MECÁNICA

Práctica n$^{\underline{o}}$ 16 curso 95-96

76. El sistema material de la figura, situado en un plano vertical, está constituido por la varilla rectilínea AB, homogénea y pesada, de masa m y longitud a, y por un disco homogéneo y pesado de centro G, con masa m y radio R.

Los extremos C y D de dos varillas iguales AC y BD, sin masa y de longitud a, se articulan en dos puntos fijos del plano vertical situados sobre una misma horizontal a distancia a, mientras que los otros extremos A y B se articulan en los extremos de la varilla AB.

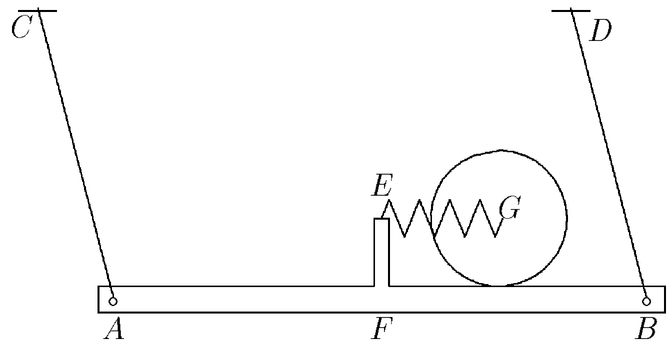
Una varilla EF sin masa, de longitud R, se une rígidamente al punto medio F de AB.

Los extremos de un muelle de longitud natural cero y constante de rigidez k se unen a los puntos E y G.

El sistema se mueve en el plano vertical, girando las varillas AC y BD alrededor de C y D respectivamente y rodando sin deslizar el disco sobre la varilla AB.

Se pide:

1. Calcular la energía cinética del sistema.
2. Calcular la energía potencial del sistema.
3. Plantear las ecuaciones que determinan el movimiento del sistema.
4. Estudiar los pequeños movimientos del sistema alrededor de la posición de equilibrio estable.



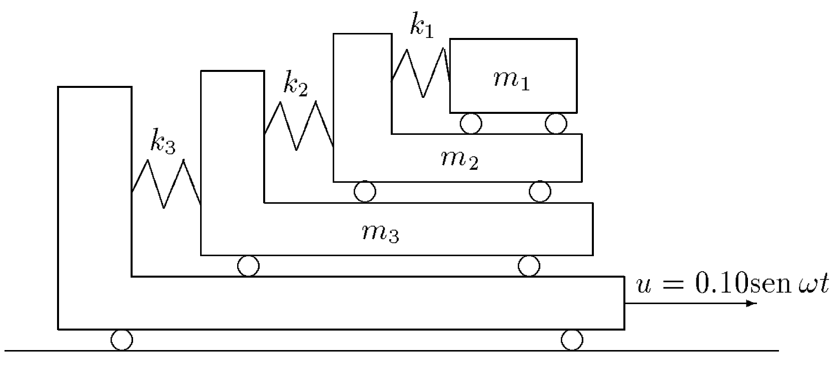
77. Se considera un semiaro C, de radio a, homogéneo, pesado y de masa m, que está contenido en un plano vertical y puede rodar sin deslizar sobre una recta horizontal fija. Sobre el semiaro y sin abandonarlo, puede deslizar sin rozamiento un punto material M, pesado y de masa m. Se pide:

1. Analizar el conjunto de fuerzas que actúan sobre el semiaro y sobre el punto, así como los grados de libertad del sistema.
2. Calcular en un instante arbitrario la energía cinética y la función potencial de la que derivan las fuerzas.
3. Plantear las ecuaciones diferenciales que determinan el movimiento del sistema para condiciones iniciales arbitrarias. Analizar la existencia de integrales primeras.
4. Estudiar los pequeños movimientos del sistema alrededor de la posición de equilibrio estable.

