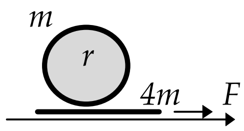
MECÁNICA

Práctica nº 14

Curso 95-96

66. Una esfera homogénea, de masa m y radio r, se encuentra en reposo sobre una placa horizontal, de masa $4m$, que se apoya, también en reposo, sobre un plano horizontal fijo. Se aplica a la placa una fuerza horizontal constante F. En todos los contactos existe un rozamiento al deslizamiento de valor μ. Se pide:



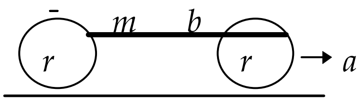
1º.- Valor mínimo de F para que la esfera deslice sobre la placa.

2º.- Si el valor de F es la mitad del calculado, estudiar los movimientos de la esfera y de la placa.

3º.- ¿Qué ocurre si el valor de F sólo es la quinta parte del calculado en 1º?

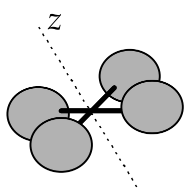
NOTA: Supóngase que el tamaño de la placa es el necesario para que la esfera permanezca sobre ella.

67. Dos ruedas (de radio r) de una locomotora están unidas por una barra (de masa m y longitud b) que se articula en sendos puntos de los bordes de aquéllas. El tren parte del reposo con una aceleración constante a. En la posición inicial el punto A en que la barra se articula a cada rueda se encuentra en la vertical del centro O de la misma y sobre él. Las ruedas no deslizan.



Calcular las reacciones en las articulaciones de la barra, en el instante t.

68. Una estación espacial viene representada simplificadamente por cuatro esferas huecas (de radio r y masa m) que están unidas entre sí por dos barras ortogonales de longitud $2r$ y masa despreciable, de modo que los centros de las esferas ocupan los vértices de un cuadrado de diagonal $4r$. Está diseñada para que gire alrededor de su eje de revolución z a una velocidad de $\pi/2$ rad/s. Se pide:



1º.- Si se desvía muy poco el eje z, hallar la velocidad de precesión.

2º.- Calcular el período de la precesión si el eje z forma un ángulo de 20º con el eje fijo alrededor del cual dicha precesión tiene lugar.

69. Sobre una mesa horizontal lisa descansa una barra homogénea, de masa $3m$ y longitud $16b$. Una partícula de masa m incide con velocidad v normal a la barra, en un punto de ésta que dista $4b$ de un extremo. Si la partícula queda adherida a la barra, definir el movimiento de ésta tras el choque.

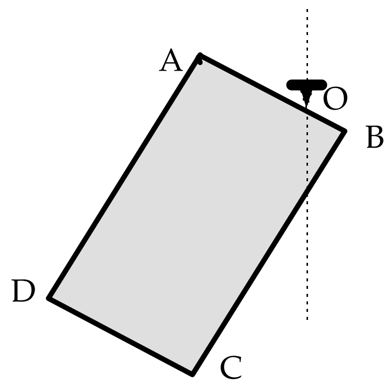
70. Una placa rectangular *ABCD* (homogénea, de masa *3M* y dimensiones $AB = CD = 3a$; $BC = DA = b$) puede moverse dentro de su propio plano vertical Π oscilando alrededor del punto fijo *O*, situado sobre el lado *AB*, de forma que $AO = 2a$. A su vez, el plano Π puede girar alrededor de la vertical que pasa por *O*.

1º.- Deducir las ecuaciones diferenciales del movimiento de la placa.

Una partícula de masa *m* efectúa un impacto perfectamente plástico contra el vértice *C* de la placa.

2º.- Deducir las nuevas ecuaciones diferenciales del movimiento del conjunto placa–partícula

3º.- Demostrar que si *M, m, a* y *b* cumplen ciertas condiciones, la velocidad angular del conjunto alrededor de la vertical se mantendrá constante.



MECÁNICA

Práctica nº 14

Curso 95-96

Soluciones

66. **1.-** En el apoyo sobre el plano existe una fuerza normal $5mg$. En el contacto entre esfera y placa la fuerza normal es mg. Para conseguir que el movimiento se inicie, habiendo deslizamiento entre esfera y placa, el valor de F debe ser, por tanto, superior a $6mg\mu$. Veamos en qué cuantía. Hagamos $F = 6mg\mu + X$. Esto supone que la placa se moverá con una aceleración $X/4m$, con lo que su velocidad será:

$$v_p = Xt/4m$$

La esfera, sometida a la acción tangencial $mg\mu$, se moverá con una aceleración de su centro G de valor $g\mu$, y con una aceleración angular (aplicando el teorema del momento cinético en G) de valor $5/2\ g\mu/r$, con lo que su punto A de contacto con la placa tendrá una velocidad: $v_A = 7/2\ g\mu t$.
Deseamos, para que haya deslizamiento, que $v_p > v_A$ por lo que $X > 14mg\mu$.
lo que supone finalmente que:

$$F_{mín} = 20\ mg\mu$$

2.- Ahora tenemos $F = 10\ mg\mu$. Llamemos T a la fuerza tangencial que existirá en el contacto esfera-placa. La aceleración de la placa valdrá: $(10mg\mu - 5mg\mu -T)/4m$ por lo que admitiendo que T es constante, su velocidad será: $v_p = 5/4\ g\mu t - Tt/4m$. La constancia de T se verifica tanto si la esfera rueda como si se mantiene deslizando sin conmenzar a rodar.

Combinando, análogamente a como lo hicimos anteriormente, las velocidades del centro de la esfera y la componente de su rotación, obtenemos que la velocidad del punto A valdrá: $v_A = 7/2\ Tt/m$. Es inmediato comprobar que no hay deslizamiento entre esfera y placa (porque al imponer $v_p > v_A$ llegaríamos al absurdo de que debería ser $T < 1/3\ mg\mu$ cuando si desliza debe ser $T = mg\mu$). Al rodar sin deslizar es $v_p = v_A$ y el valor de T que se presenta es:

$$T = 1/3\ mg\mu.$$

En resumen:

a) La placa tiene un movimiento uniformemente acelerado de valor $7/6\ g\mu$.

b) La esfera rueda sin deslizar sobre la placa con una aceleración angular constante $(5/6)\ \mu g/r$

3.- Si ahora $F = 4\ mg\mu < 5mg\mu$, es evidente que el conjunto se mantendrá en reposo.

67. Designemos por θ el ángulo que OA forma con la vertical (que, evidentemente valdrá $\theta = 1/2\ a/r\ t^2$) y por Ω a su derivada (que valdrá at/r).

El movimiento de la barra es una traslación cicloidal (la llamamos así porque todos sus puntos describen cicloides) en la que es inmediato obtener las componentes horizontal y vertical de su aceleración, a partir de la rodadura sin deslizamiento de las ruedas:

$$a_x = a\ (1 + \cos\theta) - r\ \Omega^2\ \operatorname{sen}\theta$$
$$a_y = -\ a\ \operatorname{sen}\theta - r\ \Omega^2\ \cos\theta$$

Por simetría, las reacciones verticales en las articulaciones serán iguales. Sean V. La ecuación de Newton nos da:

$$V = 1/2\ m\ (g - a\ \operatorname{sen}\theta + \Omega^2 \cos\theta)$$

Sobre las componentes horizontales de estas reacciones, sólo podemos dar el valor de su suma $2H$ (es un caso de indeterminación dinámica) que valdrá:

$$2H = m\ \{\ a\ (1 + \cos\theta\ ) - r\ \Omega^2\ \operatorname{sen}\theta\}$$

Recordemos los valores dados para θ y Ω, que deben ser sustituidos en las expresiones anteriores.

68. **1.-** Trabajando en el S.C.M., estamos en un caso de giróscopo con movimiento de Poinsot, en el que la precesión lenta se anula. La rápida sabemos que vale: $Cr/A.\cos\theta$, siendo en nuestro caso $\cos\theta \approx 1$. Como $r = \varphi' + \psi'.\ \cos\theta$ podemos despejar:

$$\psi' = \varphi' C/\{(A-C)\cos\theta\}$$

Los valores de esta fórmula son:

$\varphi' = \pi/2$

$C = 4\{2/3\ mr^2 + m(2r)^2\} = 56/3\ mr^2$

$A = 2\ (2/3)\ mr^2 + 2\{2/3\ mr^2 + m(2r)^2\} = 32/3\ mr^2$

Con lo que obtenemos:

$$\psi' = -\{\ 7/(3\cos\theta)\}\ \ \varphi' = -\ 7/6\ \pi \quad \text{rad/s}$$

donde el signo negativo indica que se trata de una precesión retrógrada, es decir, de sentido contrario al de la rotación propia.

2.- Llamando τ al período de precesión pedido,

$\tau = 2\pi/\psi' = |\ -\ 12/7\ \cos 20^o\ | = 1{,}61$ s

Dejamos que el alumno compruebe (como ejercicio complementario) que el cono del axoide móvil es exterior al fijo, que tiene un semiángulo de 32º30′.

