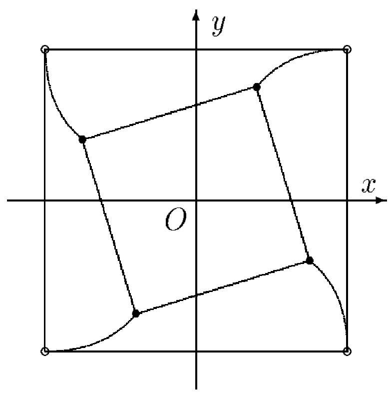
MECANICA

Practica nº 1 curso 95-96

1. Una partícula pesada de masa m se mueve sobre una hélice circular lisa de ecuaciones ($\rho = a$, $z = k\varphi$). Además de su peso es atraida desde el origen con una fuerza proporcional a la distancia. Se pide:

1. Obtener la reacción de la hélice sobre la partícula.
2. Ecuaciones del movimiento, particularizando para el caso en que la partícula parte del reposo desde la altura inicial $z_0 = 0$.

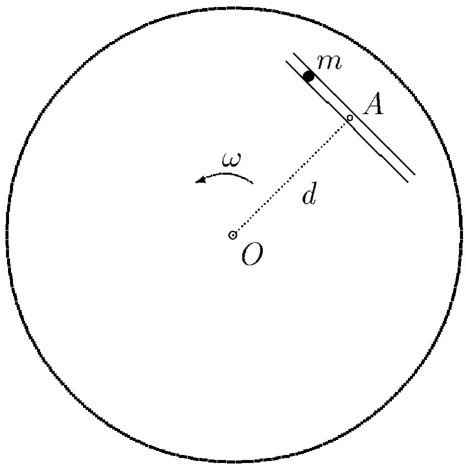
2. Cuatro moscas ocupan en un instante determinado un cuadrado de lado $2a$. Si cada una de las moscas está persiguiendo a la siguiente y todas tienen la misma velocidad, hallar las trayectorias que describen (ecuaciones horarias e intrínsecas).



3. Un disco horizontal gira con velocidad ω constante alrededor de un eje vertical por su centro O. En el disco existe una ranura recta, situada a una distancia d de O, en la cual se mueve una masa puntual m. Sea A el pie de la perpendicular por O a la ranura.

1. Supuesto conocido el movimiento de m en la ranura, definido por su distancia $u(t)$ al punto A, obtener la expresión de la velocidad y aceleración absolutas (relativas al sistema inercial), según las direcciones de la ranura y normal a la misma. Deberá suponerse que m no llega a los extremos de la ranura.
2. Consideramos ahora que en la ranura existe un resorte lineal que une m con A, de constante k y longitud natural nula. Obtener la ecuación diferencial del movimiento de m en función de u.

3. Integrar esta ecuación para las condiciones iniciales $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = 0$, obteniendo todas las soluciones posibles en función del valor de ω.
4. En la hipótesis $\omega^2 < k/m$, si la ranura establece un enlace bilateral liso, obtener la reacción de ésta sobre m en función del tiempo.
5. Discutir la conservación de la energía del sistema.



4. Un punto material pesado P, de masa m, está unido mediante un hilo flexible e inextensible de longitud $l > \pi R$ y masa despreciable al punto A situado en la parte superior de un cilindro circular fijo de radio R y eje horizontal. Se sitúa el punto P de modo que el hilo esté horizontal y perpendicular a la generatriz superior del cilindro y que se encuentre extendido, o sea que $PA = l$. Se abandona entonces el punto, sin velocidad inicial, a la acción de la gravedad, y se desea saber:

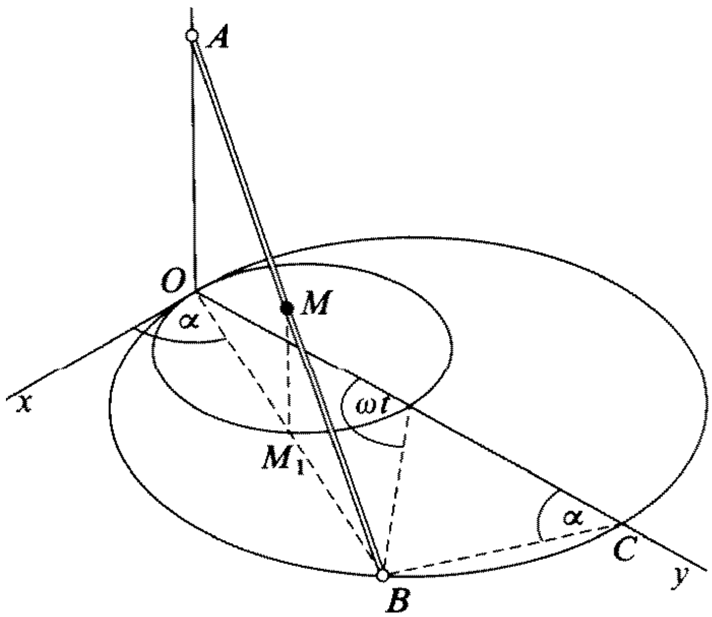
1. ¿Cual será la velocidad del punto cuando éste pase por la posición más baja de su trayectoria?
2. ¿Cual será la tensión del hilo en ese momento?
3. ¿Cual debe ser la longitud del hilo para que su tensión se anule cuando en el movimiento ascendente subsiguiente al instante considerado en las dos preguntas anteriores, el hilo alcance un ángulo de 30° por encima de la horizontal?

5. Una varilla AB de longitud $2a$ se mueve de forma que su extremo A recorre el eje Oz de un sistema de referencia $Oxyz$, ortogonal. El extremo B recorre la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0; \quad z = 0$$

con velocidad angular constante ω. Inicialmente B está en el origen de coordenadas. Se pide:

1. Ecuaciones horarias del movimiento del punto medio M de la varilla.
2. Caracterizar geométricamente la trayectoria.
3. Velocidad de M.
4. Valores máximos o mínimos de la velocidad de M y posiciones en que se presentan.
5. Caracterizar el movimiento de A.
6. Aceleración de M.
7. Aceleraciones tangencial y normal en los instantes de los máximos y mínimos de velocidad.
8. Radio de curvatura de la trayectoria en estos instantes.



⋆

MECANICA

Practica nº 1 curso 95-96

Soluciones

Ejercicio nº 1.-

1.- Sea α la constante de la fuerza atractiva hacia el origen. La resultante de las fuerzas activas es:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= -\alpha\boldsymbol{r} - mg\boldsymbol{k} \\ &= -\alpha\rho\boldsymbol{u}_\rho - (\alpha z + mg)\boldsymbol{k} \qquad (1)\end{aligned}$$

donde $(\boldsymbol{u}_\rho, \boldsymbol{u}_\varphi, \boldsymbol{k})$ son los versores del triedro en coordenadas cilíndricas. La reacción es, en función de parámetros (λ, μ, ν) desconocidos,

$$\boldsymbol{N} = \lambda\boldsymbol{u}_\rho + \mu\boldsymbol{u}_\varphi + \nu\boldsymbol{k}.$$

A su vez, $\boldsymbol{N}$ debe ser perpendicular a la curva, dada por la ecuación paramétrica en función de φ:

$$\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{u}_\rho + k\varphi\boldsymbol{k}$$

La tangente a la curva es:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\varphi} = a\frac{d\boldsymbol{u}_\rho}{d\varphi} + k\boldsymbol{k} = a\boldsymbol{u}_\varphi + k\boldsymbol{k}$$

La condición de normalidad es pues

$$0 = \boldsymbol{N}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{d\varphi} = \mu a + k\nu \quad\Rightarrow\quad \nu = -\frac{a}{k}\mu$$

luego

$$\boldsymbol{N} = \lambda\boldsymbol{u}_\rho + \mu(\boldsymbol{u}_\varphi - \frac{a}{k}\boldsymbol{k}) \qquad (2)$$

La ecuación fundamental de la dinámica es:

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{N} = m\ddot{\boldsymbol{r}} \qquad (3)$$

para desarrollarla debemos obtener la expresión de aceleración:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -a\dot{\varphi}^2\boldsymbol{u}_\rho + a\ddot{\varphi}\boldsymbol{u}_\varphi + k\ddot{\varphi}\boldsymbol{k}; \qquad (4)$$

sustituyendo (1), (2), (4) en (3):

$$-\alpha a\boldsymbol{u}_\rho - (\alpha k\varphi + mg)\boldsymbol{k} + \lambda\boldsymbol{u}_\rho + \mu\boldsymbol{u}_\varphi - \frac{a}{k}\mu\boldsymbol{k} = m(-a\dot{\varphi}^2\boldsymbol{u}_\rho + a\ddot{\varphi}\boldsymbol{u}_\varphi + k\ddot{\varphi}\boldsymbol{k})$$

e igualando componentes:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\alpha a+\lambda &=& -ma\dot{\varphi}^2 \\ \mu &=& ma\ddot{\varphi} \\ -(\alpha k\varphi+mg)-\frac{a}{k}\mu &=& mk\ddot{\varphi} \end{array}\right. \tag{5}$$

Eliminando $\ddot{\varphi}$ entre (5_2) y (5_3):

$$-(\alpha k\varphi+mg)=\frac{a}{k}\mu+\frac{k}{a}\mu=\mu\frac{a^2+k^2}{ak}$$

luego

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mu &=& -\frac{ak}{a^2+k^2}(\alpha k\varphi+mg) \\ \lambda &=& \alpha a-ma\dot{\varphi}^2 \end{array}\right.$$

Estos parámetros permiten calcular la reacción (2) para valores de $(\varphi,\dot{\varphi})$ dados.

2.- Eliminando μ entre (5_2) y (5_3):

$$mk\ddot{\varphi}+\frac{a}{k}(ma\ddot{\varphi})+\alpha k\varphi=-mg$$

y simplificando

$$\ddot{\varphi}+\frac{\alpha}{m}\frac{k^2}{k^2+a^2}\varphi=-g\frac{k}{k^2+a^2} \tag{6}$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de segundo grado, cuya solución se obtiene como suma de la general de la homogénea (φ_h) y una particular de la completa (φ_p):

$$\varphi=\varphi_h+\varphi_p \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \varphi_h &=& A\cos(\omega t+\delta); \quad \omega=\sqrt{\frac{\alpha}{m}\frac{k^2}{k^2+a^2}} \\ \varphi_p &=& -\frac{mg}{\alpha k} \end{array}\right.$$

resultando

$$\varphi=-\frac{mg}{\alpha k}+A\cos(\omega t+\delta)$$

Obtenemos las constantes A y δ mediante las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} 0=\varphi(0)=-\frac{mg}{\alpha k}+A\cos\delta \\ 0=\dot{\varphi}(0)=-A\omega\operatorname{sen}\delta \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \delta=0; \quad A=\frac{mg}{\alpha k}$$

La expresión final es pues:

$$\boxed{\varphi(t)=\frac{mg}{\alpha k}(-1+\cos\omega t)}$$

Se trata de un movimiento armónico, oscilatorio, alrededor de $\varphi_0 = -mg/(\alpha k)$.

Otra forma para haber obtenido este último resultado sería proyectando la ecuación dinámica (3) según la tangente:

$$\underbrace{\boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{d\varphi}}_{Q_\varphi} + \underbrace{\boldsymbol{N} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{d\varphi}}_{=0} = m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{d\varphi}$$

$$Q_\varphi = -\alpha k^2 \varphi - mgk$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{d\varphi} = (a^2 + k^2)\ddot{\varphi}$$

Resulta pues

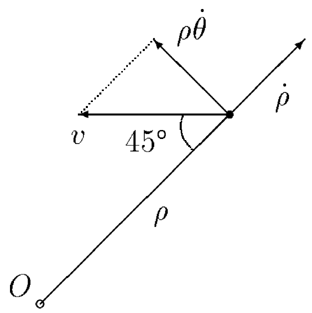
$$m(a^2 + k^2)\ddot{\varphi} + \alpha k^2 \varphi = -mgk,$$

ecuación equivalente a (6).