78. Un disco homogéneo de masa M y radio r, rueda sin deslizar apoyándose sobre la parte interior de una circunferencia fija de radio R. En el centro O del disco está articulada una varilla OA recta, homogénea, de masa m y longitud $2a$ que puede moverse, girando alrededor de O, dentro del plano vertical. Estudiar los pequeños movimientos de este sistema alrededor de su posición de equilibrio estable.

Para el cálculo de las frecuencias supóngase $M = 2m$, $a = r$ y $R = 2r$

79. Tres carretones de masas $m_1 = 100\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 200\,\mathrm{kg}$, y $m_3 = 400\,\mathrm{kg}$ están unidos entre sí por resortes lineales de constantes $k_1 = 10^5\,\mathrm{N/m}$, $k_2 = 2\times 10^5\,\mathrm{N/m}$, y $k_3 = 4\times 10^5\,\mathrm{N/m}$ según indica la figura, pudiendo desplazarse según una dirección horizontal sin resistencias pasivas. Al carretón inferior se le aplica un desplazamiento impuesto, definido por una ley armónica de amplitud 0.10 m y frecuencia angular ω igual al 90% de la mayor de las frecuencias propias del sistema.



Se pide:

1. Frecuencias propias del sistema.
2. Modos normales de vibración (vectores propios), expresión de las coordenadas normales y ecuaciones del movimiento en estas coordenadas.
3. Supuesto que existe un amortiguamiento muy pequeño pero que al cabo del tiempo hace que el movimiento alcance un régimen permanente, expresar el movimiento en dicho régimen.
4. En el supuesto anterior, calcular el máximo esfuerzo soportado por el muelle inferior.

Nota: para abreviar los cálculos se puede utilizar el dato de que una de las frecuencias propias es 18.126 rad/s.

80. Un conjunto de 3 péndulos simples iguales, de longitud l y masa puntual m cada uno, oscilan en un plano vertical. Se hallan sujetos entre sí por 2 resortes iguales de constante k cada uno, en dirección horizontal y a una altura a por debajo del punto de suspensión, de forma que en la posición de equilibrio no ejercen fuerza alguna. Se pide:

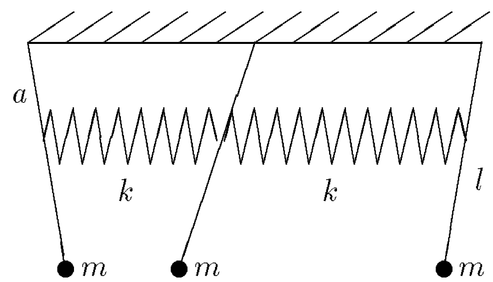
a. Ecuaciones del movimiento y su linealización para pequeñas oscilaciones.

b. Frecuencias y modos propios de vibración del sistema.

c. Expresión de las coordenadas normales.

d. Integración de las ecuaciones para las condiciones iniciales siguentes:

$$(\theta_1)_0 = (\theta_2)_0 = (\theta_3)_0 = 0$$
$$(\dot{\theta}_1)_0 = 2; (\dot{\theta}_2)_0 = 1; (\dot{\theta}_3)_0 = 0$$

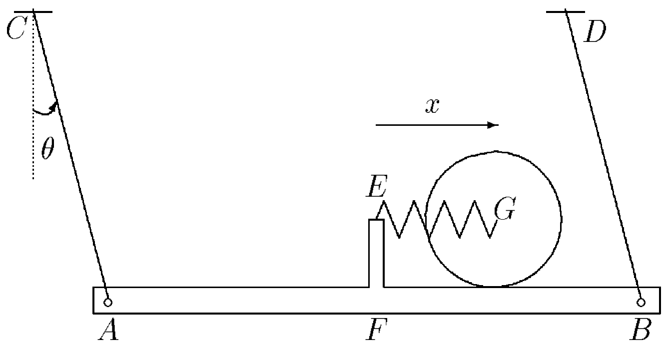


MECÁNICA

Práctica n$^{\underline{o}}$ 16 curso 95-96

Soluciones

Ejercicio n$^{\underline{o}}$ 76.-



1.- Tomamos como coordenadas generalizadas:

$\theta =$ Angulo que forma AC con la vertical.