69. Llamemos Ω a la velocidad angular de la barra inmediatamente después del choque, y v' a la velocidad de su centro G. Podemos plantear las siguientes ecuaciones para el conjunto barra-partícula:

1) conservación de la cantidad de movimiento: $mv = 3mv' + m\ (4b\ \Omega + v')$
2) conservación del momento cinético en G: $4bmv = 4bm\ (4b\ \Omega + v') + 3m/3\ (8b)^2\ \Omega$

La resolución de este sistema nos da:

$$v' = 4/19\ v$$
$$\Omega = 3/76\ v/b$$

con lo que la velocidad del centro de masa G' del conjunto barra-partícula valdrá:

$$v_{G'} = v' + \Omega.b = 1/4\ v$$

valor que pudimos obtener también directamente dividiendo la cantidad de movimiento inicial (*mv*) entre la masa total del conjunto (*4m*). Esta velocidad se mantendrá constante durante el movimiento subsiguiente, ya que no actúan fuerzas en horizontal. También se conservará la velocidad angular, por la misma razón.

70. **1.-** Situemos la placa desde una hipotética posición (no hace falta que materialmente la placa ocupe esta posicion en algún momento) en la que *OA* (sobre la que situaremos el eje móvil *Oy*, solidario con la placa) esté dirigida según el eje fijo horizontal *OY*. El eje móvil *Oz,* que lleva la dirección *DA,* está, en esa posición, coincidente con el eje fijo vertical *OZ.* Una posición general queda definida por los ángulos ψ (giro de la placa alrededor de la vertical *OZ*) y θ (giro en el propio plano de la placa, alrededor de su normal *Ox*). El triedro móvil escogido no es, evidentemente, principal de inercia. Las componentes del tensor de inercia en *O* en este triedro son:

$$I_o = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -P \\ 0 & -P & C \end{vmatrix} = M \begin{vmatrix} b^2+3a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 5/4\ ab \\ 0 & 5/4\ ab & 3a^2 \end{vmatrix}$$

Las componentes de la rotación instantánea **Ω** (teniendo en cuenta que $\varphi = 0$):

$$p = \theta'$$
$$q = \psi'\ sen\theta$$
$$r = \psi'\ cos\theta$$

Las ecuaciones diferenciales del movimiento pueden plantearse mediante Lagrange respecto de ψ y θ (ya que ahí no hay fuerzas generalizadas, que se reducen a Q_φ).

$\boldsymbol{H} = (A\,p,\ B\,q - P\,r\,,\ -P\,q + C\,r)$ $\qquad V = -3Mg\ 1/2\ (b\ cos\theta - a\ sen\theta)$

$T = 1/2\ (A\,p^2 + B\,q^2 - 2\,P\,q\,r + C\,r^2) = 1/2\ (A\theta'^2 + B\,\psi'^2\ sen^2\theta - P\,\psi'^2\ sen2\theta + C\psi'^2\ cos^2\theta)$

pero es más simple utilizar que ψ es cíclica y que se conserva la energía:

$B\,\psi'\ sen^2\theta - P\,\psi'\ sen2\theta + C\psi'\ cos^2\theta) = cte = u$ $\qquad$ {I}

$T + V = cte = E = 1/2\ (A\theta'^2 + u\,\psi') - 3/2\ Mg\ (b\ cos\theta - a\ sen\theta)$ $\qquad$ {II}

2.- Ahora debemos contar con la masa *m* adherida al punto *C*, con lo que se modifican los valores de las componentes del tensor de inercia en *O*:

$A' = M(3a^2+b^2)+m(a^2+b^2),,$ $\quad B' = (M+m)\ b^2,,$ $\quad C' = (3M+m)a^2,,$ $\quad -P' = (3/4\ \ M-m)\ ab$

y de la energía potencial: $\qquad V' = -\,3/2\ Mg\ (b\ cos\theta - a\ sen\theta) - mg(a\ cos\theta + b\ sen\theta)$

La ecuación {I} queda con el mismo formato, mientras que en {II} hay que añadir el nuevo término del potencial.

3.- La constancia de ψ′ implica la de la componente de **Ω** sobre el plano de la placa, lo que nos sugiere que el tensor de inercia sea de revolución según la normal *Ox*¸ es decir: que $P' = 0$ y que $B' = C'$. Podemos comprobar inmediatamente que entonces se cumple que:

$$\{I\} \Rightarrow B\,\psi' = cte = u, \qquad \text{c.q.d.}$$

La ecuación {II} nos determina el penduleo θ.

Para que se verifique lo que hemos visto, debe ser:

$P' = 0 \quad \Rightarrow \quad 3M = 4\,m$

$B' = C' \quad \Rightarrow \quad 7/3\ m\ b^2 = 5\ m\ a^2 \quad \Rightarrow \quad 7\ b^2 = 15\ a^2$

que son las condiciones pedidas.