Ejercicio nº 2.-

Por la simetría existente, las moscas forman constantemente un cuadrado con centro en el origen de coordenadas O. El vector posición de cada una de ellas lleva siempre la dirección de la diagonal del cuadrado y forma 45° con la velocidad. Por tanto, las componentes de la velocidad en polares son:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\frac{v}{\sqrt{2}}, \\ \rho\dot{\theta} &= \frac{v}{\sqrt{2}}; \end{aligned}$$



eliminando v entre las dos expresiones,

$$\rho\dot{\theta} = -\dot{\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\dot{\theta},$$

ecuación en variables separadas que admite una integración inmediata; integrando entre ($\theta_0 = 0,\ \rho_0 = a\sqrt{2}$) y una posición genérica ($\theta,\ \rho$):

$$\ln\left(\frac{\rho}{a\sqrt{2}}\right) = -\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = a\sqrt{2}e^{-\theta}}$$

Esta es la ecuación intrínseca de la trayectoria, que corresponde a una espiral logarítmica. Para obtener las ecuaciones horarias, empleamos el dato de que la velocidad v es constante. Desarrollando las componentes de la velocidad:

$$\dot{\rho} = -a\sqrt{2}\dot{\theta}e^{-\theta}; \quad \rho\dot{\theta} = a\sqrt{2}e^{-\theta}\dot{\theta}$$

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2}\dot{\theta}\rho = 2a\dot{\theta}e^{-\theta}$$

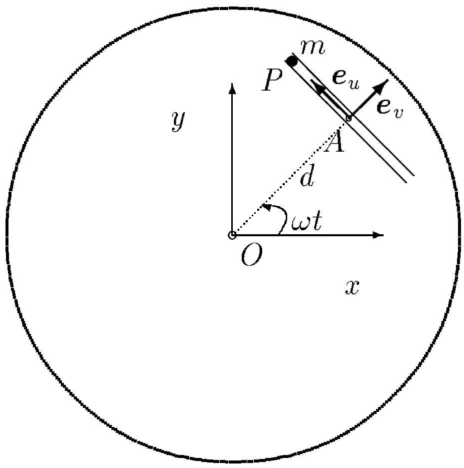
Integrando,

$$vt = -2ae^{-\xi}\Big|_0^{\theta} = -2a(e^{-\theta} - 1)$$

y despejando,

$$e^{-\theta} = 1 - \frac{vt}{2a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = \ln\left(\frac{2a}{2a - vt}\right); \quad \rho = \frac{2a - vt}{\sqrt{2}}}$$

Ejercicio nº 3.-



1.- La ley $u(t)$ define el movimiento relativo a la ranura, que a su vez tiene un movimiento solidario al disco. Denominamos $\boldsymbol{e}_u$ al versor en la dirección de la ranura, y $\boldsymbol{e}_v$ en la dirección normal a la misma. Expresamos en primer lugar las coordenadas (absolutas) del punto P:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = d\cos\omega t - u \operatorname{sen}\omega t \\ \\ y = d\operatorname{sen}\omega t + u\cos\omega t \end{array} \right. \qquad (1)$$

derivando éstas,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -(d\omega + \dot{u})\operatorname{sen}\omega t - u\omega\cos\omega t \\ \\ \dot{y} = (d\omega + \dot{u})\cos\omega t - u\omega\operatorname{sen}\omega t \end{array} \right. \qquad (2)$$

y proyectando sobre las direcciones (u, v):

$$\left\{ \begin{array}{l} v_u = -\dot{x}\operatorname{sen}\omega t + \dot{y}\cos\omega t = d\omega + \dot{u} \\ \\ v_v = \dot{x}\cos\omega t + \dot{y}\operatorname{sen}\omega t = -u\omega \end{array} \right. \qquad (3)$$