$x =$ Desplazamiento horizontal del centro del disco relativo al punto E.

La energía cinética de la varilla AB es

$$T_{AB} = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2$$

La energía cinética del disco es

$$\begin{aligned} T_d &= \frac{1}{4} m R^2 \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{3}{2}\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) \end{aligned}$$

La energía cinética del sistema resulta

$$T = T_{AB} + T_d = \frac{1}{2} m \left(\frac{3}{2}\dot{x}^2 + 2a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

2.- Las fuerzas que actúan sobre el sistema son los pesos y la fuerza del muelle EG. El potencial de estas fuerzas es

$$V = -2mga\cos\theta + \frac{1}{2}kx^2$$

3.- La función Lagrangiana es:

$$L = T + V = \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{2}\dot{x}^2 + 2a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + 2mga\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2$$

Las ecuaciones diferenciales del movimiento se obtienen haciendo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

que operando dan:

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + ma\ddot{\theta}\cos\theta - ma\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + kx = 0 \qquad (1)$$

$$2ma^2\ddot{\theta} + ma\ddot{x}\cos\theta + 2mga\operatorname{sen}\theta = 0 \qquad (2)$$

4.- La posición de equilibrio estable es la correspondiente a $x = 0$, $\theta = 0$. Para linealizar las ecuaciones (1) y (2) hacemos:

$$\begin{aligned} \cos\theta &\approx 1 \\ \operatorname{sen}\theta &\approx \theta \end{aligned}$$

y despreciamos los infinitésimos de orden 2 o superior:

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2}m\ddot{x} + ma\ddot{\theta} + kx = 0 \\ &ma\ddot{x} + 2ma^2\ddot{\theta} + 2mga\theta = 0 \end{aligned}$$

La matriz de masas y de rigidez son respectivamente:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3/2m & ma \\ ma & 2ma^2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 2mga \end{pmatrix}$$

Para obtener las frecuencias propias del movimiento solucionamos

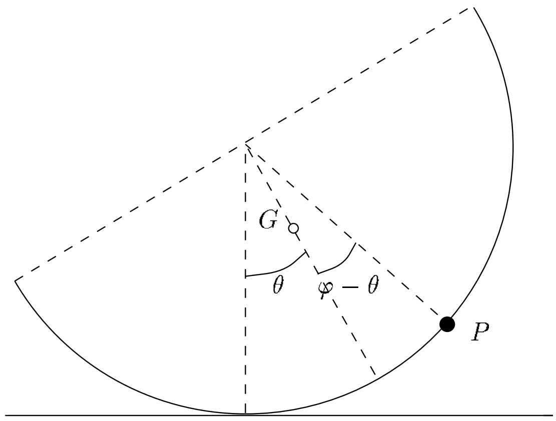
$$|-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}| = 0$$

resultando

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{2ak + 3mg}{4ma} + \frac{\sqrt{4a^2k^2 + 9m^2g^2 - 4mgak}}{4ma} \\ \omega_2^2 &= \frac{2ak + 3mg}{4ma} - \frac{\sqrt{4a^2k^2 + 9m^2g^2 - 4mgak}}{4ma} \end{aligned}$$

Ejercicio nº 77.-

1.-



El sistema tiene dos grados de libertad. Tomaremos como coordenadas generalizadas:

θ = ángulo girado por el semiaro, positivo en sentido antihorario.

φ = ángulo girado por la recta que une el centro del semiaro con la masa puntual, medido respecto de la vertical, positivo en sentido antihorario.

2.- La energía cinética del semiaro es:

$$\begin{aligned} T_s &= \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mV_G^2 \\ &= \frac{1}{2}(ma^2 - m|\mathbf{OG}|^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(m\dot{\theta}^2a^2 + \dot{\theta}^2|\mathbf{OG}|^2 - 2\dot{\theta}^2a|\mathbf{OG}|\cos\theta) \end{aligned}$$

y la de la partícula:

$$T_m = \frac{1}{2}m(\dot{\theta}^2a^2 + \dot{\varphi}^2a^2 - 2a^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi)$$

Teniendo en cuenta que $|\mathbf{OG}| = 2a/\pi$, la energía cinética del sistema es:

$$T = T_s + T_m = \frac{3}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{2ma^2}{\pi}\dot{\theta}^2\cos\theta + \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 - ma^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

Tomando como nivel de referencia la horizontal que pasa por O:

$$V = -mg\frac{2a}{\pi}\cos\theta - mga\cos\varphi$$

3.- La función Lagrangiana es:

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{3}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{2ma^2}{\pi}\dot{\theta}^2\cos\theta + \\ &\quad \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 - ma^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{2mga}{\pi}\cos\theta + mga\cos\varphi \end{aligned}$$

Operando, se obtienen las ecuaciones de Lagrange:

$$\begin{aligned} 0 &= 3ma^2\ddot{\theta} - \frac{4ma^2}{\pi}\ddot{\theta}\cos\theta + \frac{2ma^2}{\pi}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + ma^2\ddot{\varphi}\cos\varphi + ma^2\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi + \\ &\quad + \frac{2mga}{\pi}\operatorname{sen}\theta \qquad (1) \\ 0 &= ma^2\ddot{\varphi} + ma^2\ddot{\theta}\cos\varphi + mga\operatorname{sen}\varphi \qquad (2) \end{aligned}$$

Dado que todas las fuerzas aplicadas que trabajan son conservativas, la conservación de la energía ($E = T + V = \text{cte}$) es una integral primera del movimiento. Ninguna de las coordenadas tomadas es cíclica.

4.- La posición de equilibrio estable corresponde a $\theta = 0$, $\varphi = 0$. Para linealizar las ecuaciones (1) y (2) hacemos:

$$\operatorname{sen}\theta \approx \theta,\ \operatorname{sen}\varphi \approx \varphi,\ \cos\theta \approx 1,\ \cos\varphi \approx 1$$

y despreciamos los infinitésimos de segundo orden y superiores. Con esto resulta:

$$\left(3 - \frac{4}{\pi}\right)ma^2\ddot{\theta} + ma^2\ddot{\varphi} + \frac{2mga}{\pi}\theta = 0 \qquad (3)$$

$$ma^2\ddot{\theta} + ma^2\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0 \qquad (4)$$

Expresando el sistema de ecuaciones (3) y (4) en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} (3-4/\pi)ma^2 & ma^2 \\ ma^2 & ma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2mga/\pi & 0 \\ 0 & mga \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, las matrices de masas y de rigidez son respectivamente:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} (3-4/\pi)ma^2 & ma^2 \\ ma^2 & ma^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2mga/\pi & 0 \\ 0 & mga \end{pmatrix}$$

El movimiento se puede describir mediante dos modos normales de oscilación, cuyas frecuencias propias se obtienen haciendo

$$|-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}| = 0$$

y resultan:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 2.95556\frac{g}{a} \\ \omega_2^2 &= 0.2476\frac{g}{a} \end{aligned}$$

Ejercicio nº 78.-

El sistema tienen dos grados de libertad. Llamando O' al centro de la circunferencia, los grados de libertad que se emplearán son:

θ = ángulo que forma OO' con la vertical, positivo en sentido antihorario.

φ = ángulo que forma la varilla con la vertical, también positivo en sentido antihorario.

Para calcular la energía cinética del disco, necesitamos conocer su velocidad angular ω. Esta la calculamos igualando la velocidad del punto O considerando el giro de O alrededor de O' y la rotación instantánea alrededor de su centro instantáneo de rotación:

$$\left.\begin{array}{l} v_O = \dot{\theta}(R-r) \\ v_O = -\omega r \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \omega = -\frac{R-r}{r}\dot{\theta}$$

Con esto, la energía cinética del disco es:

$$T_d = \frac{1}{2}M\dot{\theta}^2(R-r)^2 + \frac{1}{4}Mr^2\left(\frac{R-r}{r}\dot{\theta}\right)^2$$

y la de la varilla

$$T_v = \frac{1}{2}m[\dot{\varphi}^2a^2 + \dot{\theta}^2(R-r)^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}a(R-r)\cos(\varphi-\theta)] + \frac{1}{6}ma^2\dot{\varphi}^2$$

Para calcular el potencial, tomamos como nivel de referencia la horizontal por O':

$$V = -Mg(R-r)\cos\theta - mg[(R-r)\cos\theta + a\cos\varphi]$$

La función Lagrangiana es:

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{3}{4}M(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left[\frac{4}{3}a^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2(R-r)^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}a(R-r)\cos(\varphi-\theta)\right] + \\ &\quad Mg(R-r)\cos\theta + mg[(R-r)\cos\theta + a\cos\varphi] \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Lagrange son:

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2}M(R-r)^2\ddot{\theta} + m(R-r)^2\ddot{\theta} + ma(R-r)\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta) - \\ &ma(R-r)\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}(\varphi-\theta) + Mg(r-r)\operatorname{sen}\theta + mg(R-r)\operatorname{sen}\theta = 0 \ (1) \end{aligned}$$

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot{\varphi} + ma\ddot{\theta}(R-r)\cos(\varphi-\theta) + ma(R-r)\dot{\theta}^2\operatorname{sen}(\varphi-\theta) + mga\operatorname{sen}\varphi = 0 \ \ (2)$$

Para linealizar las ecuaciones (1) y (2) sustituimos el seno por el arco y el coseno por uno, despreciando los infinitésimos de orden 2 o superior:

$$\left(\frac{3}{2}M+m\right)(R-r)^2\ddot{\theta}+ma(R-r)\ddot{\varphi}+(M+m)g(R-r)\theta=0 \qquad (3)$$

$$ma(R-r)\ddot{\theta}+\frac{4}{3}ma^2\ddot{\varphi}+mga\varphi=0 \qquad (4)$$

Particularizando (3) y (4) para $M=2m$, $a=r$, $R=2r$:

$$\begin{aligned} 4mr^2\ddot{\theta}+mr^2\ddot{\varphi}+3mgr\theta &= 0 \\ mr^2\ddot{\theta}+\frac{4}{3}mr^2\ddot{\varphi}+mgr\varphi &= 0 \end{aligned}$$

Las matrices de masas y rigidez son, respectivamente:

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 4mr^2 & mr^2 \\ mr^2 & \frac{4}{3}mr^2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{K}=\begin{pmatrix} 3mgr & 0 \\ 0 & mgr \end{pmatrix}$$

Las frecuencias propias del sistema se obtienen solucionando:

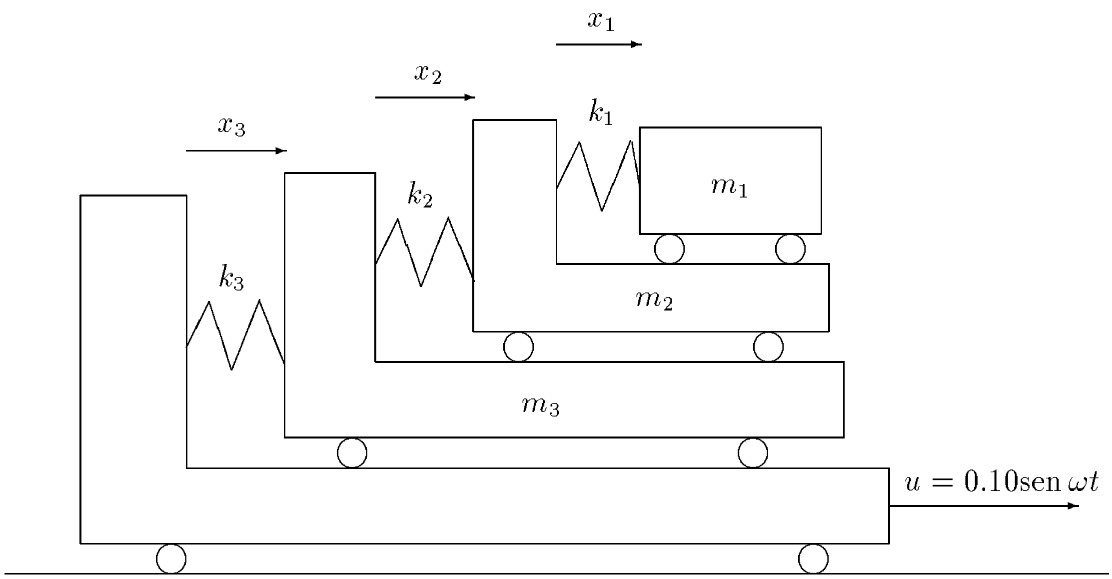
$$|-\omega^2\mathbf{M}+\mathbf{K}|=0$$

y valen:

$$\omega_1^2=\frac{12+3\sqrt{3}}{13}\frac{g}{r}; \qquad \omega_2^2=\frac{12-3\sqrt{3}}{13}\frac{g}{r}$$

El movimiento del sistema viene definido por dos modos normales de oscilación, cada uno de ellos vibrando con su correspondiente frecuencia propia.

Ejercicio nº 79.-



1.- Tomamos como coordenadas libres las elongaciones de los muelles x_1, x_2 y x_3. La Lagrangiana es

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_3\left(\dot{x}_3 + a\omega\cos\omega t\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2 + \dot{x}_3 + a\omega\cos\omega t\right)^2 + \\ & \quad \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3 + a\omega\cos\omega t\right)^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2x_2^2 - \frac{1}{2}k_3x_3^2. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Lagrange resultan

$$\begin{aligned} 100\ddot{x}_1 + 100\ddot{x}_2 + 100\ddot{x}_3 + 10^5x_1 &= 10\omega^2\operatorname{sen}\omega t \\ 100\ddot{x}_1 + 300\ddot{x}_2 + 300\ddot{x}_3 + 2\times 10^5x_2 &= 30\omega^2\operatorname{sen}\omega t \\ 100\ddot{x}_1 + 300\ddot{x}_2 + 700\ddot{x}_3 + 4\times 10^5x_3 &= 70\omega^2\operatorname{sen}\omega t \end{aligned}$$

que como vemos constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Para calcular las frecuencias propias suponemos soluciones armónicas del tipo

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}\right\}\operatorname{sen}\Omega t \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{array}\right\} = -\left\{\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}\right\}\Omega^2\operatorname{sen}\Omega t.$$

Lo cual, sustituido en las ecuaciones homogeneizadas correspondientes a las vibraciones libres, da lugar al sistema de ecuaciones lineales homogéneo

$$\left(\begin{array}{ccc} 1000-\Omega^2 & -\Omega^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & 2000-3\Omega^2 & -3\Omega^2 \\ -\Omega^2 & -3\Omega^2 & 4000-7\Omega^2 \end{array}\right)\left\{\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}.$$

La ecuación característica para obtener las frecuencias propias resulta de anular el determinante de la matriz de coeficientes:

$$-8\Omega^6 + 3.2\,10^4\Omega^4 - 3.4\,10^7\Omega^2 + 8\,10^9 = 0$$

Eliminando de esta ecuación la solución dada en el enunciado $\Omega_1 = 18.126\,\mathrm{rad/s}$, se obtienen las otras dos frecuencias propias:

$$\Omega_2 = 35.562\,\mathrm{rad/s},\ \Omega_3 = 49.059\,\mathrm{rad/s}$$

2.- Para obtener los vectores propios, se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$(-\Omega_i^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\cdot\{\mathbf{b}_i\} = 0$$

para cada una de las frecuencias propias calculadas. Los vectores obtenidos son:

$$\begin{aligned} ||\mathbf{b}_1|| &= (1, 1.171, 0.872) \\ ||\mathbf{b}_2|| &= (1, 0.235, -0.445) \\ ||\mathbf{b}_3|| &= (1, -0.907, 0.322) \end{aligned}$$

