciones de equilibrio:

$$y = \frac{1}{2};$$

$$\tan\theta = \frac{2P}{P} = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \theta_1 = 1.107\text{rad} = 63.435° \\ \theta_2 = 4.249\text{rad} = 243.435° \end{cases}$$

Es decir, se trata de dos posiciones de equilibrio, ambas para $y = 1/2$, y las dos inestables.

Ejercicio nº 92.-

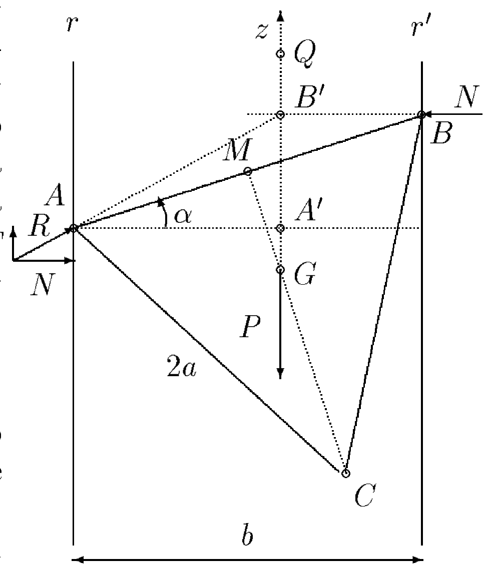
1.- La placa ABC debe quedar en equilibrio sometida a tres fuerzas: su peso P, la reacción $\boldsymbol{R}$ de la recta r sobre el vértice A, y la reacción $\boldsymbol{R}'$ de la recta r' sobre el vértice B (ver figura en la siguiente página). Según sabemos, es condición necesaria para el equilibrio que estas tres fuerzas sean concurrentes, por lo que deberán pasar por algún punto Q de la vertical Gz (recta de acción del peso P).

Ambas reacciones podrán descomponerse en:

- Una componente normal al enlace. Deberán ser iguales y opuestas, para la nulidad de fuerzas horizontales. Llamemos N a su módulo.

- Una componente tangencial. Su sentido, evidentemente, será ascendente, ya que la tendencia a deslizar provocada por el peso es descendente[1].

Es decir, la reacción $\boldsymbol{R}$ podrá pasar por algún punto de la semirrecta $A'z$, mientras que la reacción $\boldsymbol{R}'$ podrá pasar por algún punto de la semirrecta $B'z$, por lo que el punto Q deberá pertenecer a esta semirrecta $B'z$, que es la parte común a ambas zonas.



Está claro que según más alto esté Q, mayores serán las inclinaciones de ambas reacciones, por lo que será mayor el rozamiento necesario. Por lo tanto, el valor mínimo de éste corresponderá al punto más bajo posible, que es el B', con lo que no es necesario rozamiento en r' (siendo, por tanto, $T'=0$), pero en r hace falta un rozamiento de coeficiente $k = A'B'/AA'$.

$$A'B' = 2a \operatorname{sen} \alpha$$

$$AA' = AM \cos\alpha + MG \operatorname{sen}\alpha = a\cos\alpha + \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen}\alpha$$

siendo $\cos\alpha = b/2a$, con lo que en definitiva:

$$\boxed{k = \frac{2\sqrt{(4a^2-b^2)}}{b + \sqrt{(4a^2-b^2)}/\sqrt{3}}} \qquad (1)$$

2.- Llamando T a la componente tangencial de R, es inmediato ($\Sigma F_z = 0$) que $T = P$. Al estar en el límite de deslizamiento, $N = P/k$.

3.- Sin necesidad de proceder a cálculos analíticos, puede apreciarse que la posición más desfavorable que exige el máximo necesario de k se corresponde con el máximo de α (que origina simultáneamente el máximo de $A'B'$ y el mínimo de AA'), es decir, con el mínimo de b. En el límite éste vale

[1]Durante el examen pudimos observar que algunos alumnos orientaban la componente tangencial en B hacia abajo. Esto significaría que mientras el vértice A tiende a descender, el vértice B tiende a subir, lo cual no sólo resulta sorprendente, sino que implicaría que el lado AB “quiere” alargarse.