Por tanto las componentes de la velocidad (absoluta) pedidas son

$$\boxed{v_u = d\omega + \dot{u}; \qquad v_v = -u\omega} \qquad (4)$$

Derivando de nuevo (2),

$$\begin{cases} \ddot{x} = -(d\omega^2 + 2\dot{u}\omega)\cos\omega t - (\ddot{u} - u\omega^2)\operatorname{sen}\omega t \\ \\ \ddot{y} = -(d\omega^2 + 2\dot{u}\omega)\operatorname{sen}\omega t + (\ddot{u} - u\omega^2)\cos\omega t \end{cases} \tag{5}$$

y proyectando otra vez

$$\begin{cases} a_u = -\ddot{x}\operatorname{sen}\omega t + \ddot{y}\cos\omega t = \ddot{u} - u\omega^2 \\ \\ a_v = \ddot{x}\cos\omega t + \ddot{y}\operatorname{sen}\omega t = -d\omega^2 - 2\dot{u}\omega \end{cases} \tag{6}$$

es decir,

$$\boxed{a_u = -\omega^2 u + \ddot{u}; \quad a_v = -\omega^2 d - 2\omega\dot{u}}$$

Al igual que antes, observamos que estas componentes lo son de la aceleración *absoluta*, por se podrán emplear directamente para expresar las ecuaciones de la dinámica en las direcciones respectivas.

2.- Si existe un resorte en la ranura, se obtiene la ecuación pedida expresando la ecuación fundamental de la dinámica en la dirección de la ranura:

$$-ku = ma_u \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{u} + (k - m\omega^2)u = 0} \tag{7}$$

3.- La solución de esta ecuación depende del signo de $k^* = k - m\omega^2$, existiendo tres casos posibles:

a. si $k^* < 0$ (es decir, $\omega^2 > k/m$), la solución general es exponencial:

$$u(t) = C_1 e^{\sqrt{|k^*/m|}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{|k^*/m|}\,t}$$

y particularizando para las condiciones iniciales dadas,

$$u(t) = u_0 \cosh\left(\sqrt{|k^*/m|}\,t\right).$$

Esta solución crece indefinidamente con t, por lo que no origina un movimiento oscilatorio.

b. si $k^* = 0$ (es decir, $\omega^2 = k/m$), la solución general es

$$u(t) = C_1 t + C_2$$

y con las condiciones iniciales dadas,

$$u(t) = u_0.$$

Es decir, la partícula se mantendría inmóvil respecto a la ranura en su posición relativa inicial.

c. si $k^* > 0$ (es decir, $\omega^2 < k/m$), la solución general es

$$u(t) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{k^*/m}\, t) + C_2 \cos(\sqrt{k^*/m}\, t)$$

y para las condiciones iniciales dadas,

$$u(t) = u_0 \cos(\sqrt{k^*/m}\, t).$$

Esta solución corresponde a un movimiento oscilatorio armónico relativo a la ranura.

4.- Para hallar la reacción basta expresar la ecuación fundamental de la dinámica en dirección normal a la ranura:

$$R_v = m a_v = -m(\omega^2 d + 2\omega \dot{u}) \tag{8}$$

Puesto que se conoce el movimiento $u(t)$, se puede eliminar $\dot{u}$ de esta expresión:

$$\dot{u} = -u_0 \sqrt{k^*/m} \operatorname{sen}(\sqrt{k^*/m}\, t)$$

$$\boxed{R_v = -m\left(\omega^2 d - 2\omega u_0 \sqrt{k^*/m} \operatorname{sen}(\sqrt{k^*/m}\, t)\right)}$$

5.- La energía cinética es, empleando (4):

$$T = \frac{1}{2} m(\omega^2 d^2 + \dot{u}^2 + 2\omega d\dot{u} + \omega^2 u^2) \tag{9}$$

Por lo que la energía total resulta

$$T + V = \frac{1}{2} m(\omega^2 d^2 + \dot{u}^2 + 2\omega d\dot{u} + \omega^2 u^2) + \frac{1}{2} k u^2 \tag{10}$$

No se conserva la energía total del sistema, debido a que para mantener el movimiento es necesario realizar un trabajo, mediante un par que mantenga el movimiento con velocidad angular constante del disco, lo que varía la energía del sistema.

A pesar de esto, sí es posible obtener una integral primera del movimiento, aunque esta constante no tendrá el valor de la energía total. Para ello desarrollamos la expresión del teorema de la energía cinética,

$$0 = dT - dW,$$

considerando que la fuerza en dirección v viene dada por (8) y los desplazamientos elementales por (4):

$$0 = dT + m(\omega^2 d + 2\omega \dot{u})(-u\omega)dt + ku(d\omega + \dot{u})dt$$

y empleando (9),

$$0 = m\dot{u}\,d\dot{u} - m\omega^2 u\,du + ku\,du + \omega d \underbrace{[m\ddot{u} + (k - m\omega^2)u]}_{=0}\,dt$$

donde se ha utilizado también la ecuación de la dinámica (7). La expresión resultante se integra directamente para obtener

$$\frac{1}{2}m\dot{u}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 u^2 + \frac{1}{2}ku^2 = \text{cte.}$$

Comprobamos que la constante resultante difiere de la energía total (10), aunque tiene también dimensiones de energía.

Por último, las condiciones iniciales del enunciado permiten calcular la constante en la integral primera anterior resultando:

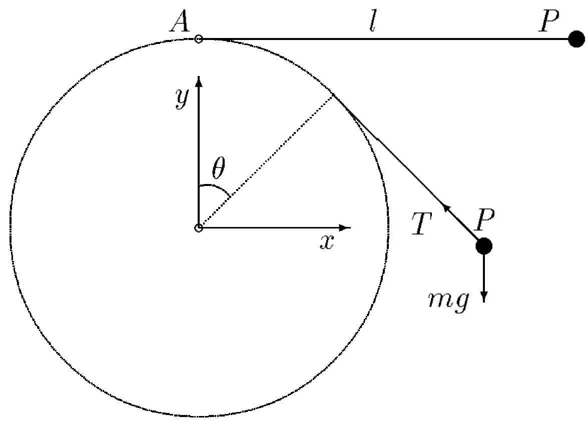
$$\boxed{\frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}(k - m\omega^2)(u^2 - u_0^2) = 0}$$

Como comprobación final observamos que si se deriva esta expresión se obtiene directamente (7) como cabe esperar.

Ejercicio n$^{\underline{\text{o}}}$ 4.-

1.- La trayectoria seguida por el punto material es una evolvente de circunferencia:

$$\begin{cases} x = R\,\mathrm{sen}\,\theta + (l - R\theta)\cos\theta \\ y = R\cos\theta - (l - R\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$



La tensión del hilo no realiza trabajo por ser perpendicular a la trayectoria. Estableciendo la constancia de la energía entre el instante inicial y uno genérico:

$$mgR = mgy + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v^2 = 2g(R - y)}$$

En el punto más bajo de la trayectoria ($\theta = \pi/2$):

$$x = R; \quad y = -\left(l - \frac{R\pi}{2}\right)$$

$$v^2 = 2g\left[R\left(1-\frac{\pi}{2}\right)+l\right]$$

2.- Podemos establecer la ecuación fundamental de la dinámica en la dirección normal a la trayectoria (dirección del hilo):

$$T - mg\,\mathrm{sen}\,\theta = m\frac{v^2}{\rho}$$

donde el radio de curvatura en cada instante vale $\rho = l - R\theta$. Para $\theta = \pi/2$ resulta

$$T = mg\frac{3l - R\left(\frac{3\pi}{2}-2\right)}{l - R\frac{\pi}{2}}$$

3.- El hilo alcanza un valor de 30° por encima de la horizontal para

$$\theta_0 = 210° = \frac{7\pi}{6}\,\mathrm{rad}$$

en ese punto las coordenadas valen

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & -\frac{R}{2} - \left(l - \frac{7\pi}{6}R\right)\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_0 & = & -\frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(l - \frac{7\pi}{6}R\right) \end{array}\right.$$

La tensión en dicho punto tiene el valor

$$T = m\frac{2g(R-y_0)}{l - \frac{7\pi}{6}R} - mg\frac{1}{2}$$

y para que $T = 0$ se debe cumplir que

$$\boxed{l = \frac{R}{3}\left(4 + 2\sqrt{3} + \frac{7}{2}\pi\right)}$$