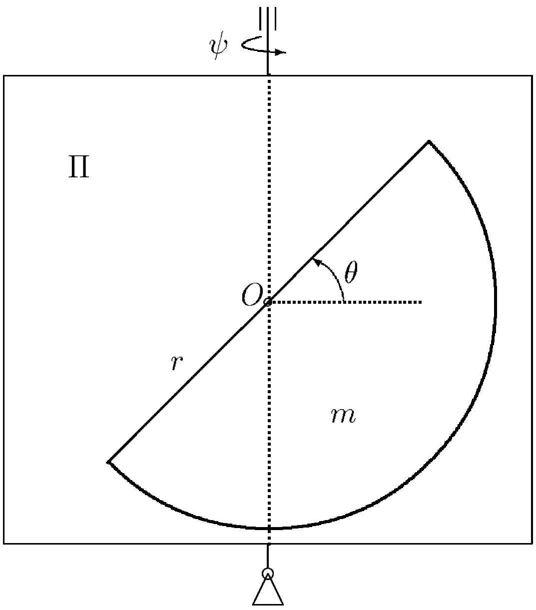
Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (28 de Junio de 1996)

Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

Ejercicio 3º Tiempo: 50 min.

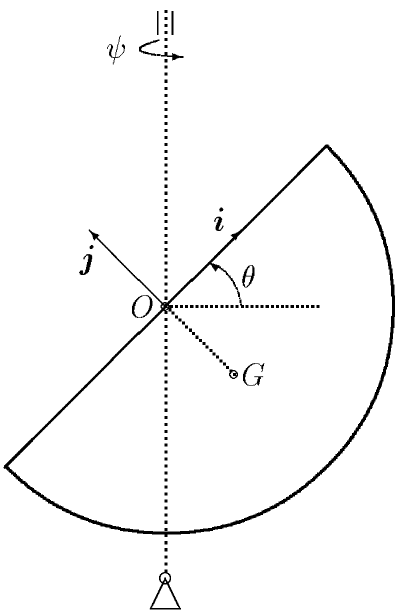
Una placa semicircular homogénea, de masa m y radio r, puede girar libremente en su propio plano vertical Π alrededor del centro O de su borde diametral. A su vez el plano Π (que no tiene masa) puede girar libremente alrededor de un eje vertical que pasa por O. Se abandona la placa en reposo respecto de Π, con su borde diametral formando un ángulo θ_0 con la horizontal, mientras que Π tiene una velocidad angular $\dot{\psi}(0) = \omega_0$.
Se pide:



1. Expresión, en un instante genérico, del momento cinético respecto de O y de la energía cinética.
2. Ecuaciones diferenciales del movimiento de la placa.
3. describir el movimiento resultante, en concreto:
   (a) ley $\dot{\psi}(t)$ de la velocidad angular del plano;
   (b) demostrar que el movimiento $\theta(t)$ es pendular, obteniendo la longitud del péndulo simple equivalente.

Comenzamos calculando las magnitudes de geometría de masas precisas. Consideramos el triedro $Oxyz$ móvil con el disco, con los versores $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ indicados en la figura y $\boldsymbol{k}$ perpendicular al papel. El Centro de Masas G está situado en

$$\boldsymbol{OG} = -\frac{4r}{3\pi}\boldsymbol{j}.$$



Por simetría, se deduce que los ejes $Oxyz$ son principales de inercia, teniendo los momentos de inercia una expresión similar a los del disco completo:

$$I_x = \frac{1}{4}mr^2; \quad I_y = \frac{1}{4}mr^2; \quad I_z = \frac{1}{2}mr^2. \tag{1}$$

El sistema tiene 2 grados de libertad, ψ y θ. En función de ellos la velocidad angular del disco es

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{k} + \dot{\psi}(\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j}). \tag{2}$$

1.- El momento cinético se halla directamente a partir de (1) y (2):

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{4}mr^2\dot{\psi}(\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j}) + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}\,\boldsymbol{k} \tag{3}$$

La energía cinética se calcula inmediatamente,

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}mr^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2\right) \tag{4}$$

2.- La función Lagrangiana vale

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}mr^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{4r}{3\pi}mg\cos\theta \tag{5}$$

de donde se deducen inmediatamente, derivando, las dos ecuaciones de Lagrange siguientes:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = \frac{1}{4}mr^2\dot{\psi} = \text{cte.} \tag{6}$$

$$\frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} + \frac{4r}{3\pi}mg\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{7}$$

3.- Como se deduce de las dos ecuaciones anteriores, el movimiento queda desacolpado en sus dos grados de libertad. El giro alrededor de la vertical del plano Π es una coordenada cíclica (6), y además constante, $\dot{\psi}(t) = \omega_0$.

En cuanto al movimiento $\theta(t)$, definido por (7), se ve inmediatamente que es un movimiento pendular, por analogía a la ecuación de un péndulo simple,

$$l\ddot{\theta} + g\operatorname{sen}\theta = 0,$$

siendo la longitud equivalente

$$l_{\text{eq}} = \frac{(1/2)mr^2}{(4r/3\pi)m} = \frac{3}{8}\pi r$$