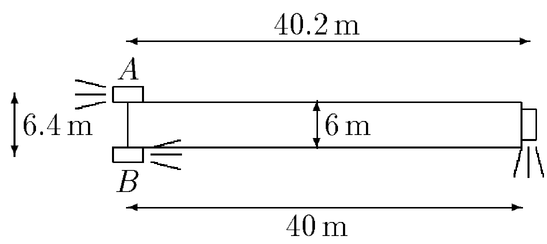
# MECÁNICA

## Práctica nº 11 curso 95-96

**51.** Un cohete de 2000 toneladas debe despegar de la tierra. La salida de los gases de la combustión se realiza con una velocidad de 1000 m/s. Calcular el consumo mínimo de combustible por segundo para que despegue inmediatamente de comenzar el funcionamiento.

Supuesto que el consumo sea 1.5 veces el mínimo calculado, estudiar el movimiento en la fase de despegue, esto es, mientras no se aleja demasiado de la tierra y puede considerarse la gravedad constante. Despreciar a resistencia del aire.

**52.** Un vehículo espacial puede ser asimilado a un cilindro hueco de 40 m de largo, 6 m de diámetro y espesor de paredes de 0.06 m con densidad relativa media del material de las paredes de 6 kg/m$^3$. (Para simplificar puede admitirse que el espesor de las paredes es despreciable frente a las demás dimensiones). Para cambiar de dirección dispone de dos pequeños cohetes $A$ y $B$ en la parte posterior, capaces de invertir su empuje, y otro transversal en su parte delantera, dispuestos según indica la figura. En un instante dado hace que el cohete $A$ empuje hacia adelante y el $B$ hacia atrás. Tanto el $A$ como el $B$ gastan 20 kg/s con velocidad de salida 1000 m/s.




Se pide:

1. Sabiendo que la expulsión de gases del $C$ puede ser controlada, calcular el gasto de dicho cohete (con la misma velocidad de salida de los otros) para que el vehículo adquiera una velocidad transversal sin giro.
2. Aceleración transversal que se produce.
3. Se apaga el cohete $C$, ¿Cuánto tardará el vehículo en invertir su posición?. Para simplificar se despreciará el cambio de masa del vehículo debido al consumo de los pequeños cohetes.

Para la resolución numérica se elegirá el S.I. de unidades.

**53.** Un cohete de 200 toneladas se mueve sin propulsión por el espacio exterior. Se puede asimilar a un cilindro hueco de paredes delgadas de 4 m de diámetro y 20 m de longitud con la mitad de la masa total, más un depósito de combustible con el resto de la masa, que ocupa los 5 m posteriores del cohete. Por causas diversas, el cohete adquirió una rotación en torno de su eje de 0.5 vueltas por segundo que se desea anular. Para ello se dispone de dos pequeños cohetes tangenciales auxiliares con velocidad de salida de 800 m/s y consumo de 1000 kg/s cada uno. Calcular el tiempo de ingición necesario. Se puede despreciar la disminución de masa del cohete debida al consumo de los auxiliares.

**54.** A un cilindro homogéneo de masa $m$ y radio $r$, se le comunica una velocidad angular $\omega$ alrededor de su eje de revolución. Se deposita suavemente el cilindro sobre un plano horizontal entrando en contacto a través de una generatriz, con un coeficiente de rozamiento al deslizamiento de valor $k$ (la resistencia a la rodadura es $\delta$). Encontrar el espacio que recorre el centro del cilindro hasta que deja de deslizar.

**55.** Una semiesfera homogénea de masa $m$ y radio $r$, se coloca en reposo sobre un plano horizontal liso, apoyándose por su parte curva, formando su cara plana un ángulo $\phi$ con el plano horizontal. Determinar en el transcurso del movimiento las diferentes posiciones de su eje de rotación instantánea y obtener la velocidad angular máxima que alcanzará en su movimiento.

