Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

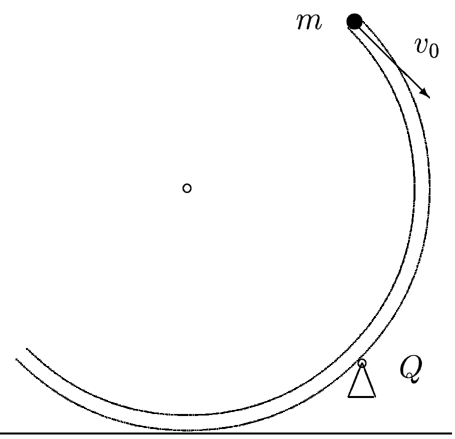
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO DE FEBRERO (19 de Enero de 1996)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 5º Tiempo: 45 min.

Un semiaro de masa m y radio r se halla en un plano horizontal, con su punto medio Q fijo. Sobre él se mueve con ligadura bilateral lisa una masa puntual m (igual a la del semiaro). Inicialmente el semiaro está en reposo y la masa puntual en un extremo del mismo, con velocidad v_0. Se pide

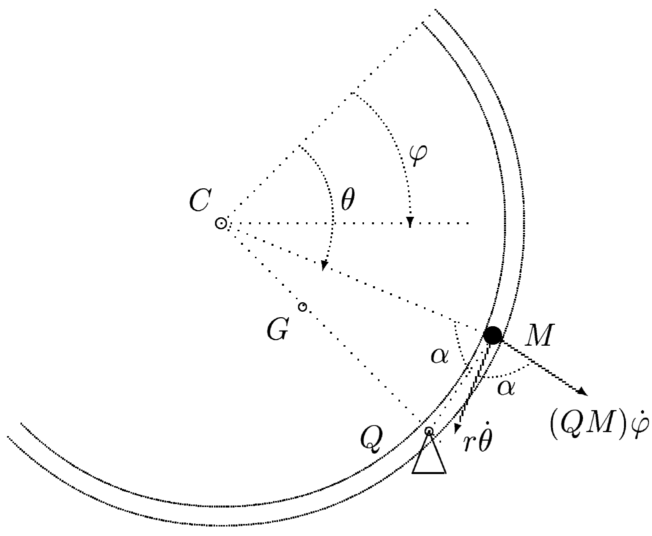


1. Ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema.
2. Integrales primeras.

El sistema tiene 2 g.d.l., para los que tomaremos como coordenadas el ángulo θ que define la posición de la masa puntual respecto del semiaro, y el ángulo φ girado por el semiaro alrededor de Q (positivos ambos en sentido horario).

1.- La energía total se conserva, y al estar el sistema horizontal, coincide con la cinética:

$$E = T = \frac{1}{2} I_Q \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_m^2 \qquad (1)$$



Resolviendo la geometría de masas se obtiene la posición del C.D.M. (G) y los momentos de inercia:

$$CG = \frac{2r}{\pi};$$

$$I_G = I_C - m(CG)^2 = mr^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right);$$

$$I_Q = I_G + m(QG)^2 = 2mr^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

La velocidad de la masa puntual se obtiene como composición del arrastre debido al giro φ del semiaro y la rotación relativa θ. Teniendo en cuenta que ambos vectores forman un ángulo $\alpha = \pi/4 + \theta/2$ y que $QM = 2r \cos\alpha$ (ver figura), la expresión es:

$$v_m^2 = r^2 \dot{\theta}^2 + 4r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + 4r^2 \dot{\theta}\dot{\varphi} \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

Operando con estas expresiones en (1) e igualando la constante al valor inicial de la energía, resulta

$$\boxed{mr^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} mr^2 \left[\dot{\theta}^2 + 2\dot{\varphi}^2 (1 - \operatorname{sen}\theta) + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}(1 - \operatorname{sen}\theta)\right] = \frac{1}{2} m v_0^2} \qquad (2)$$

Por otra parte, se verifica la constancia del momento cinético respecto a Q. Su expresión es

$$\boxed{2mr^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\dot{\varphi}+mr^2\left[2\dot{\varphi}(1-\operatorname{sen}\theta)+\dot{\theta}(1-\operatorname{sen}\theta)\right]=mv_0r} \tag{3}$$

Las dos expresiones anteriores constituyen las ecuaciones diferenciales que definen el movimiento.

2.- Las integrales primeras son precisamente las ecuaciones (2) y (3) obtenidas en el apartado anterior, por lo que constituyen también la respuesta a este apartado.

OBSERVACIÓN.- Podría haberse resuelto igualmente el ejercicio mediante la dinamíca analítica de Lagrange. En este caso, se comprobaría que la Lagrangiana es $L=T$, conservándose la energía T (todas las fuerzas son conservativas, enlaces lisos y escleronómos) y $\partial L/\partial\dot{\varphi}$ (al ser φ cíclica). Estas dos integrales primeras resultan en las mismas ecuaciones (2) y (3). Puede obtenerse asimismo una ecuación diferencial (de segundo grado) correspondiente a θ:

$$mr^2\ddot{\theta}+mr^2\ddot{\varphi}(1-\operatorname{sen}\theta)+mr^2\dot{\varphi}^2\cos\theta=0.$$