Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

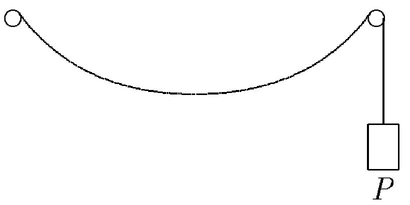
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO DE FEBRERO (19 de Enero de 1996)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

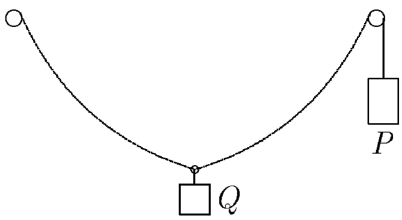
Ejercicio 6º Tiempo: 60 min.

Un transbordador salva una luz de 549 m entre apoyos a igual altura, mediante un carro que circula colgado de cables guía, cada uno de los cuales pesa 3.47 kg/m. Los cables están fijos en un extremo y en el otro soportan un contrapeso de $P = 9070$ kg cada uno mediante una polea sin rozamiento. Se pide:

1. Flecha máxima que se produce cuando los cables están sometidos únicamente a su propio peso, admitiendo la hipótesis de que al estar muy tensos, se puede suponer la carga constante por unidad de abscisa horizontal.
2. Colgado de los cables circula un carro con una carga de $Q = 1058$ kg por cable. Se desea calcular la flecha que se produce cuando el carro está en el centro del vano, sin admitir la simplificación del punto anterior, debiendo considerarse el peso del cable constante por unidad de longitud del mismo.
   (a) Plantear las ecuaciones para el cálculo de la flecha, indicando claramente el proceso de resolución numérica a seguir.
   (b) Obtener el valor numérico de la flecha, resolviendo las ecuaciones anteriores. Para la resolución numérica puede tomarse como valor inicial de las iteraciones el parámetro de la catenaria $a = 2000$ m, o mejor aún, el valor de a que se deduce del apartado 1. Bastará con realizar dos iteraciones por Newton.



Cables sin carro



Cables cargados con carro

(NOTA: los datos corresponden al transbordador del Niágara (1916) del Ing. de Caminos Leonardo Torres Quevedo)

El contrapeso P define la tensión del cable en el extremo, que es la tensión máxima soportada por el cable. Esta disposición asegura que el cable estará sometido siempre a la misma tensión, independientemente de que esté más o menos cargado por el carro, lo que permite garantizar su seguridad.

1.- Al considerarse el peso constante por unidad de abscisa horizontal, la configuración de equilibrio del cable es una parábola. Para resolverla, calculamos en primer lugar la tensión horizontal, teniendo en cuenta que la vertical en el extremo es $T_v = qL/2$:

$$T_0 = \sqrt{P^2 - (qL/2)^2} = 9019.85 \text{ kg}$$

y aplicando la ecuación de la parábola:

$$z = \frac{1}{2}\frac{q}{T_0}x^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = \frac{1}{2}\frac{q}{T_0}(L/2)^2 = 14.49\,\mathrm{m}}$$

OBSERVACIÓN.- Si no hubiéramos realizado la simplificación que propone el enunciado, el cable formaría una catenaria, de ecuación $z = a\cosh(x/a)$. Para obtener el valor de a se establece la tensión P en el extremo,

$$qa\cosh\left(\frac{L/2}{a}\right) = P.$$

Esta ecuación trascendente no se puede resolver directamente, siendo necesario emplear un método numérico iterativo. Empleando el método de Newton se obtiene $a = 2599.33\,\mathrm{m}$. Finalmente, la flecha calculada por este método sería $f = a\cosh\left((L/2)/a\right) - a = 14.51\,\mathrm{m}$, valor que es muy próximo al obtenido arriba para la parábola.

2.a.- Cuando el carro está en el medio del cable se producen dos arcos simétricos de catenaria. El vértice de cada una de estas catenarias está situado a una distancia α del punto medio, en principio desconocida. Para resolver el problema se precisa calcular tanto α como el parámetro a de la catenaria, para lo que se necesitan 2 ecuaciones.

