89. Una junta universal o de Cardan está formada por una cruceta rígida constituida por dos segmentos ortogonales CD y $C'D'$. Estos segmentos están unidos mediante articulaciones en sus extremos a los árboles AB y $A'B'$ respectivamente. El funcionamiento en régimen estático de la junta permite que un par M aplicado al árbol AB se transmita al árbol $A'B'$ como $M' \neq M$, transmitiendo así el movimiento de rotación a pesar del cambio de dirección de AB a $A'B'$. Se pide:

1. Si denominamos ϕ y ϕ' a los ángulos que forma el versor $\boldsymbol{k}$ perpendicular a la cruceta $CDC'D'$ con AB y $A'B'$ respectivamente, hallar la relación entre M y M' en función de estos ángulos.
2. Sea θ el ángulo girado por $ABCD$ alrededor de AB, medido a partir de la posición en que CD está en el plano de AB y $A'B'$, y α el ángulo entre AB y $A'B'$. Expresar la relación del apartado anterior en función de estos ángulos.

1.- Los vectores de posición de la partícula con respecto a los puntos A, B, C son:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{PA} &= (R-x)\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{PB} &= -x\boldsymbol{i} + (R-y)\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{PC} &= -x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + (R-z)\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

Incluyendo además el peso $(-mg\boldsymbol{k})$ la resultante de las fuerzas activas que actúan sobre la partícula vale:

$$\boldsymbol{F} = \frac{mg}{R}\left[(R-3x)\boldsymbol{i} + (R-3y)\boldsymbol{j} - 3z\boldsymbol{k}\right]$$

Además actúa la reacción de la superficie, dirigida según la normal a la esfera:

$$\boldsymbol{N} = N\,\underbrace{\frac{1}{R}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})}_{\boldsymbol{n}}$$

y $\boldsymbol{R}$, la fuerza de rozamiento de módulo:

$$R \leq \mu N$$

Las condiciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} &= N \\ F_t &= \sqrt{F^2 - N^2} \le \mu N \end{aligned}$$

operando:

$$\begin{aligned} N &= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{mg}{R^2}(-3R^2 + Rx + Ry) \\ \boldsymbol{N} &= \frac{mg}{R^3}(-3R^2 + Rx + Ry)(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ F^2 &= \frac{m^2g^2}{R^2}(11R^2 - 6Rx - 6Ry) \\ {F_t}^2 &= F^2 - N^2 = \frac{m^2g^2}{R^2}[2R^2 - (x+y)^2] \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación de equilibrio en el plano tangente resulta:

$$\frac{m^2g^2}{R^2}[2R^2 - (x+y)^2] \le \mu^2\frac{m^2g^2}{R^2}(-3R + x + y)^2,$$

es decir,

$$(x+y)^2(1+\mu^2) - 6R\mu^2(x+y) + R^2(9\mu^2 - 2) \ge 0. \tag{1}$$

Esta expresión se puede escribir de forma general:

$$f(x+y,\mu) \ge 0$$

Si no hay rozamiento, ($\mu = 0$), la condición se convierte en

$$(x+y)^2 - 2R^2 = 0,$$

que dentro de la esfera sólo se cumple en los puntos

$$E_1 = \left(\frac{\sqrt{2}R}{2}, \frac{\sqrt{2}R}{2}, 0\right); \quad E_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}R}{2}, -\frac{\sqrt{2}R}{2}, 0\right)$$

2.- La función $f(x+y,\mu)$ definida en (1) es una parábola de eje vertical en función de la abscisa $(x+y)$. Para que no haya puntos de inequilibrio $(f < 0)$ deberá tener un único punto de corte con el eje de abscisas entre los dos planos definidos por $(x+y) = \pm\sqrt{2}R$, tangentes a la esfera (figura 86.2). Por tanto $f = 0$ debe tener una raíz doble, por lo que

$$(6R\mu^2)^2 = 4(1+\mu^2)R^2(9\mu^2 - 2) \quad \Rightarrow \quad \mu = \sqrt{2/7}$$

Fig. 86.3

1.- Se trata de un problema de 2 grados de libertad. Como coordenadas generalizadas se adoptan los ángulos φ y θ (ver figura).

