



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DEL ENSAYO DE TRACCIÓN SIMPLE CON ESTRICCIÓN

INFORME TÉCNICO

CARLOS GARCÍA GARINO
FELIPE GABALDÓN CASTILLO
JOSÉ M^a GOICOLEA RUIGOMEZ
ANIBAL MIRASSO
SILVIA RAICHMAN

Febrero de 2004

PROYECTO PICT 12-03268: EMPLEO DE MÉTODOS NUMÉRICOS Y EXPERIMENTALES PARA DETERMINAR ECUACIONES CONSTITUTIVAS DE METALES EN RÉGIMEN DE GRANDES DEFORMACIONES

FONCyT-AGENCIA NACIONAL DE PROMOCIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA

Índice general

1. Alcance del informe y Objetivos	1.1
2. Interpretación analítica del ensayo	2.1
2.1. Introducción	2.1
2.2. Modelo constitutivo para metales	2.1
2.3. Interpretación analítica	2.2
2.3.1. Distribución de deformaciones en el cuello	2.2
2.3.2. Distribución de tensiones en el cuello	2.5
2.4. Conclusiones	2.9
3. Estado del arte	3.1
3.1. Introducción y Antecedentes	3.1
3.2. Ensayos experimentales y numéricos con probetas de acero	3.2
3.2.1. Estudio experimental	3.2
3.2.2. Modelos numéricos del ensayo de tracción	3.2
3.3. Ensayos experimentales y numéricos con probetas de aluminio	3.7
3.3.1. Probetas y material	3.7
3.3.2. Procedimiento	3.8
3.3.3. Resultados experimentales	3.9
3.3.4. Medidas de microdureza	3.11
3.3.5. Ajuste de la ley constitutiva	3.11
3.3.6. Modelos numérico del ensayo de tracción	3.12
3.4. Simulación computacional	3.14
3.4.1. Definición del modelo	3.14
3.4.2. Resultados	3.15
3.4.3. Distribución de tensiones en el cuello	3.18
3.5. Conclusiones	3.24
4. Tecnología de elementos	4.1
4.1. Introducción	4.1
4.1.1. Comparación con los resultados experimentales	4.1
4.1.2. Evolución de la estricción	4.3
4.1.3. Evolución de la tensión axial media	4.6
4.1.4. Evolución de la carga aplicada	4.8
4.1.5. Distribución de tensiones en el cuello	4.11

4.2. Conclusiones	4.19
5. Sensibilidad frente a la imperfección	5.1
5.1. Introducción	5.1
5.2. Definición de las imperfecciones	5.2
5.3. Resultados del problema	5.2
5.4. Análisis de sensibilidad global	5.3
5.4.1. Análisis local	5.5
5.5. Conclusiones	5.6
6. Sensibilidad frente a la malla	6.1
6.1. Introducción	6.1
6.2. Estricción	6.2
6.3. Tensión axial media	6.6
6.4. Carga axial aplicada	6.11
6.5. Conclusiones	6.16
7. Conclusiones generales y líneas de investigación propuestas	7.1
7.1. Conclusiones	7.1
7.2. Líneas de investigación propuestas	7.2

Capítulo 1

Alcance del informe y Objetivos

En este trabajo se analizan distintos aspectos de la simulación computacional de la formación y desarrollo de una estricción o cuello en el ensayo de tracción simple de metales dúctiles. El interés de este ensayo es que permite calibrar las propiedades constitutivas de los metales para modelos elastoplásticos con grandes deformaciones.

Los antecedentes de este informe son los trabajos iniciales de (Goicolea, 1985) en el contexto de los códigos con integración explícita. Posteriormente estos resultados se reproducen mediante integración implícita en trabajos previos de los autores (Goicolea et al., 1996; Gabaldón, 1999), empleando elementos con deformaciones supuestas (Simó y Armero, 1993; Simó et al., 1993) y el modelo constitutivo desarrollado por (García-Garino, 1993).

En este informe se discute el ensayo de tracción simple con énfasis en los siguientes aspectos:

1. Interpretación analítica del ensayo
2. Estado del arte del problema
3. Simulación computacional del ensayo para probetas cilíndricas de aluminio, y comparación de los resultados numéricos con los resultados experimentales.
4. Estudio de la tecnología de elementos finitos disponible para simular el problema.
5. Análisis de la sensibilidad de los resultados frente al tamaño de las imperfecciones geométricas.
6. Análisis de la sensibilidad de los resultados frente a la discretización espacial de la malla de elementos finitos.

