ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS (MADRID)

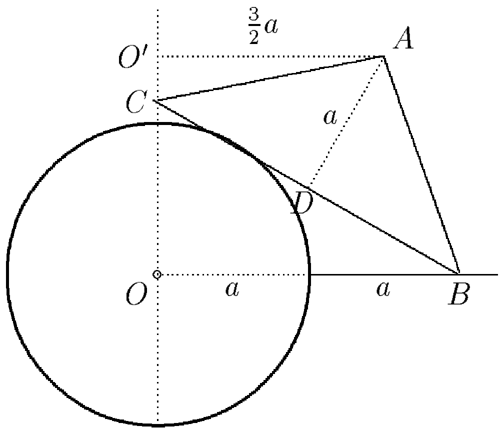
Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (28 de Junio de 1996)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 5º Tiempo: 50 min.

Un cono de vértice A, base circular BC de radio $DB = 2a/\sqrt{3}$ y altura $DA = a$ se mueve en el espacio de forma que la circunferencia del borde de la base del cono rueda sin deslizar sobre una circunferencia fija de radio $OB = 2a$ con centro O. Este punto O es a su vez el centro de una esfera de radio a en la que se apoya y desliza la base del cono.
El movimiento del cono es tal que su vértice A describe otra circunferencia de centro O' y radio $(3/2)a$ (en un plano paralelo a la de centro O), con movimiento uniforme de periodo τ, de forma que que el eje DA del cono se mantiene en todo momento dentro del plano vertical por OB.

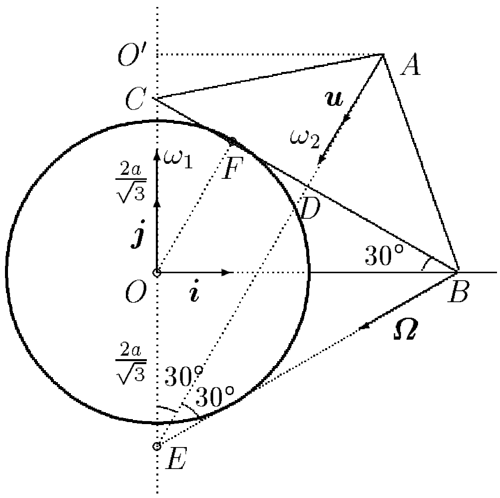


Del movimiento así definido se pide:

1. velocidad del punto C del cono (diametralmente opuesto a B) y aceleración del vértice A del mismo;
2. velocidad y aceleración angular del cono;
3. Axoides del movimiento.

La velocidad del punto B del cono es nula, puesto que rueda sin deslizar, por lo que sabemos que el movimiento del cono es una rotación. Por otra parte, podemos observar que el eje DA del cono gira alrededor del eje OO' describiendo a su vez otro cono, de vértice E, intersección de ambos ejes. Este punto es también de velocidad nula, por lo que el eje instantáneo de rotación es BE.

Sea F el contacto entre cono y esfera. En el triángulo rectángulo OFB observamos que $\operatorname{sen}(\widehat{OBF}) = a/2a$, luego $\widehat{OBF} = 30°$. De aquí se puede deducir que el punto C está situado precisamente sobre el eje OO'. Por otra parte, $\widehat{DEC} = 30°$, por lo que $EC = 4a/\sqrt{3}$, resultando que E es simétrico de C respecto de O y el eje BE es también tangente a la esfera.



1.- Tomaremos un triedro a derechas con los versores $\boldsymbol{i}$ según OB, $\boldsymbol{j}$ según OO' y $\boldsymbol{k}$ perpendicular al papel hacia fuera.

El movimiento queda definido por la velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ dirigida según BE, que puede suponerse descompuesta en la suma del giro $\omega_1\boldsymbol{j}$ del plano de la figura alrededor de OO' y de $\omega_2\boldsymbol{u}$ alrededor del eje del cono AD, siendo $\boldsymbol{u}$ el versor según esta dirección. El dato del periodo indica que $\omega_1 = 2\pi/\tau$. El valor de ω_2 se deduce al imponer la condición de rodadura en B:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{v}_B = \omega_1 \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{OB} + \omega_2 \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{DB} = -2a\omega_1 \boldsymbol{k} + \frac{2a}{\sqrt{3}}\omega_2 \boldsymbol{k}$$

por lo que $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_1 = 2\sqrt{3}\pi/\tau$.

La velocidad del punto del cono C se calcula como

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{EC} = \omega_2 \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{DC} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{v}_C = -2a\omega_1 \boldsymbol{k} = -\frac{4a\pi}{\tau}\boldsymbol{k}} \tag{1}$$

donde el signo $(-)$ indica que va dirigida hacia dentro del papel.

Observación: El hecho de que el punto geométrico diametralmente opuesto al de rodadura B esté siempre en el mismo punto del eje OO' no quiere decir que la velocidad del punto del cono C sea nula: ésta última no debe confundirse con la velocidad del punto geométrico o velocidad de sucesión (que es nula).

La aceleración de A se halla trivialmente al observar que su movimiento es circular alrededor de O':

$$\boxed{\boldsymbol{a}_A = -\omega_1^2 \frac{3a}{2}\boldsymbol{i} = -\frac{6a\pi^2}{\tau^2}\boldsymbol{i}} \tag{2}$$

2.- La expresión de la velocidad angular es

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega_1 \boldsymbol{j} + \omega_1 \sqrt{3}\boldsymbol{u}$$

y teniendo en cuenta que $\boldsymbol{u} = -(1/2)\boldsymbol{i} - (\sqrt{3}/2)\boldsymbol{j}$,

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega} = \frac{2\pi}{\tau}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\boldsymbol{j}\right)} \tag{3}$$

El módulo vale $\Omega = \omega_1 = 2\pi/\tau$, y comprobamos que forma 30° con BO, estando dirigida según BE.

La aceleración angular se obtiene considerando que el triedro descrito gira con velocidad $\omega_1 \boldsymbol{j}$:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \omega_1 \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{\Omega} = \omega_1^2 \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{2\sqrt{3}\pi^2}{\tau^2}\boldsymbol{k}} \tag{4}$$

3.- Los axoides son sendos conos que comparten en todo momento la generatriz común EB. El axoide fijo es el cono de eje EO y semiángulo 30°, mientras que el móvil tiene por eje EA y semiángulo 30°, rodando sin deslizar sobre el fijo por dentro de él.