$b_{min} = a\sqrt{3}$ (debiendo ser en la práctica algo mayor, $b = a\sqrt{3} + \epsilon$, para que el triángulo quepa entre r y r'), con lo que

$$\boxed{k_{min} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Como comentario final, digamos que si el valor del rozamiento es suficiente, el equilibrio se presenta automáticamente, circunstancia que caracteriza el fenómeno del acodalamiento. Es decir, la condición necesaria de concurrencia de las fuerzas que señalábamos al principio, será también suficiente.

Es interesante también discutir el equilibrio cuando el rozamiento sea mayor que el estrictamente necesario, calculado en (1). En este caso el triángulo no estará en el límite de deslizamiento en ninguna de las dos rectas, sabiéndose únicamente que las reacciones tangenciales cumplen $T \leq \mu N$ y $T' \leq \mu N$.

Graficamente, diríamos que las reacciones $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{R}'$ se cortan en un punto de la semirrecta $B'z$ con la única restricción de que sus ángulos con la normal no superen al de rozamiento. En esta situación, el valor de las reacciones queda indeterminado: no existe un único valor de éstas que satisfaga las condiciones de equilibrio como sólido rígido.

Esta paradoja se resuelve en la práctica (en cuyo caso existirá un valor dado y por tanto único de las reacciones) porque entran en juego otras condiciones como la deformabilidad elástica de la placa y de los puntos de apoyo. El cálculo detallado de estos aspectos complicaría considerablemente el problema.

Ejercicio nº 93.-

El contrapeso P define la tensión del cable en el extremo, que es la tensión máxima soportada por el cable. Esta disposición asegura que el cable estará sometido siempre a la misma tensión, independientemente de que esté más o menos cargado por el carro, lo que permite garantizar su seguridad.

1.- Al considerarse el peso constante por unidad de abscisa horizontal, la configuración de equilibrio del cable es una parábola. Para resolverla, calculamos en primer lugar la tensión horizontal, teniendo en cuenta que la vertical en el extremo es $T_v = qL/2$:

$$T_0 = \sqrt{P^2 - (qL/2)^2} = 9019.85 \text{ kg}$$

y aplicando la ecuación de la parábola:

$$z = \frac{1}{2}\frac{q}{T_0}x^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = \frac{1}{2}\frac{q}{T_0}(L/2)^2 = 14.49\,\mathrm{m}}$$

OBSERVACIÓN.- Si no hubiéramos realizado la simplificación que propone el enunciado, el cable formaría una catenaria, de ecuación $z = a\cosh(x/a)$. Para obtener el valor de a se establece la tensión P en el extremo,

$$qa\cosh\left(\frac{L/2}{a}\right) = P.$$

Esta ecuación trascendente no se puede resolver directamente, siendo necesario emplear un método numérico iterativo. Empleando el método de Newton se obtiene $a = 2599.33\,\mathrm{m}$. Finalmente, la flecha calculada por este método sería $f = a\cosh\left((L/2)/a\right) - a = 14.51\,\mathrm{m}$, valor que es muy próximo al obtenido arriba para la parábola.

2.a.- Cuando el carro está en el medio del cable se producen dos arcos simétricos de catenaria. El vértice de cada una de estas catenarias está situado a una distancia α del punto medio, en principio desconocida. Para resolver el problema se precisa calcular tanto α como el parámetro a de la catenaria, para lo que se necesitan 2 ecuaciones.

La primera ecuación que se puede establecer es la tensión vertical del cable en el punto de suspensión del carro, que es igual a la mitad del peso del mismo (por simetría):

$$qa\,\mathrm{senh}\left(\frac{\alpha}{a}\right) = \frac{Q}{2} \tag{1}$$

Otra ecuación corresponde a la tensión del cable en el extremo, que seguirá valiendo P:

$$qa\cosh\left(\frac{\alpha + L/2}{a}\right) = P \tag{2}$$

Con estas 2 ecuaciones se puede plantear la resolución numérica simultánea de las mismas (2 ecuaciones con 2 incógnitas). Sin embargo, si el cálculo se realiza manualmente, es conveniente simplificar el sistema para eliminar una de las incógnitas y dejarlo reducido a una única ecuación. Esto se realiza fácilmente desarrollando el coseno hiperbólico de la suma en (2) y empleando (1) para eliminar α. La ecuación resultante, expresada como $\phi(a) = 0$, es

$$\phi(a) = \sqrt{(qa)^2 + (Q/2)^2}\cosh\left(\frac{L/2}{a}\right) + \frac{Q}{2}\,\mathrm{senh}\left(\frac{L/2}{a}\right) - P = 0 \tag{3}$$

Para obtener a, la ecuación anterior se puede resolver numéricamente por el método iterativo de Newton. Para las iteraciones se emplea la derivada de (3) que vale:

$$\frac{d\phi}{da} = \frac{q^2 a}{\sqrt{(qa)^2 + (Q/2)^2}} \cosh\left(\frac{L/2}{a}\right) +$$
$$\sqrt{(qa)^2 + (Q/2)^2}\left(-\frac{L/2}{a^2}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{L/2}{a}\right) + \frac{Q}{2}\left(-\frac{L/2}{a^2}\right)\cosh\left(\frac{L/2}{a}\right) \quad (4)$$

El proceso de resolución numérica sigue el esquema iterativo siguiente:

1. evalúa $\phi_n = \phi|_{a=a_n} = \phi(a_n)$ (ecuación (3))
   evalúa $\left(\frac{d\phi}{da}\right)_n = \left.\frac{d\phi}{da}\right|_{a=a_n}$ (ecuación (4))
2. $\Delta a_n = -\frac{\phi_n}{(d\phi/da)_n}$
   $a_{n+1} = a_n + \Delta a_n$
3. si $|\Delta a_n| > \epsilon$,
   $n \leftarrow n+1$; vuelve a 1.

2.b.- Es posible emplear el algoritmo anterior con la ayuda de una calculadora de bolsillo, bien manualmente o bien programando el método mediante el lenguaje de la calculadora (lenguajes de HP, Basic u otro cualquiera).

A continuación se detalla el resultado de las iteraciones mediante un programa realizado en basic, partiendo del valor inicial $a_0 = 2000$ m:

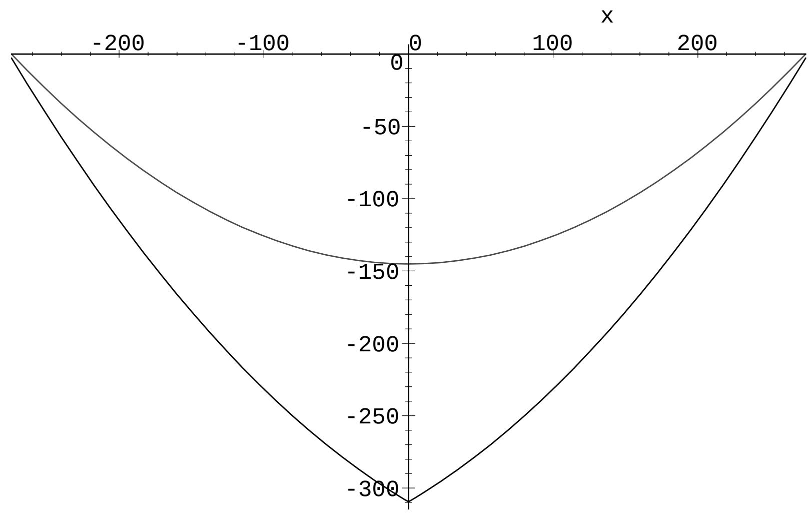
```
          Iteraciones:
          -----------
a= 2000       phi=-1971.375      (d/da)phi= 3.390196   da= 581.493
a= 2581.493   phi= 10.52168      (d/da)phi= 3.422276   da=-3.074467
a= 2578.418   phi= 8.567521E-04  (d/da)phi= 3.422162   da=-2.503541E-04

  ================================================================
  valor final: 2578.418    (error en phi= 8.567521E-04 )
  ================================================================
```

Como se ve, basta con 2 iteraciones para obtener un resultado prácticamente exacto.

Una vez conocido el valor de a, a partir de (1) se obtiene $\alpha = 152.36$ m. Finalmente, la flecha se calcula como diferencia de ordenadas entre el extremo y el centro:

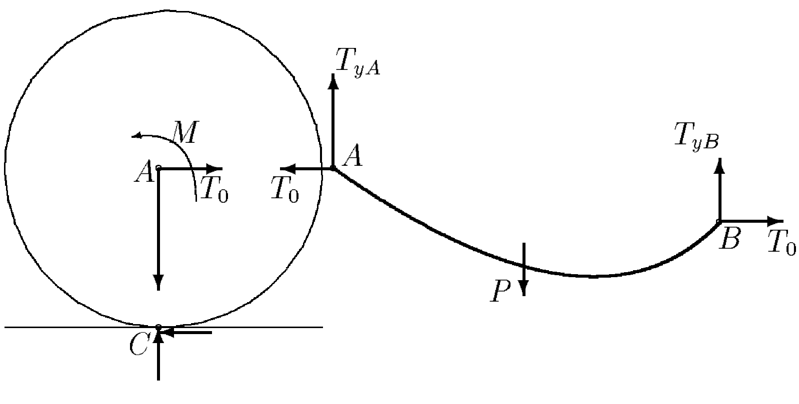
$$f = a\cosh\left(\frac{\alpha + L/2}{a}\right) - a\cosh\left(\frac{\alpha}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = 30.91\,\mathrm{m}}$$

El resultado se puede dibujar para comprobar la configuración del cable en ambos casos:



Ejercicio nº 94.-

1.- Consideramos en primer lugar el equilibrio en forma aislada del disco y del conjunto del cable. Sobre el disco además del momento aplicado M actúa la tensión del cable, de componentes (T_0, T_{yA}), su propio peso, y la reacción de la recta sobre la que rueda. Sobre el cable actúan las tensiones en A y B y su peso P.



La tensión horizontal del cable (T_0) se obtiene al imponer el equilibrio del disco, al anular el momento en el punto de contacto C:

$$T_0 R = M = \frac{PR}{2} \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{P}{2}.$$

Considerando que el enlace en el apoyo B está en la situación de equilibrio estricto, la reacción vertical es:

$$T_{yB} = 0.5\,T_0 = 0.25P$$

Planteando el equilibrio de fuerzas verticales del conjunto del cable:

$$T_{yA} + T_{yB} - P = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{yA} = 0.75P$$

En resumen, las tensiones en los extremos del cable son:

$$\begin{array}{lll} T_{xA} = \dfrac{P}{2}; & T_{yA} = \dfrac{3P}{4}; & T_A = \sqrt{T_{xA}^2 + T_{yA}^2} = \dfrac{\sqrt{13}}{4}P \\ T_{xB} = \dfrac{P}{2}; & T_{yB} = \dfrac{P}{4}; & T_B = \sqrt{T_{xB}^2 + T_{yB}^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{4}P \end{array}$$

2.- Entre A y B el cable forma una catenaria, de ecuación:

$$z = a\cosh\frac{x}{a}$$

donde el parámetro vale $a = \dfrac{T_0}{P/L} = \dfrac{L}{2}$. Las expresiones de la tensión vertical en A y B,

$$T_{yA} = \frac{P}{L}a\,\mathrm{senh}\,\frac{x_A}{a} = \frac{P}{2}\,\mathrm{senh}\,\frac{2x_A}{L}, \quad T_{yB} = \frac{P}{L}a\,\mathrm{senh}\,\frac{x_B}{a} = \frac{P}{2}\,\mathrm{senh}\,\frac{2x_B}{L},$$

permiten obtener la luz h entre apoyos:

$$h = |x_A| + |x_B| = \frac{L}{2}\left(\mathrm{argsenh}\,\frac{3}{2} + \mathrm{argsenh}\,\frac{1}{2}\right) = 0.837988L$$

Nótese que el resultado anterior se podía haber obtenido de otra forma empleando la relación de las ordenadas de la catenaria con la tensión total, $T = (P/L)a\cosh(x/a)$. En este caso la expresión resultante habría sido $h = (L/2)(\mathrm{argcosh}(\sqrt{13}/2) + \mathrm{argcosh}(\sqrt{5}/2))$, equivalente a la anterior.

El valor de x pedido es la diferencia de cotas en los apoyos:

$$x = z_A - z_B = \frac{T_A}{P/L} - \frac{T_B}{P/L} = \frac{L}{4}(\sqrt{13} - \sqrt{5}) = 0.342371L.$$

Por último, la distancia d se expresa como

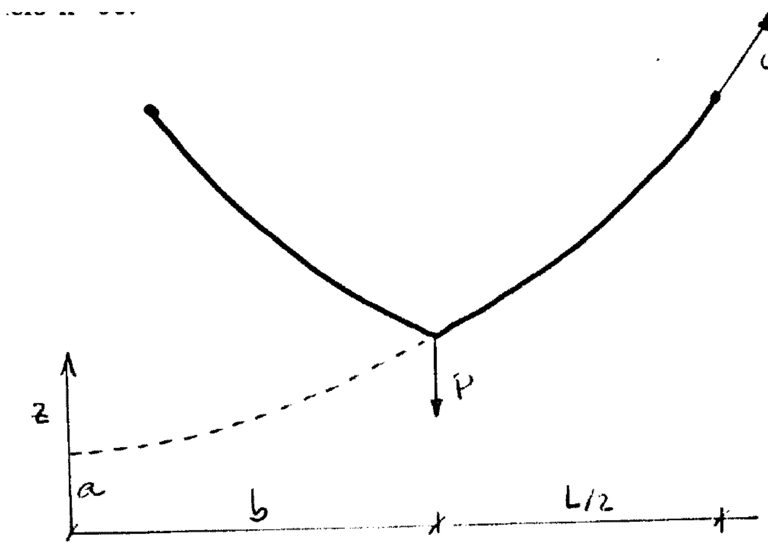
$$d = R - (z_A - a) = R - \frac{L}{2}\left(\frac{\sqrt{13}}{2} - 1\right)$$

3.- Para que el cable no toque la recta:

$$d > 0 \quad \Rightarrow \quad R > \frac{L}{2}\left(\frac{\sqrt{13}}{2} - 1\right) = 0.401388L.$$

Observación: Hagamos notar que en lo anterior se admite, tal y como se desprende de la figura, que el vértice de la catenaria se halla entre A y B. Cabría otra solución posible, si se considerara el vértice de la catenaria situado a la derecha de B, aunque esto sería contradictorio con la figura del enunciado como se ha dicho. En esta otra hipótesis la solución sería: $T_{yB} = 0.25P$ (sentido descendente), $T_{yA} = 1.25P$, $T_A = P\sqrt{29}/4$, $T_B = P\sqrt{5}/4$, $h = (L/2)(\text{argsenh}(5/2) - \text{argsenh}(1/2))$, $x = (L/4)(\sqrt{29} - \sqrt{5})$, y $d = R - (L/2)(\sqrt{29}/2 - 1)$.

Ejercicio nº 95.-



Se trata de dos catenarias, situadas en planos verticales perpendiculares entre sí, de las que podemos poner:

$$a \cosh \frac{b + L/2}{a} = \frac{Q}{q} \qquad (1)$$

$$a' \cosh \frac{b' + L/2}{a'} = \frac{Q'}{q'} \qquad (2)$$

siendo a, a' los parámetros de las catenarias y b, b' las abscisas de C respecto de los vértices.

La carga C se reparte entre las dos catenarias, soportando cada una P y P' respectivamente, de forma que

$$C = P + P'. \tag{3}$$

Considerando las ecuaciones de la tensión vertical en el punto de carga para cada catenaria,

$$\begin{aligned} a \operatorname{senh} \frac{b}{a} &= \frac{P}{2q}, & (4) \\ a' \operatorname{senh} \frac{b'}{a'} &= \frac{P'}{2q'}. & (5) \end{aligned}$$

Podemos expresar también la igualdad de flechas en el punto C de ambos cables,

$$a \left(\cosh \frac{b + L/2}{a} - \cosh \frac{b}{a} \right) = a' \left(\cosh \frac{b' + L/2}{a'} - \cosh \frac{b'}{a'} \right),$$

ecuación que se puede simplificar teniendo en cuenta (1) y (2), quedando

$$a \cosh \frac{b}{a} - a' \cosh \frac{b'}{a'} = \frac{Q}{q} - \frac{Q'}{q'}. \tag{6}$$

Resolviendo las ecuaciones (1), (2), (3), (4), (5), (6) se pueden hallar a, a', b, b', P, P', lo que contesta el apartado a.

Si es $Q/q = Q'/q'$, es inmediato que la solución con $a = a'$, $b = b'$, y $P/q = P'/q'$ satisface todas las ecuaciones. Por lo tanto el reparto de cargas es

$$P = C \frac{q}{q + q'}; \quad P' = C \frac{q'}{q + q'}.$$

El caso numérico conduce al reparto de cargas

$$P = \frac{20000}{3} = 6666.67\,\text{kg}; \quad P' = \frac{40000}{3} = 13333.33\,\text{kg}.$$

Las ecuaciones quedan reducidas a las dos siguientes:

$$\begin{aligned} a \cosh \frac{b + 100}{a} &= 10000 & (7) \\ a \operatorname{senh} \frac{b}{a} &= \frac{2500}{3} & (8) \end{aligned}$$

Sistema de 2 ecuaciones trascendentes con 2 incógnitas, que debe ser resuelto numéricamente por algún procedimiento iterativo.

Empleando el método de Newton con 2 variables, generalización directa del explicado en el ejercicio anterior para una variable, se establece el siguiente esquema iterativo:

1. $\left\{ \begin{array}{c} f_n \\ g_n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} f(u_n, v_n) \\ g(u_n, v_n) \end{array} \right\}$

2. $\left\{ \begin{array}{c} \Delta u_n \\ \Delta v_n \end{array} \right\} = - \left(\begin{array}{cc} \partial f/\partial u & \partial f/\partial v \\ \partial g/\partial u & \partial g/\partial v \end{array} \right)^{-1} \left\{ \begin{array}{c} f_n \\ g_n \end{array} \right\};$
   $\left\{ \begin{array}{c} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} u_n \\ v_n \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \Delta u_n \\ \Delta v_n \end{array} \right\}$

3. si $\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2} > \epsilon$,
   $n \leftarrow n + 1$; vuelve a 1.

Las incógnitas corresponden a $u \equiv a$; $v \equiv b$. Los valores de las funciones y sus derivadas son

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \cosh \frac{v+100}{u} - \frac{10000}{u} \\ g(u,v) &= \operatorname{senh} \frac{v}{u} - \frac{2500}{3u} \\ \frac{\partial f}{\partial u} &= -\frac{v+100}{u^2} \operatorname{senh} \frac{v+100}{u} + \frac{10000}{u^2} \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{1}{u} \operatorname{senh} \frac{v+100}{u} \\ \frac{\partial g}{\partial u} &= -\frac{v}{u^2} \cosh \frac{v}{u} + \frac{2500}{3u^2} \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{1}{u} \cosh \frac{v}{u} \end{aligned}$$

Los valores iniciales para el tanteo los tomamos de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} u_0 &\approx \frac{T_{max}}{q} = 10000 \\ v_0 &\approx \frac{T_v}{q} = 833 \end{aligned}$$

En tres iteraciones se alcanza la convergencia, como se detalla en la tabla 1.

Se incluye en hojas adjuntas el programa Quick-Basic empleado para la solución. El esquema explicado se puede programar también en calculadoras de bolsillo. Con objeto de reducir el número de operaciones en este último caso, puede ser aconsejable simplificar algo las ecuaciones mediante un sencillo cambio de variables, como por ejemplo $u = 100/a$; $v = b/a$. De esta manera es posible progamarlo dentro de una calculadora de memoria muy reducida, como la HP11c.

```
          Cálculo de raíces por el método de Newton
          =========================================

          Iteraciones:
          -----------
u= 10000      v= 833        du=-43.87827  dv=-.6393503
u= 9956.122   v= 832.3607   du= .1901054  dv= 2.741429E-03
u= 9956.313   v= 832.3634   du=-5.551514E-04            dv= 5.29683E-05
  ==============================================
  valores finales: (u,v)=( 9956.312 , 832.3635 )
  ==============================================
```

Tabla 1: *Iteraciones por el método de Newton para el problema 108*

Los resultados finales son pues

$$a = 9956.312\,\mathrm{m}; \qquad b = 832.3635\,\mathrm{m},$$

parámetros que son comunes a ambas catenarias.

```
REM Programa de resolución de ecuaciones trascendentes
REM Por el Método de Newton (2 variables)

DECLARE FUNCTION cosh! (x!)
DECLARE FUNCTION senh! (x!)

OPEN "380newt.DAT" FOR OUTPUT AS #1
PRINT ""
PRINT "          Cálculo de raíces por el método de Newton"
PRINT "          ==========================================="
PRINT ""
PRINT #1, ""
PRINT #1, "          Cálculo de raíces por el método de Newton"
PRINT #1, "          ==========================================="
PRINT #1, ""
PRINT "NOTA: Las funciones y sus derivadas se deben programar"
PRINT "en la subrutina Eval, con el formato:"
PRINT ""
PRINT TAB(20); ".(expresiones, cálculos auxiliares).."
PRINT TAB(20); "f =................................."
PRINT TAB(20); "g =................................."
PRINT TAB(20); "fu=................................."
PRINT TAB(20); "fv=................................."
PRINT TAB(20); "gu=................................."
PRINT TAB(20); "gv=................................."
PRINT ""

INPUT "valores iniciales de tanteo [1.0,1.0]"; u0, v0
IF u0 = 0 THEN u0 = 1!
IF v0 = 0 THEN v0 = 1!
INPUT "tolerancia [0.000001]"; eps
IF eps = 0 THEN eps = .000001

u = u0
v = v0
du = 10 ^ 6
dv = 10 ^ 6
uv = SQR(u ^ 2 + v ^ 2)
duv = SQR(du ^ 2 + dv ^ 2)
PRINT "          Iteraciones:"
PRINT "          -----------"
PRINT #1, "          Iteraciones:"
PRINT #1, "          -----------"
```

```
WHILE ABS(duv / uv) > eps
        GOSUB Eval
        det = fu * gv - fv * gu
        du = (-f * gv + g * fv) / det
        dv = (-g * fu + f * gu) / det
        PRINT "u="; u, "v="; v, "du="; du, "dv="; dv
        PRINT #1, "u="; u, "v="; v, "du="; du, "dv="; dv
        u = u + du
        v = v + dv
        uv = SQR(u ^ 2 + v ^ 2)
        duv = SQR(du ^ 2 + dv ^ 2)
WEND

PRINT ""
PRINT "===================================================================="
PRINT "  valores finales: (u,v)=("; u; ","; v; ")"
PRINT "===================================================================="
PRINT #1, ""
PRINT #1, "====================================================================
PRINT #1, "  valores finales: (u,v)=("; u; ","; v; ")"
PRINT #1, "====================================================================

SYSTEM
END

Eval:
        f = cosh((v + 100!) / u) - 10000! / u
        g = senh(v / u) - 2500! / (3! * u)
        fu = -((v + 100!) * senh((v + 100!) / u) - 10000!) / (u * u)
        fv = senh((v + 100!) / u) / u
        gu = -(v * cosh(v / u) - 2500! / 3!) / (u * u)
        gv = cosh(v / u) / u
RETURN

FUNCTION cosh (x)
cosh = (EXP(x) + EXP(-x)) / 2!
END FUNCTION

FUNCTION senh (x)
senh = (EXP(x) - EXP(-x)) / 2!
END FUNCTION
```