La condición de rodadura sin deslizamiento de la placa sobre el cilindro se puede expresar como:

$$BT = R\theta.$$

El potencial del sistema y sus derivadas valen:

$$V = Mg[R-(R-H)\cos\varphi]+mg[R(1+\cos(\theta+\varphi)+\theta\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi))+e\cos(\theta+\varphi)]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \varphi} &= Mg(R-H)\,\mathrm{sen}\,\varphi - mg(R+e)\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi) + mgR\theta\cos(\theta+\varphi) \\
\frac{\partial V}{\partial \theta} &= mgR\theta\cos(\theta+\varphi) - mge\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi)
\end{aligned}$$

Las derivadas se anulan en los puntos P_1 $(\theta = 0, \varphi = 0)$ y P_2 $(\theta = 0, \varphi = \pi)$, que corresponden a las posiciones de equilibrio del sistema. Para que pudiera producirse la segunda posición sería necesario suponer que la placa puede colocarse debajo del cilindro sin estorbar la rodadura del mismo.

2.- Las derivadas segundas del potencial resultan:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} &= Mg(R-H)\cos\varphi - mg(R+e)\cos(\theta+\varphi) - mgR\theta\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi) \\
\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} &= mg(R-e)\cos(\theta+\varphi) - mgR\theta\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi) \\
\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \delta\varphi} &= -mgR\theta\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi) - mge\cos(\theta+\varphi)
\end{aligned}$$

Para el punto P_1 $(\theta = 0, \varphi = 0)$ el valor de las derivadas segundas particularizadas es:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right|_{P_1} = Mg(R-H) - mg(R+e)$$
$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{P_1} = mg(R-e)$$
$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \delta \varphi}\right|_{P_1} = -mge$$

El equilibrio en este punto será estable si la matriz Hessiana es definida positiva, es decir, si se cumple en este caso:

$$R > e$$
$$M(R-H)(R-e) > mR^2$$

es decir, H debe ser menor que R (lo que siempre se cumple) y la relación $\frac{M}{m}$ debe ser suficientemente grande.

Por su parte, las derivadas segundas particularizadas para el punto P_2 $(\theta = 0, \varphi = \pi)$ resultan:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right|_{P_2} = Mg(H-R) + mg(R+e)$$
$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{P_2} = mg(e-R)$$
$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \delta \varphi}\right|_{P_2} = mge$$

Así el equilibrio será estable si se cumplen las condiciones:

$$e > R$$
$$M(H-R)(e-R) > mR^2$$

De ellas, la segunda condición es de imposible cumplimiento ya que necesariamente $H < R$ y por la primera, $e - R > 0$. Por tanto la posición de equilibrio P_2 es, como era de esperar, inestable en cualquier caso.

3.- En el caso $m = \frac{M}{2}, H = \frac{R}{2}$, la posición de equilibrio P_1 $(\theta = 0, \varphi = 0)$ es inestable para cualquier valor de e como se puede apreciar al sustituir en las condiciones de estabilidad del apartado anterior.

1.- Se trata de un problema de 2 grados de libertad. Como coordenadas generalizadas se adoptan los ángulos φ y θ (ver figura).

La posición del CDM del semiaro se puede obtener por aplicación de la primera regla de Guldin, resultando

$$d = 2a/\pi$$

Cálculo del potencial del sistema:

- Gravitatorio del aro:

$$V_1 = mg[a \operatorname{sen} \varphi - \frac{2a}{\pi} \cos \varphi]$$

- Gravitatorio de la partícula:

$$V_2 = mg[a \operatorname{sen} \varphi - a \cos \theta]$$

- Elástico del muelle:

$$V_3 = \frac{mg}{4a}[(2a - 2a \operatorname{sen} \varphi)^2 + 4a^2 \cos^2 \varphi] = 2mga(1 - \operatorname{sen} \varphi)$$