La primera ecuación que se puede establecer es la tensión vertical del cable en el punto de suspensión del carro, que es igual a la mitad del peso del mismo (por simetría):

$$qa\,\mathrm{senh}\left(\frac{\alpha}{a}\right) = \frac{Q}{2} \tag{1}$$

Otra ecuación corresponde a la tensión del cable en el extremo, que seguirá valiendo P:

$$qa\cosh\left(\frac{\alpha + L/2}{a}\right) = P \tag{2}$$

Con estas 2 ecuaciones se puede plantear la resolución numérica simultánea de las mismas (2 ecuaciones con 2 incógnitas). Sin embargo, si el cálculo se realiza manualmente, es conveniente simplificar el sistema para eliminar una de las incógnitas y dejarlo reducido a una única ecuación. Esto se realiza fácilmente desarrollando el coseno hiperbólico de la suma en (2) y empleando (1) para eliminar α. La ecuación resultante, expresada como $\phi(a) = 0$, es

$$\phi(a) = \sqrt{(qa)^2 + (Q/2)^2}\cosh\left(\frac{L/2}{a}\right) + \frac{Q}{2}\,\mathrm{senh}\left(\frac{L/2}{a}\right) - P = 0 \tag{3}$$

Para obtener a, la ecuación anterior se puede resolver numéricamente por el método iterativo de Newton. Para las iteraciones se emplea la derivada de (3) que vale:

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{da} = {} & \frac{q^2 a}{\sqrt{(qa)^2 + (Q/2)^2}}\cosh\left(\frac{L/2}{a}\right) + \\ & \sqrt{(qa)^2 + (Q/2)^2}\left(-\frac{L/2}{a^2}\right)\mathrm{senh}\left(\frac{L/2}{a}\right) + \frac{Q}{2}\left(-\frac{L/2}{a^2}\right)\cosh\left(\frac{L/2}{a}\right)\end{aligned} \tag{4}$$

El proceso de resolución numérica sigue el esquema iterativo siguiente:

1. evalúa $\phi_n = \phi|_{a=a_n} = \phi(a_n)$ (ecuación (3))
   evalúa $\left(\dfrac{d\phi}{da}\right)_n = \left.\dfrac{d\phi}{da}\right|_{a=a_n}$ (ecuación (4))
2. $\Delta a_n = -\dfrac{\phi_n}{(d\phi/da)_n}$
   $a_{n+1} = a_n + \Delta a_n$
3. si $|\Delta a_n| > \epsilon$,
   $n \leftarrow n+1$; vuelve a 1.

2.b.- Es posible emplear el algoritmo anterior con la ayuda de una calculadora de bolsillo, bien manualmente o bien programando el método mediante el lenguaje de la calculadora (lenguajes de HP, Basic u otro cualquiera).

A continuación se detalla el resultado de las iteraciones mediante un programa realizado en basic, partiendo del valor inicial $a_0 = 2000\,\mathrm{m}$:

```
          Iteraciones:
          -----------
a= 2000        phi=-1971.375       (d/da)phi= 3.390196   da= 581.493
a= 2581.493    phi= 10.52168       (d/da)phi= 3.422276   da=-3.074467
a= 2578.418    phi= 8.567521E-04   (d/da)phi= 3.422162   da=-2.503541E-04

  =================================================================
  valor final: 2578.418    (error en phi= 8.567521E-04 )
  =================================================================
```

Como se ve, basta con 2 iteraciones para obtener un resultado prácticamente exacto.

Una vez conocido el valor de a, a partir de (1) se obtiene $\alpha = 152.36\,\mathrm{m}$. Finalmente, la flecha se calcula como diferencia de ordenadas entre el extremo y el centro:

$$f = a\cosh\left(\frac{\alpha + L/2}{a}\right) - a\cosh\left(\frac{\alpha}{a}\right) \quad\Rightarrow\quad \boxed{f = 30.91\,\mathrm{m}}$$

El resultado se puede dibujar para comprobar la configuración del cable en ambos casos: