MECÁNICA

Práctica nº 15 curso 95-96

71. Un disco homogéneo de radio a y masa m gira alrededor de su centro O, que permanece fijo, con velocidad angular constante ω. En un instante dado, se fija bruscamente un punto M de su periferia y se libera simultáneamente O con lo que pasa a girar alrededor de M.

Se pide:

1. Averiguar la nueva velocidad ω' con la que girará alrededor de m.
2. Calcular la energía cinética perdida.
3. Si se realiza de nuevo la operación inversa, es decir, se fija nuevamente O y se libera M, calcular:
   (a) La nueva velocidad ω'' alrededor de O.
   (b) La nueva energía cinética perdida.

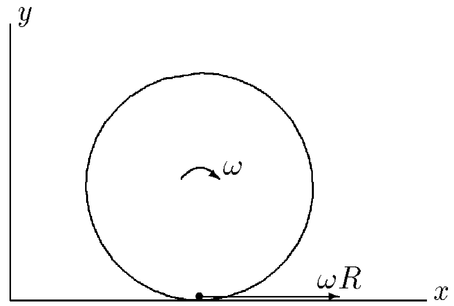
72. Un aro circular de radio R y masa m está obligado a rodar sin deslizar sobre una recta horizontal fija manteniendose en un plano vertical fijo.

Un insecto de masa m se mueve sobre el aro, y el sistema completo está sometido a la acción de la gravedad.

El sistema se encuentra se encuentra en el siguiente estado de movimiento: el aro rueda con velocidad angular ω constante y el insecto se encuentra en el punto más bajo del aro, dotado de una velocidad relativa a éste de valor ωR según la tangente (obsérvese que en estas condiciones el movimiento descrito se mantendría indefinidamente).

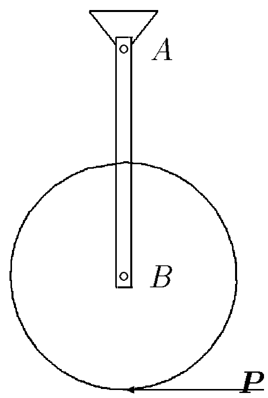
En un determinado instante el insecto se detiene sobre el aro permaneciendo fijo respecto a él. Se pide:

1. Determinar las percusiones que aparecen en el sistema en el instante en que el insecto se detiene.
2. Determinar el movimiento inmediatamente posterior del sistema así como la reacción de la recta sobre el aro y la reacción insecto-aro en el inicio de la nueva fase del movimiento.



73. El sistema material de la figura está formado por una barra AB, homogénea y pesada de masa m y longitud $2R$ y una placa circular pesada de masa m y radio R. La barra está articulada en sus dos extremos. En un determinado instante el sistema se encuentra en reposo en la posición de mínima energía potencial y se le aplica una percusión $P = 2m\sqrt{gR}$ como se indica en la figura. Se pide:

1. Movimiento del sistema en el instante inmediatamente posterior al que se aplica la percusión.
2. Percusiones que aparecen en A y B.
3. Posición más alta que alcanza el sistema después de la percusión



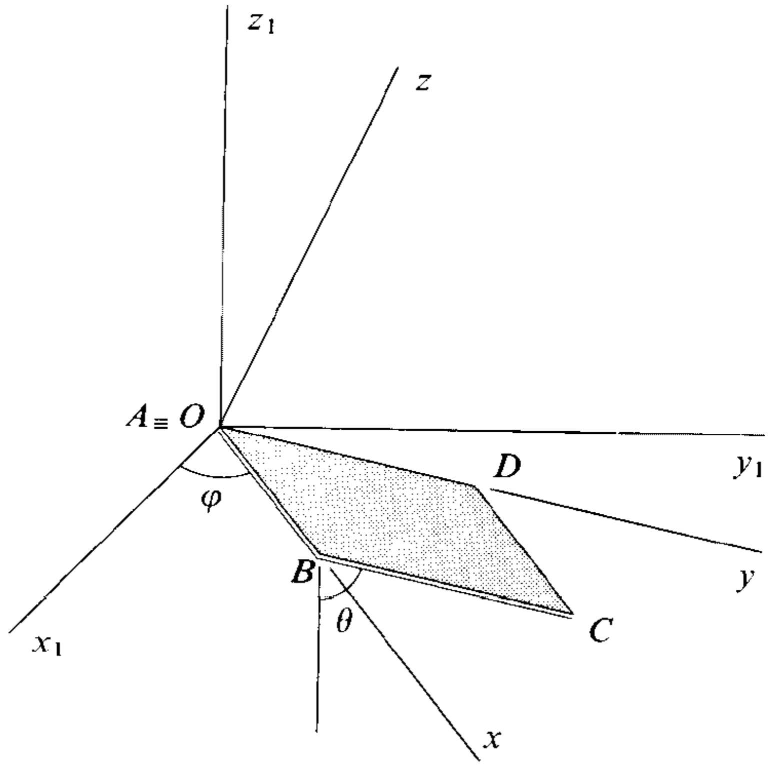
74. Una placa cuadrada, homogénea, pesada, de masa m y lado a tiene su vértice A fijo en el origen de un sistema ortogonal de coordenadas $Ox_1y_1z_1$ siendo Oz_1 vertical ascendente. El vértice B está obligado a moverse sin rozamiento sobre el plano Ox_1y_1.

Se pide:

1. Energía cinética de la placa en un instante genérico, en función de los ángulos θ, φ y sus derivadas.

2. Moménto cinético de la placa respecto a O en función de los ángulos θ, φ y sus derivadas. Dejarlo referido al triedro $Oxyz$ ligado a la placa.

3. Inicialmente se tiene $\theta = 0$, $\varphi = 0$ y la placa se encuentra en reposo. En este instante, una masa puntual m choca con velocidad $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{k}$ en el vértice C de la placa, siendo el choque elástico. Determinar los valores de $\dot{\theta}$ y $\dot{\varphi}$ en el instante inmediatamente posterior al choque así como el valor de las percusiones que aparecen en A y B.



75. Una placa rectangular homogénea de masa M y lados $2a$ y $4a$ cae con velocidad v y sin rotación, impactando con uno de sus vértices sobre un plano horizontal liso. En el instante del choque la orientación de la placa es tal que una de sus diagonales está horizontal y la otra forma un ángulo de 45° con el plano horizontal. El coeficiente de restitución vale e.

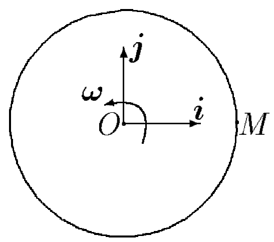
Se pide definir el movimiento de la placa después del choque, y expresar la energía perdida en el impacto.

MECÁNICA

Práctica nº 15 — curso 95-96

Soluciones

Ejercicio nº 71.-



1.- Consideramos que al producirse la percusión en M, el momento cinético en dicho punto no varía entre el instante inmediatamente anterior ($\boldsymbol{H}_M$) y posterior ($\boldsymbol{H'}_M$) a aquel en que se fija el punto M:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_M &= \boldsymbol{H'}_M \\
\boldsymbol{H}_M &= \boldsymbol{H}_G + m\boldsymbol{V}_G \wedge \boldsymbol{GM} = \boldsymbol{H}_G = \frac{1}{2}ma^2\omega\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{H'}_M &= \boldsymbol{H'}_G + m\boldsymbol{V}_G \wedge \boldsymbol{GM} = I_G\omega'\boldsymbol{k} + (-m\omega' a\boldsymbol{j}) \wedge a\boldsymbol{i} = \\
&= \left(\frac{1}{2}ma^2\omega' + ma^2\omega'\right)\boldsymbol{k} = \frac{3}{2}ma^2\omega'\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

Por tanto $\omega' = \omega/3$

2.- Interpretando el movimiento posterior a la fijación de M como una rotación alrededor de dicho punto y el anterior como una rotación alrededor de G, restando:

$$\Delta T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ma^2 + ma^2\right)\frac{\omega^2}{9} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ma^2\right)\omega^2 = -\frac{1}{6}ma^2\omega^2$$

3.- Establecemos la conservación del momento cinético respecto de $O \equiv G$:

$$\frac{1}{2}ma^2\omega' = \frac{1}{2}ma^2\omega'' \quad \Rightarrow \quad \omega'' = \omega' = \frac{\omega}{3}$$

Por último, la pérdida de energía en esta etapa es:

$$\Delta T = \frac{1}{2}ma^2(\omega')^2 - \frac{3}{2}ma^2(\omega')^2 = -\frac{1}{9}ma^2\omega^2$$

Ejercicio nº 72.-

1.- Sean A el punto del suelo coincidente con el insecto en el instante en que éste se detiene y ω_1 la velocidad angular del aro posterior a dicho instante. Planteando el balance del momento cinético del sistema en A:

$$2mR^2\omega = 2mR^2\omega_1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \omega$$

Para calcular la percusión tangencial que ejerce el suelo, planteamos el balance de la cantidad de movimiento del sistema en dirección horizontal:

$$m\omega R + m\omega R + P = m\omega_1 R \quad \Rightarrow \quad P = -m\omega R$$

siendo P la impulsión del suelo sobre el aro. Las impulsiones insecto-aro no se consideran al ser internas al sistema.

Como la cantidad de movimiento del aro no ha cambiado ($\omega = \omega_1$), éste recibirá del insecto una impulsión hacia la derecha:

$$P_{i|a} = m\omega R$$

y el insecto recibirá una impulsión del aro igual y de sentido contrario:

$$P_{a|i} = -m\omega R$$

No hay impulsiones según la vertical pues en esta dirección no varía la cantidad de movimiento.

2.- Planteamos las ecuaciones de la dinámica al sistema completo. Sean N la reacción vertical del suelo sobre el aro, F la reacción horizontal y α la aceleración ángular del mismo, en el instante inicial. Teniendo en cuenta que el C.D.M. está situado a una altura $R/2$,

$$\left.\begin{array}{l} F = 2m\alpha\frac{R}{2} \\ N - 2mg = 2m\omega_1^2\frac{R}{2} \\ F\frac{R}{2} = -\frac{3}{2}mR^2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \quad F = 0;\ \alpha = 0;\ N = 2mg + m\omega^2 R$$

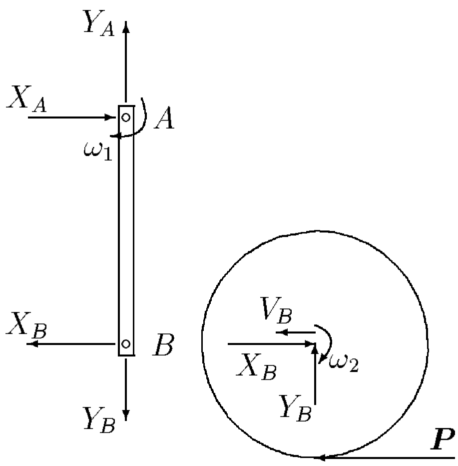
El insecto como partícula adherida al aro tiene una aceleración hacia arriba de valor $\omega^2 R$. Llamando N_1 a la reacción vertical que ejerce el aro sobre el insecto y aplicando la ecuación de la cantidad de movimiento en dirección vertical:

$$N_1 - mg = m\omega^2 R \quad \Rightarrow \quad N_1 = m(g + \omega^2 R)$$

Ejercicio nº 73.-

Sean ω_1 y ω_2 las velocidades angulares de la varilla y del disco respectivamente, después del choque. Consideraremos positivo el sentido horario para ángulos y momentos.

Aislando el sistema:



1.- Planteamos el balance del momento cinético en A del sistema disco-varilla

$$P \cdot 3R = \frac{1}{3}m(2R)^2\omega_1 + \frac{1}{2}mR^2\omega_2 + m\omega_1(2R)^2 \tag{1}$$

Balance del momento cinético en B para el disco:

$$P \cdot R = \frac{1}{2}mR^2\omega_2 \tag{2}$$

Sustituyendo $P = 2m\sqrt{gR}$ y despejando ω_2 en (2)

$$\omega_2 = 4\sqrt{\frac{g}{R}}$$

y despejando ω_1 en (1)

$$\omega_1 = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{g}{R}}$$

La velocidad del centro de masas del disco es:

$$V_B = 2R\omega_1 = \frac{3}{2}\sqrt{gR}$$

2.- Planteando el balance de la cantidad de movimiento en el disco:

$$\begin{aligned} P - X_B &= mV_B \quad \Rightarrow \quad X_B = \frac{1}{2}m\sqrt{gR} \\ Y_B &= 0 \end{aligned}$$

y haciendo lo mismo en la varilla:

$$\begin{aligned} X_B - X_A &= m\omega_1 R \\ Y_A - Y_B &= 0 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} X_A &= -\frac{1}{4}m\sqrt{gR} \\ Y_A &= 0 \end{aligned}$$

3.- Planteamos la conservación de la energía entre el instante posterior a la percusión (instante 1) y aquel en el que se produce la posición más elevada (instante 2). Tomamos como nivel de referencia de potenciales la horizontal por A. A lo largo del movimiento, se verifica en el disco que $M_G = 0$ por lo cual la velocidad angular del mismo es constante

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m(2R)^2\right)\omega_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega_2^2 + \frac{1}{2}mV_B^2 \\ V_1 &= -mgR - mg2R \\ T_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega_2^2 \\ V_2 &= -mgR\cos\theta - 2mgR\cos\theta \end{aligned}$$

Haciendo $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ y despejando $\cos\theta$:

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 60°$$

Ejercicio nº 74.-

1.- Sean $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ los versores que definen el triedro $Oxyz$. La expresión de la velocidad angular en dicho triedro es:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{i} - \dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{j} + \dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta\boldsymbol{k}$$

Por otra parte, las componentes del tensor de inercia de la placa en O, referidas a $Oxyz$ son

$$I_x = I_y = \frac{1}{3}ma^2$$

$$I_z = \frac{2}{3}ma^2$$
$$P_{xy} = m\frac{a^2}{4}$$

resultando:

$$\boldsymbol{I}_O = \begin{pmatrix} ma^2/3 & -ma^2/4 & 0 \\ -ma^2/4 & ma^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3ma^2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la expresión de la energía cinética resulta:

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}ma^2 \left(\frac{1}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{3}\dot{\varphi}^2(1 + \operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

2.- La expresión del momento cinético en O es:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} &= ma^2 \left[\left(\frac{1}{3}\dot{\theta} + \frac{1}{4}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\boldsymbol{i} + \right. \\ & \left. \left(-\frac{1}{3}\dot{\varphi}\cos\theta - \frac{1}{-}\dot{\theta}\right)\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{k}\right] \end{aligned}$$

3.- Planteamos el balance del momento cinético en O antes ($\boldsymbol{H}_O$) y después ($\boldsymbol{H'}_O$) del choque, para el conjunto placa-partícula:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_O &= m(a\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{j}) \wedge v\boldsymbol{k} = mav(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) \\ \boldsymbol{H'}_O &= ma^2 \left[\left(\frac{1}{3}\dot{\theta}_0 + \frac{1}{4}\dot{\varphi}_0\right)\boldsymbol{i} - \left(\frac{\dot{\varphi}_0}{3} + \frac{\dot{\theta}_0}{4}\right)\boldsymbol{j}\right] + mav_0(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) \end{aligned}$$

Sea P la percusión que aparece en B, necesariamente vertical. El momento en O de la misma es:

$$\boldsymbol{M}_O = -Pa\boldsymbol{k}$$

Sustituyendo en la ecuación vectorial de balance:

$$\boldsymbol{H}_O + \boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{H'}_O$$

resultan:

$$mav = ma^2\left(\frac{1}{3}\dot{\theta}_0 + \frac{1}{4}\dot{\varphi}_0\right) + mav_0 \qquad (1)$$

$$-mav = -ma^2\left(\frac{\dot{\varphi}_0}{3} + \frac{\dot{\theta}_0}{4}\right) - mav_0 \qquad (2)$$

$$-Pa = 0 \qquad (3)$$

Por lo cual en B no aparecen percusiones. Aplicamos ahora el balance de la cantidad de movimiento. La expresión de la velocidad de G en el instante posterior a la percusión es:

$$\boldsymbol{V}_G = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OG} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \left(\frac{a}{2}\boldsymbol{i} + \frac{a}{2}\boldsymbol{j}\right) = \frac{a}{2}(\dot{\theta}_0 + \dot{\varphi}_0)\boldsymbol{k}$$

De la ecuación vectorial de balance de la cantidad de movimiento, resultan las ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} X &= 0 & (4)\\ Z &= 0 & (5)\\ Y + mv &= mv_0 + m\frac{a}{2}(\dot{\theta}_0 + \dot{\varphi}_0) & (6) \end{aligned}$$

siendo X, Y, Z las componentes de la percusión en O.

La ecuación del coeficiente de restitución es:

$$-1 = \frac{v_0 - a(\dot{\theta}_0 + \dot{\varphi}_0)}{v} \tag{7}$$

y operando

$$X = Z = P = 0$$
$$Y = \frac{10mv}{31};\ V_0 = \frac{17}{31}v;\ \dot{\theta}_0 = \dot{\varphi}_0 = \frac{24v}{31a}$$