El potencial total del sistema vale por tanto:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{-mga}{\pi}(2 \cos \varphi + \pi \cos \theta - 2\pi)$$

Cálculo de las posiciones de equilibrio:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \theta} &= mga \operatorname{sen} \theta \\
\frac{\partial V}{\partial \varphi} &= \frac{2mga}{\pi} \operatorname{sen} \varphi
\end{aligned}$$

Por tanto las posiciones de equilibrio se reducen a $P_1\,(\theta = 0, \varphi = 0)$ y $P_2\,(\theta = 0, \varphi = \pi)$. Aunque matemáticamente posible, no se consideran las posiciones correspondientes a $\theta = \pi$ ya que físicamente la coordenada θ está restringida a los valores $\frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ Por su parte la matriz de derivadas segundas es:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} mga \cos \theta & 0 \\ 0 & \frac{2mga}{\pi} \cos \varphi \end{bmatrix}$$

a partir de ella se puede comprobar que la posición $P_1\,(\theta = 0, \varphi = 0)$ es de equilibrio estable ($\mathbf{D}$ definida positiva) y la posición $P_2\,(\theta = 0, \varphi = \pi)$ es de equilibrio inestable ($\mathbf{D}$ no es definida positiva).

2.- Para calcular las reacciones en la articulación se obliga a que la resultante de las fuerzas que actúan sobre el sistema sea nula:

- Sistema en la posición $P_1\,(\theta = 0, \varphi = 0)$:

$$\begin{aligned}
R_x &= \frac{mg}{2a} \sqrt{2}\, 2a \cos \frac{\pi}{4} = mg \;\; (\Rightarrow) \\
R_y &= 2mg - mg = mg \;\; (\Uparrow)
\end{aligned}$$

- Sistema en la posición $P_2\,(\theta = 0, \varphi = \pi)$:

$$\begin{aligned}
R_x &= -mg \;\; (\Leftarrow) \\
R_y &= mg \;\; (\Uparrow)
\end{aligned}$$

Ejercicio nº 89.-

1.- La cruceta $CDC'D'$ es un sólido rígido que tiene fijo el punto central O, intersección de los ejes fijos AB y $A'B'$. Denominamos $\boldsymbol{j}$ al versor unitario según $C'D'$ e $\boldsymbol{i}$ al versor según CD. El triedro $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ es una referencia solidaria a la cruceta. Por otra parte, denominamos $\boldsymbol{I}$ al versor fijo según el eje AB e $\boldsymbol{I}'$ al versor según $A'B'$.

Se puede interpretar el movimiento (infinitesimal) de la cruceta, desde el punto de vista del árbol $ABCD$, como un giro $\delta\theta$ alrededor de AB más un giro $\delta\alpha$ alrededor de CD:

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = \delta\theta\,\boldsymbol{I} + \delta\alpha\,\boldsymbol{i} \tag{1}$$

Haciendo lo mismo respecto del árbol $A'B'C'D'$,

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = \delta\theta'\boldsymbol{I}' + \delta\alpha'\boldsymbol{j}. \tag{2}$$

AB es normal a CD, luego pertenece al plano $ABC'D'$, normal a la cruceta por $C'D'$. Descomponiendo $\boldsymbol{I}$ en este plano en función del ángulo ϕ que forma con $\boldsymbol{k}$,

$$\boldsymbol{I} = -\operatorname{sen}\phi\boldsymbol{j} + \cos\phi\boldsymbol{k} \tag{3}$$

Similarmente, $A'B'$ e $\boldsymbol{I}'$ pertenecen al plano $CDA'B'$ normal a la cruceta, por lo que

$$\boldsymbol{I}' = \operatorname{sen}\phi'\boldsymbol{i} - \cos\phi'\boldsymbol{k} \tag{4}$$

Sustituyendo (3), (4) en (1), (2):