⋆

# MECÁNICA

## Práctica nº 11 — curso 95-96

## Soluciones

**Ejercicio nº 51.-**

En el caso del consumo mínimo la fuerza de empuje debe ser igual al peso, esto es,

$$2\,000\,000 \times 9.8 = 19\,600\,000\,\mathrm{N}$$

El empuje vale $q_0 c = 1000 q_0$, de donde

$$q_0 = \frac{19\,600\,000}{1\,000} = 19\,600\,\mathrm{kg/s}$$

El consumo real es $q = 1.5\ q_0 = 29\,400\,\mathrm{kg/s}$, y la fuerza de empuje:

$$E = 29\,400 \times 1\,000 = 29\,400\,000\,\mathrm{N}.$$

Por tanto,

$$ma = 29\,400\,000 - mg \quad \Rightarrow \quad a = \frac{29\,400\,000\,(\mathrm{N})}{m\,(\mathrm{kg})} - 9.8\,\mathrm{m/s^2}$$

o bien, teniendo en cuenta que $a = dv/dt$ y $dm = -29\,400\,dt$

$$\begin{aligned} dv &= \frac{1\,000\,dm}{m} - 9.8; \\ v &= 1\,000 \ln\frac{m_0}{m} - 9.8\,t\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores numéricos

$$v = 1\,000 \ln\frac{2\,000\,000}{2\,000\,000 - 29\,400\,t} - 9.8\,t\,\mathrm{m/s}$$

Si suponemos, por ejemplo, que el combustible es el 60% del peso total, éste se agota en

$$\frac{0.6 \times 2000000}{29\,400} = 40.816\,\mathrm{s}$$

y su velocidad entonces será:

$$v = 1\,000 \ln\frac{2\,000\,000}{800\,000} - 9.8 \times 40\,816 = 516.240\,\mathrm{m/s}$$

Como ilustración veamos los valores de la velocidad para $t = 1, 2, \ldots$

| $t$ | 1 s | 2 s | 3 s | 4 s | 5 s | 10 s | 20 s |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | 5.009 | 10.241 | 15.702 | 21.400 | 27.341 | 60.996 | 152.140 |

A partir de los 40.816 s., el combustible se acaba y la velocidad empieza a decrecer con deceleración constante $g$.

**Ejercicio nº 52.-**

**1.-** El empuje de cada uno de los cohetes de la parte posterior $A$ y $B$ es: $20\,\mathrm{kg/s} \times 10^3\,\mathrm{m/s} = 2 \times 10^4\,\mathrm{N}$.

El momento producido es por tanto: $2 \times 10^4 \times 6.4 = 128 \times 10^3\,\mathrm{Nm}$.

El momento que produce $C$ respecto del centro de masas $G$ debe ser el mismo:

$$q_C \times 10^3 \times 20.2 = 128 \times 10^3 \quad \Rightarrow \quad q_C = 6.337\,\mathrm{kg/s}$$

con un empuje $E_c = 6\,337\,\mathrm{N}$.

**2.-** Calculemos la masa del vehículo:

Bases: $m_B = 2\left(\frac{\pi \times 6^2}{4} \times 0.06 \times 6\,000\right) = 20\,358$ kg

Superficie lateral: $m_L = \frac{2\pi \times 6}{2} \times 0.06 \times 40 \times 6\,000 = 271\,434\,\mathrm{kg}$

Total: $20\,358 + 27\,1434 = 291\,792\,\mathrm{kg}$. De donde se deduce la aceleración transversal, debida únicamente al empuje $E_c$:

$$a_t = \frac{6\,337}{291\,792} = 0.0217\,\mathrm{m/s}^2$$

**3.-** Obtengamos el momento de inercia respecto de un eje perpendicular al del cilindro en el centro de masas $G$.

Bases: $I_B = \frac{1}{4} m_B 3^2 + m_B 20^2 = 8\,189\,005\,\mathrm{kg} \times \mathrm{m}^2$

Superficie lateral: $I_L = m_L \frac{40^2}{12} + m_L \frac{20^2}{2} = 37\,412\,653\,\mathrm{kg} \times \mathrm{m}^2$

Total: $I = 8\,189\,005 + 37\,412\,653 = 45\,601\,658\,\mathrm{kg} \times \mathrm{m}^2$

La aceleración angular será:

$$\alpha = \frac{128\,000}{45\,601\,658} = 0.00281\,\mathrm{rad/s}^2$$

Para girar un ángulo $\pi$,

$$\pi = \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} = 47.3\,\mathrm{s}$$

**Ejercicio nº 53.-**

Admitimos que el cohete es un tubo cilíndrico con tapas. Debemos obtener en primer lugar el momento de inercia del conjunto, suponiendo que el tubo es homogéneo:

- Superficie lateral: $S_L = 4 \times \pi \times 20 = 251.3274123\,\mathrm{m}^2$.
- Superficie de la base: $S_B = 2 \times 2^2 \times \pi = 25.1327412\,\mathrm{m}^2$.
- Superficie total: $S = S_L + S_B = 276.4601535\,\mathrm{m}^2$.