Los modos normales de oscilación se obtienen normalizando respecto de la matriz de masas los vectorios propios calculados:

$$
\begin{aligned}
||\mathbf{a}_1|| &= \frac{||\mathbf{b}_1||}{\sqrt{||\boldsymbol{b}_1|| \cdot \mathsf{M} \cdot \{\boldsymbol{b}_1\}}} = (0.22, 0.258, 0.192) \\
||\mathbf{a}_2|| &= \frac{||\mathbf{b}_2||}{\sqrt{||\boldsymbol{b}_2|| \cdot \mathsf{M} \cdot \{\boldsymbol{b}_2\}}} = (0.816, 0.192, -0.363) \\
||\mathbf{a}_3|| &= \frac{||\mathbf{b}_3||}{\sqrt{||\boldsymbol{b}_3|| \cdot \mathsf{M} \cdot \{\boldsymbol{b}_3\}}} = (0.887, -0.804, 0.286)
\end{aligned}
$$

Las componentes de la matriz modal son las de los modos normales de oscilación puestas por filas:

$$
\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0.22 & 0.258 & 0.192 \\ 0.816 & 0.192 & -0.363 \\ 0.887 & -0.804 & 0.286 \end{pmatrix}
$$

Las coordenadas normales u_1, u_2 y u_3 se obtienen integrando el sistema de ecuaciones diferenciales desacoplado:

$$
\left\{ \begin{array}{c} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \end{array} \right\} + \begin{pmatrix} 18.126 & 0 & 0 \\ 0 & 35.562 & 0 \\ 0 & 0 & 49.059 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{c} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{array} \right\} = \mathsf{A} \cdot \left\{ \begin{array}{c} 10\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \\ 30\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \\ 70\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \end{array} \right\}
$$

Empleando la relación entre las coordenadas generalizadas y las coordenadas normales, se obtiene la evolución en el tiempo de x_1, x_2 y x_3:

$$
\left\{ \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array} \right\} = \mathsf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \left\{ \begin{array}{c} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{array} \right\}
$$

3.- Para el régimen permanente, la solución es de la misma frecuencia que la excitación armónica y sin desfase por no haber amortiguamiento (en realidad lo hay, pero es muy pequeño). Sabemos que la frecuencia de la excitación es $\Omega = 0.9\Omega_3 = 44.153\,\mathrm{rad/s}$

$$
\left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \right\} \operatorname{sen} \Omega t \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \right\} \Omega^2 \operatorname{sen} \Omega t.
$$

Sustituyendo, resulta el sistema

$$
\begin{pmatrix} 1000 - \Omega^2 & -\Omega^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & 2000 - 3\Omega^2 & -3\Omega^2 \\ -\Omega^2 & -3\Omega^2 & 4000 - 7\Omega^2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0.10\Omega^2 \\ 0.30\Omega^2 \\ 0.70\Omega^2 \end{array} \right\}.
$$

La solución es

$$\left\{ \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0.384018 \\ -0.17261 \\ -011442 \end{array} \right\}.$$

4.- Por último, la fuerza en el muelle inferior será

$$F_3(t) = k_3 x_3(t) = -4 \times 10^5 \, 0.11442 \, \mathrm{sen} \, \Omega t \ \mathrm{N}$$

por lo que el máximo vale:

$$F_3|_{max} = 4 \times 10^5 \, 0.11442 = 45.768 \, \mathrm{N}.$$