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\varphi} &= \delta\theta(-\operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{j} + \cos\phi\,\boldsymbol{k}) + \delta\alpha\,\boldsymbol{i} \\ \delta\boldsymbol{\varphi} &= \delta\theta'(\operatorname{sen}\phi'\,\boldsymbol{i} - \cos\phi'\,\boldsymbol{k}) + \delta\alpha'\,\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

e igualando componentes según $\boldsymbol{k}$,

$$\delta\theta\cos\phi = -\delta\theta'\cos\phi'$$

Sea $M\boldsymbol{I}$ el momento aplicado al eje AB, y $M'\boldsymbol{I}'$ el aplicado al $A'B'$. Por el principio de trabajos virtuales para desplazamientos $(\delta\theta\,\boldsymbol{I}, \delta\theta'\boldsymbol{I}')$

$$0 = \delta W = M\delta\theta + M'\delta\theta' = \left(M - M'\frac{\cos\phi}{\cos\phi'}\right)\delta\theta$$

al ser $\delta\theta$ arbitrario se llega a

$$\boxed{M\cos\phi' = M'\cos\phi}, \tag{5}$$

relación que liga los momentos aplicados en ambos ejes para el equilibrio.

2.- Los ángulos (ϕ, ϕ') que intervienen en (5) son variables con el giro de la junta, por lo que la ecuación (5) no proporciona una relación fija entre M y M' sino que es variable con el giro de la cruceta. Es posible calcular (ϕ, ϕ') a partir del ángulo α (fijo) que forman los ejes AB y $A'B'$ y del giro θ (variable) del eje AB.

Consideramos un triedro fijo $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$ donde $\boldsymbol{I}$ es el versor según AB, $\boldsymbol{K}$ según DC en el instante inicial y $\boldsymbol{J}$ es tal que los tres forman un triedro a derechas. En un instante genérico $\boldsymbol{j}$ (versor del triedro móvil) se puede descomponer como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{j} &= -\operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{I} + \cos\phi\,(\boldsymbol{I}\wedge\boldsymbol{i}) \qquad (6) \\ &= -\operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{I} + \cos\phi\cos\theta\,\boldsymbol{J} + \cos\phi\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{K} \end{aligned}$$

por otra parte

$$\boldsymbol{i} = -\cos\theta\,\boldsymbol{K} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{J} \qquad (7)$$

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j} = \cos\phi\,\boldsymbol{I} + \operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\boldsymbol{J} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{K} \qquad (8)$$

En el triedro fijo,

$$\boldsymbol{I}' = -\cos\alpha\,\boldsymbol{I} - \operatorname{sen}\alpha\,\boldsymbol{K}, \qquad (9)$$

La ecuación (4) indica que $\boldsymbol{I}'$ tiene una proyección sobre $\boldsymbol{i}$ que vale $(\operatorname{sen}\phi')$ y sobre $\boldsymbol{k}$ $(-\cos\phi')$. Expresando esto mediante las componentes en el triedro fijo dadas por (6), (7), (8) y (9):

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{I}'\cdot\boldsymbol{k} &= \cos\alpha\cos\phi + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \boldsymbol{I}'\cdot\boldsymbol{i} &= \operatorname{sen}\alpha\cos\theta \end{aligned}$$

Por lo que se obtienen las relaciones

$$\cos\alpha\cos\phi + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta = \cos\phi', \qquad (10)$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\theta = \operatorname{sen}\phi', \qquad (11)$$

que permiten calcular (ϕ, ϕ') a partir de (θ, α). Como comprobación, podemos verificar que en las posiciones particulares $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ las ecuaciones dan el valor adecuado:

1. $\theta = 0$

   de (11): $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\phi' \quad \Rightarrow \quad \alpha = \phi'$

   de (10): $\cos\alpha\cos\phi = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \phi = 0$

2. $\theta = \pi/2$

   de (11): $0 = \operatorname{sen}\phi' \quad \Rightarrow \quad \phi' = 0$

   de (10): $\cos\alpha\cos\phi + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\phi = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi = \alpha$

Valores que es fácil comprobar que son correctos.

1.- Se trata de un sistema de 1 grado de libertad. Para estudiarlo se puede emplear la coordenada φ definida en un sistema de coordenadas móvil Oxy, no inercial, que gira con el plano de la varilla y el disco con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega} = \omega\, \boldsymbol{j}$.

Al ser un sistema no inercial, al estudiar el equilibrio es preciso tener en cuenta las fuerzas de inercia. Así, para un punto cualquiera del sólido, de posición $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$) se tiene:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{arr} &= \ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{o}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}) = -\omega^2 x\boldsymbol{i} \\
\boldsymbol{a}_{cor} &= 2\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\boldsymbol{r}} = -2\omega\dot{x}\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

La fuerza de inercia correspondiente a la aceleración de Coriolis, que actúa en todo momento en dirección perpendicular al plano xy se verá equilibrada por la correspondiente reacción en el eje de giro y por tanto no es necesario considerarla al estudiar el equilibrio relativo.

Por su parte, la fuerza de inercia correspondiente a la aceleración de arrastre toma en cada elemento de masa de posición (x, y) en el sistema el valor:

$$d\boldsymbol{F}_{arr} = \omega^2 x\; dm\; \boldsymbol{i}$$

expresión que como se ve deriva de un potencial:

$$dV_{arr} = -\frac{\omega^2}{2} x^2\; dm$$

y al integrar para todo el cuerpo:

$$V_{arr} = -\frac{\omega^2}{2} I_{yy} = -\frac{\omega^2}{2}\left[\frac{1}{3} mR^2 \operatorname{sen}^2\varphi + mR^2 (\frac{1}{4} + 4\operatorname{sen}^2\varphi)\right]$$

Al añadir el potencial gravitatorio se tiene el potencial del sistema:

$$V = -\frac{\omega^2}{2} mR^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{13}{3}\operatorname{sen}^2\varphi\right) - \frac{5}{2} mgR\cos\varphi$$

Las posiciones de equilibrio corresponden a los valores extremos del potencial, es decir:

$$\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{\omega^2}{2} mR^2 \left(\frac{13}{3} 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\right) + \frac{5}{2} mgR\operatorname{sen}\varphi = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtienen los valores:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2 &= \pi \\ \varphi_3 &= arcos\left(\frac{15g}{26\omega^2 R}\right) \end{aligned}$$

2.- Para discutir la estabilidad del equilibrio es necesario comprobar cúales de las posiciones anteriores corresponden a mínimos del potencial:

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2} = \frac{-13}{3}\omega^2 mR^2 \cos 2\varphi + \frac{5}{2} mgR\cos\varphi$$

- Posición $\varphi_1 = 0$:

$$\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi_1} = \frac{-26\omega^2 mR^2 + 15mgR}{6}$$

-Equilibrio estable si: $\omega^2 < \frac{15g}{26R}$

-Equilibrio inestable si: $\omega^2 > \frac{15g}{26R}$

-En el caso $15g = 26\omega^2 R$ el equilibrio es estable ya que:

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^3V}{d\varphi^3}\right|_{\varphi_1} &= 0 \\ \left.\frac{d^4V}{d\varphi^4}\right|_{\varphi_1} &= 13\omega^2 mR^2 \ \ (>= 0) \end{aligned}$$

- Posición $\varphi_2 = \pi$:

$$\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi_2} = \frac{-26\omega^2 mR^2 - 15mgR}{6}$$

luego el equilibrio es inestable en cualquier caso.

- Posición $\varphi_3 = arcos\frac{15g}{26\omega^2 R}$:

$$\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi_3} = \frac{m}{156}\,\frac{-225g^2 + 676\omega^4 R^2}{\omega^2}$$

El equilibrio es estable en cualquier caso ya que:

- Si: $\omega^2 > \frac{9g}{26R}$ la derivada segunda del potencial es positiva.

- La condición: $\omega^2 < \frac{9g}{26R}$ no puede darse ya que en ese caso el argumento de $arcos\frac{15g}{26\omega^2 R}$ sería mayor que 1 lo cual no es posible.

-La condición $9g = 26\omega^2 R$ no se considera ya que obliga a que $\cos\varphi = 0$, es decir, es una repetición del caso φ_1.