Los 100 000 kg de la carcasa se reparten de la siguiente manera:

- Masa en paredes laterales: $M_L = \dfrac{M}{2}\dfrac{S_L}{S} = 90909.09091\,\mathrm{kg}$
- Masa en bases: $M_B = \dfrac{M}{2} - M_L = 9090.90909\,\mathrm{kg}$
- Masa de combustible: $M_C = \dfrac{M}{2} = 100\,000\,\mathrm{kg}$

Podemos ya calcular el momento de inercia de cada parte:

- Paredes laterales: $I_L = M_L \times 2^2 = 363636.3636\,\mathrm{kg\ m}^2$
- Bases y combustible: $I_B + I_C = (M_B + M_C) \times \frac{2^2}{2} = 218\,181.8180\,\mathrm{kg\ m}^2$

Por lo que el momento de inercia total será $I = I_L + I_B + I_C = 581\,818.1816\,\mathrm{kg\ m}^2$

El momento de los cohetes auxiliares vale:

$$M_G = 2(1000 \times 800 \times 2) = 3\,200\,000\,\mathrm{Nm}$$

por lo que la aceleración angular será

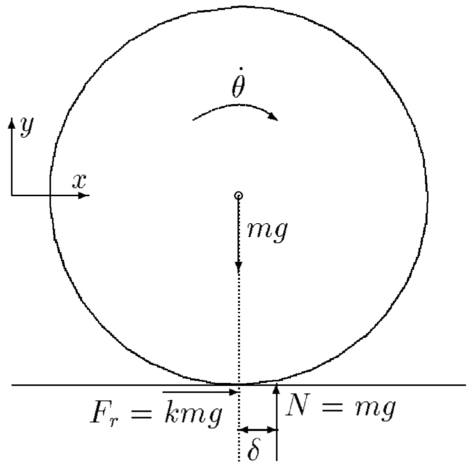
$$\alpha = \frac{3\,200\,000}{581\,818.1816} = 5.5\,\mathrm{rad/s}^2$$

Al considerar la masa (y también el momento de inercia) constante, la deceleración será constante y el tiempo de funcionamiento necesario será:

$$t = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{0.5 \times 2\pi}{5.5} = 0.571\,\mathrm{s}$$

**Ejercicio nº 54.-**

Con las condiciones del enunciado el cilindro tiene un movimiento plano. Las fuerzas que actuan sobre el cilindro son las representadas en la figura adjunta.




Aplicamos en primer lugar el principio de la cantidad de movimiento, en dirección horizontal, durante el tiempo en que el cilindro rueda y desliza:

$$kmg = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} = kg}$$

Donde $x$ es el desplazamiento horizontal del centro del cilindro en dirección transversal al mismo. Integrando,

$$\dot{x} = kgt$$

Aplicamos ahora el principio del momento cinético en el centro de masas $G$:

$$-kmgr - mg\delta = \left(\frac{1}{2}mr^2\right)\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{2g}{r}\left(k + \frac{\delta}{r}\right)$$

donde $\theta$ es el ángulo girado por el cilindro (positivo en sentido horario). Integrando,

$$\dot{\theta} = \omega - \frac{2g}{r}\left(k + \frac{\delta}{r}\right)t$$

Calculamos ahora el instante en que deja de deslizar, imponiendo la condición de rodadura sin deslizamiento:

$$\dot{x} = \dot{\theta}r \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\omega r^2}{g(3kr + 2\delta)}$$

El espacio recorrido durante este tiempo es:

$$x = \frac{1}{2}kgt^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{kg}{2}\left[\frac{\omega r^2}{g(3kr + 2\delta)}\right]^2}$$