Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

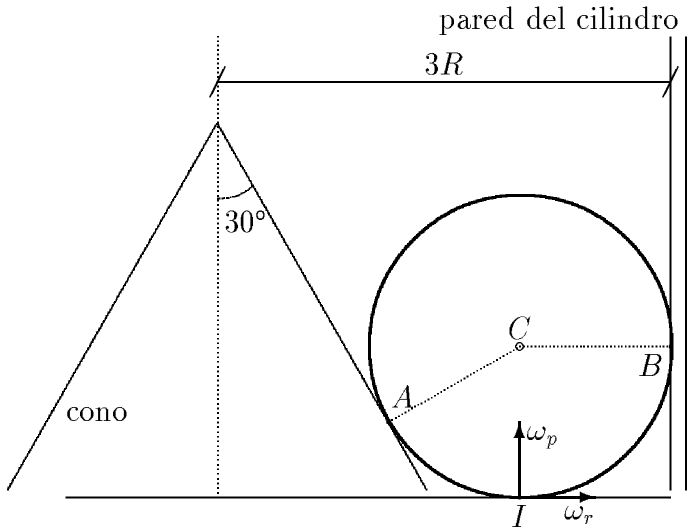
Mecánica

1$^{\underline{\text{er}}}$ EXAMEN PARCIAL (9 de febrero de 1996)

Apellidos *Nombre* $N^{\underline{o}}$ *Grupo*

Ejercicio 4º Tiempo: 60 min.

En el sistema mecánico de la figura (correspondiente a un rodamiento de bolas) el cilindro de radio interior $3R$ y el cono de semiángulo 30° son coaxiales y giran respecto de su eje independientemente. Entre los dos está encajada una esfera de radio R que rueda sin deslizar sobre el plano fijo inferior, apoyándose asimismo en el cono y en el cilindro sin deslizamiento. El movimiento de éstos es tal que los puntos de contacto A y B tienen constantemente velocidades $-V$ y $+V$ respectivamente (positivas en sentido hacia fuera del plano del papel). Se pide, justificando adecuadamente:



1. describir el movimiento, discutiendo si el eje del movimiento helicoidal tangente corta al eje del cono en un punto fijo y definiendo los axoides;
2. velocidades angulares de rodadura y pivotamiento de la esfera sobre el plano inferior, así como la velocidad del centro (C) de ésta;
3. aceleración angular de la esfera;
4. aceleración del punto de la esfera en contacto con el plano;

1.- El movimiento de la esfera está definido mediante la rodadura sin deslizamiento en tres puntos distintos: A, B e I. La velocidad de los puntos de la esfera en contacto es igual que la de los puntos de las superficies tangentes respectivas: $-V$, $+V$ y 0.

El movimiento instantáneo es una rotación alrededor de un eje que pasa por I, al anularse la velocidad de este punto. Si el eje instantáneo de rotación fuese paralelo al eje común de cono y cilindro la velocidad de los puntos A y B sería distinta en módulo; por tanto debe tener una cierta inclinación respecto del eje de revolución cortando a éste en un punto fijo, ya que las sucesivas posiciones y campos de velocidades de la esfera se obtienen por revolución alrededor del eje del cono. Llamaremos V a este punto.

El axoide fijo es por tanto un cono, de eje el común a cono y cilindro y generatriz VI. Para caracterizar el axoide móvil observamos que el eje de rotación VI forma siempre el mismo ángulo con VC, por lo que el lugar geométrico buscado es un cono de eje VC y generatriz VI.

2.- Emplearemos un triedro $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, siendo $\boldsymbol{i}$ horizontal, $\boldsymbol{j}$ vertical y $\boldsymbol{k}$ normal al papel (hacia fuera). El vector velocidad de rotación será $\boldsymbol{\Omega} = \omega_r\,\boldsymbol{i} + \omega_p\,\boldsymbol{k}$. Las velocidades de los puntos A y B son

$$\begin{aligned} v_A &= -V = \omega_r \frac{R}{2} + \omega_p R\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ v_B &= +V = \omega_r R - \omega_p R. \end{aligned}$$

Despejando entre estas ecuaciones se obtiene

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_p &= -\frac{V}{R}\frac{3}{1+\sqrt{3}} = -\frac{V}{R}\frac{3}{2}(\sqrt{3}-1); \\ \omega_r &= -\frac{V}{R}\frac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = -\frac{V}{R}\frac{1}{2}(3\sqrt{3}-5). \end{aligned}} \qquad (1)$$

Una vez conocida $\boldsymbol{\Omega}$, La velocidad de C se calcula inmediatamente:

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{IC} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_C = \omega_r R = -\frac{V}{2}(3\sqrt{3}-5);} \qquad (2)$$

puesto que ω_r es negativo (es decir, sentido distinto al representado en la figura), la velocidad de C es hacia dentro del papel.

El ángulo α que forma $\boldsymbol{\Omega}$ con el eje de revolución viene dado por $\tan\alpha = \omega_r/\omega_p = (2-\sqrt{3})/3$. El punto fijo V está situado por debajo del plano horizontal a una distancia igual a $2R/\tan\alpha = 6R/(2-\sqrt{3})$.

3.- El vector $\boldsymbol{\Omega}$ gira a lo largo del movimiento alrededor del eje de revolución del sistema, con una cierta velocidad $\omega\,\boldsymbol{j}$. Para calcular ésta observamos que el centro C de la esfera describe una circunferencia alrededor del eje de revolución, con la velocidad v_C calculada antes (2). Por tanto $\omega = v_C/(2R) = \omega_r/2$. La aceleración angular es pues

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \omega\,\boldsymbol{j} \wedge (\omega_r\,\boldsymbol{i} + \omega_p\,\boldsymbol{j}) = \frac{\omega_r^2}{2}\boldsymbol{k} = \frac{V^2}{R^2}\frac{26-15\sqrt{3}}{4}. \qquad (3)$$

4.- Aplicaremos la expresión de la aceleración a partir del punto C cuyo movimiento es conocido:

$$\boldsymbol{a}_I = \boldsymbol{a}_C + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{CI} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{CI}).$$

Considerando que $\boldsymbol{a}_C = -2R\omega^2\,\boldsymbol{i} = -R(\omega_r^2/2)\boldsymbol{i}$; $\boldsymbol{CI} = -R\,\boldsymbol{j}$; y los valores de $\boldsymbol{\Omega}$ y $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ definidos en (1) y (3), sustituyendo en la expresión anterior resulta

$$\boldsymbol{a}_I = -R\omega_r\omega_p\,\boldsymbol{i} + R\omega_r^2\,\boldsymbol{j}$$

y operando,

$$\boxed{\boldsymbol{a}_I = \frac{V^2}{2R}\left[-(21-12\sqrt{3})\boldsymbol{i} + (26-15\sqrt{3})\boldsymbol{j}\right].}$$