A partir de los resultados obtenidos en estos puntos, el informe finaliza con un capítulo de conclusiones.

Capítulo 2

Interpretación analítica del ensayo

2.1. Introducción

El análisis numérico de sólidos no lineales sometidos a grandes deformaciones, requiere para su validez que el modelo constitutivo tensión-deformación sea fiable. Un procedimiento relativamente sencillo y económico para caracterizar estas leyes en metales dúctiles es el ensayo de tracción simple. Para caracterizar el comportamiento elástico del material, los procedimientos de ensayo están normalizados: ASTM E8-82 (Methods of tension testing of metallic materials), UNE 7474-1 (Materiales Metálicos. Ensayo de Tracción. Parte 1: Método de Ensayo), etc. No obstante, estos ensayos no proporcionan información sobre la ley constitutiva para grandes deformaciones elastoplásticas. Para tener información del comportamiento del material más allá del régimen lineal, es necesario realizar el ensayo de manera que se llegue a la formación de un cuello o estricción en la zona central de la probeta (Goicolea, 1985).

La distribución de tensiones y otros resultados de interés han sido estudiados hace ya tiempo (Bridgman, 1944; Davidenkov y Spiridonova, 1946) en base a algunos resultados experimentales. En este capítulo se presentan algunos de los resultados más importantes, que servirán como marco de referencia para las simulaciones computacionales presentadas en capítulos posteriores.

2.2. Modelo constitutivo para metales

En el ensayo de tracción simple, cuando se ha desarrollado la estricción, se alcanzan grandes deformaciones y grandes rotaciones. Por esta razón, para obtener resultados realistas es necesario emplear elementos con una descripción de la cinemática no lineal, y modelos constitutivos de plasticidad con grandes deformaciones.

El modelo elastoplástico de Von Mises, con endurecimiento isotrópico no lineal adecuada (potencial, saturación, etc.) se emplea habitualmente para re-

presentar el comportamiento de metales. También se han propuesto modelos más complejos para plasticidad de metales, por ejemplo aquellos en los que el endurecimiento depende del camino de carga (Ortiz y Popov, 1983), pero la dificultad de los ensayos experimentales necesarios para su caracterización los han hecho poco utilizados.

Para metales dúctiles y procesos de carga suficientemente lentos, en los cálculos no intervienen los fenómenos relacionados con la mecánica de la fractura y los efectos dinámicos.

2.3. Interpretación analítica

El ensayo de tracción en metales dúctiles pasa por dos etapas desde el punto de vista del estado tensional de la probeta. En la primera, las deformaciones son pequeñas sin que exista una disminución apreciable de la sección transversal, y el estado tensional en el cuello es uniaxial con distribución homogénea de las tensiones. La segunda fase se presenta cuando la tasa de aumento de la tensión debido al endurecimiento del material es menor que la tasa con que disminuye la sección transversal. Entonces se presenta un fenómeno de inestabilidad de tipo geométrico, en el que las deformaciones se concentran en la sección central de la probeta, formándose un cuello o estricción. El flujo plástico queda confinado en esta zona, permaneciendo en estado de carga plástica, y el resto de la probeta queda en descarga elástica. Esta segunda fase se caracteriza porque aparecen tensiones radiales y circunferenciales que dan lugar a un estado tensional triaxial no homogéneo en la zona del cuello.

Para interpretar analíticamente el ensayo de tracción consideraremos una probeta de longitud inicial l_0 y diámetro inicial D_0 . En un instante genérico denominaremos l y D a la longitud y diámetro de dicha probeta, y P a la fuerza aplicada en dirección axial. En lo sucesivo se considera un sistema de coordenadas cilíndricas denotando por u_r y u_z los desplazamientos según el radio y el eje de la probeta, respectivamente.

En la primera fase el estado de tensiones es uniaxial y homogéneo, y la tensión de Cauchy y la deformación logarítmica valen:

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi D^2/4} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_z = \log \frac{l}{l_0} \quad (2.2)$$

2.3.1. Distribución de deformaciones en el cuello

En la segunda fase, en la zona del cuello aparecen tensiones σ_r y σ_θ que dan lugar a un estado triaxial de tensiones, no homogéneo, en el que las ecuaciones (2.1,2.2) no son válidas.

El estado de deformaciones, para un punto genérico de un sólido, se expresa en coordenadas cilíndricas mediante (Timoshenko y Goodier, 1975):

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r} \quad (2.3)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\dot{u}_r}{r} \quad (2.4)$$

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} \quad (2.5)$$

$$\dot{\epsilon}_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{u}_\theta}{\partial r} - \frac{\dot{u}_\theta}{r} \quad (2.6)$$

$$\dot{\epsilon}_{rz} = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial z} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial r} \quad (2.7)$$

$$\dot{\epsilon}_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{u}_\theta}{\partial z} \quad (2.8)$$

Por simetría axial se tiene:

$$\frac{\partial (\cdot)}{\partial \theta} = 0, \quad \dot{u}_\theta = 0 \quad (2.9)$$

Sustituyendo (2.9) en las ecuaciones (2.3) a (2.8) resulta:

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r} \quad (2.10)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \frac{\dot{u}_r}{r} \quad (2.11)$$

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} \quad (2.12)$$

$$\dot{\epsilon}_{r\theta} = \dot{\epsilon}_{\theta z} = 0 \quad (2.13)$$

$$\dot{\epsilon}_{rz} = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial z} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial r} \quad (2.14)$$

En la sección central de la probeta ($z = 0$) se verifica simetría respecto del plano r, θ verificándose:

$$\dot{\epsilon}_{rz} = 0 \quad (2.15)$$

De acuerdo con la hipótesis de que las deformaciones radiales son uniformes (Bridgman, 1944), comprobado experimentalmente mediante ensayos metalográficos que midieron el tamaño de grano (Davidenkov y Spiridonova, 1946) y mediante ensayos de microdureza (Goicolea, 1985), y considerando (2.15) resulta:

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\dot{r}}{r} = \frac{\dot{D}}{D} \quad (2.16)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \dot{\epsilon}_r = \frac{\dot{D}}{D} \quad (2.17)$$

De estas dos ecuaciones, se concluye que en el cuello las deformaciones radiales coinciden con las circunferenciales.

Integrando la ecuación (2.16) con la condición de que la deformación radial es nula al comienzo del ensayo ($D = D_0$), se obtiene:

$$\varepsilon_r = \log \frac{D}{D_0} \quad (2.18)$$

Para obtener la distribución de deformaciones axiales se desprecian las deformaciones elásticas frente a las plásticas y se impone la incompresibilidad del flujo plástico:

$$lD^2 = l_0D_0^2 \Rightarrow (l_0 + u_z)D^2 = l_0D_0^2 \Rightarrow \dot{u}_z = -2l\frac{\dot{D}}{D} \quad (2.19)$$

Sustituyendo este resultado en la expresión (2.12), y utilizando (2.18), se obtiene:

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} = -2\frac{\partial}{\partial l} \left(l\frac{\dot{D}}{D} \right) = -2\frac{\dot{D}}{D} = -2\dot{\varepsilon}_r \Rightarrow \varepsilon_z = -2\log \frac{D}{D_0} \quad (2.20)$$

Por último, la distribución de deformaciones plásticas efectivas en el cuello se obtiene manteniendo la hipótesis de pequeñas deformaciones elásticas considerando que las deformaciones tangenciales son nulas:

$$\varepsilon^p = \int d\varepsilon^p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p} dt = 2 \int_0^t \frac{\dot{D}}{D} dt = -2\log \frac{D}{D_0} \quad (2.21)$$

De esta ecuación y de (2.20) se deduce que el valor de la deformación plástica efectiva coincide con el de la deformación logarítmica axial.

Observación 2.3.1 *Las componentes del tensor de deformación y la deformación plástica efectiva son constantes en la sección del cuello:*

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \varepsilon_\theta = \log \frac{D}{D_0} \\ \varepsilon_z &= -2\log \frac{D}{D_0} \\ \varepsilon^p &= -2\log \frac{D}{D_0} \end{aligned}$$

Observación 2.3.2 *La relación D/D_0 define el estado de deformación en la sección del cuello.*

2.3.2. Distribución de tensiones en el cuello

A partir del estado de deformaciones deducido en el apartado anterior es inmediato comprobar que el tensor de tensiones de Cauchy en la sección del cuello se escribe:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Aplicando el criterio de fluencia de Von Mises al estado de tensiones anterior, resulta:

$$\sigma_z - \sigma_r = Y \quad (2.23)$$

siendo Y la tensión de fluencia uniaxial.

De acuerdo con (Davidenkov y Spiridonova, 1946), la tensión radial siempre es positiva con lo cual se deduce:

$$\sigma_z > Y \quad (2.24)$$

y por lo tanto, el valor medio de la tensión axial también es mayor que la tensión de fluencia:

$$\bar{\sigma}_z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P}{\pi D^2/4} > Y \quad (2.25)$$

Para obtener la distribución de tensiones axiales, en función de la coordenada radial r y del radio de curvatura ρ de la línea de tensiones principales longitudinales, se parte de las ecuaciones diferenciales de equilibrio de un sólido expresadas en coordenadas cilíndricas (Timoshenko y Goodier, 1975):

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \quad (2.27)$$

Como en este problema se verifica $\sigma_r = \sigma_\theta$, y por simetría se cumple que en $z = 0$ es $\sigma_{rz} = 0$, las ecuaciones (2.26) y (2.27) se reescriben:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = 0 \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (2.29)$$

Si se consideran ahora las líneas de tensiones principales σ_1 - σ_3 (ver figura 2.1) en un plano meridional próximo a $z = 0$, el ángulo ω de inclinación de la isostáticas es pequeño.

Llamando $\sigma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_3$ y $\sigma_3 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_z$, de la relación existente entre las componentes del tensor de tensiones y las tensiones principales resulta (ver figura 2.2):

$$\sigma_{rz} = (\sigma_3 - \sigma_1) \text{sen } \omega \approx (\sigma_3 - \sigma_1)\omega \quad (2.30)$$

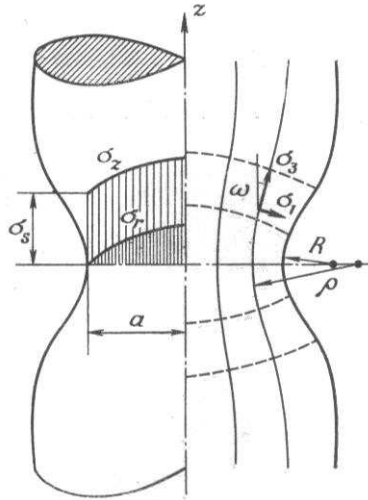


Figura 2.1: Representación de las líneas isostáticas y tensiones en el cuello

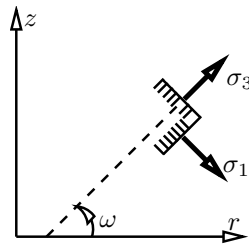


Figura 2.2: Esquema de las tensiones principales

Sustituyendo la expresión (2.23) en (2.30), con esta notación se obtiene:

$$\sigma_{rz} = Y\omega \quad (2.31)$$

La derivada parcial $\partial\sigma_{rz}/\partial z$ puede expresarse en $z = 0$:

$$\left. \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial Y\omega}{\partial z} \right|_{z=0} = Y \left. \frac{\partial\omega}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{Y}{\rho} \quad (2.32)$$

siendo ρ el radio de curvatura de la línea isostática. Con esto, la ecuación diferencial de equilibrio (2.28) se expresa:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{Y}{\rho} = 0 \quad (2.33)$$

Esta ecuación diferencial puede integrarse teniendo en cuenta que $\sigma_r = 0$ en $r = D/2$, con lo que se obtiene:

$$\sigma_r = Y \int_r^{D/2} \frac{dr}{\rho} \quad (2.34)$$

Teniendo en cuenta (2.23) se puede escribir:

$$\sigma_z = Y \left(1 + \int_r^{D/2} \frac{dr}{\rho} \right) \quad (2.35)$$

Estas ecuaciones permiten conocer la distribución de tensiones en el cuello en función de la coordenada radial r y del radio de curvatura ρ de la línea isostática correspondiente. En (Bridgman, 1944) se propone la siguiente relación entre ρ y r :

$$\rho = \frac{1}{2r} \left(\frac{D^2}{4} + DR - r^2 \right) \quad (2.36)$$

siendo R el radio de curvatura en el cuello de la isostática que coincide con el contorno exterior de la probeta. Otros autores han propuesto expresiones semejantes que pueden verse en (Valiente, 2001).

Sustituyendo (2.36) en (2.35) e integrando, resulta:

$$\sigma_z = Y \left[1 + \log \left(1 - \frac{r^2}{DR} + \frac{D}{4R} \right) \right] \quad (2.37)$$

Esta expresión debe de integrarse en la sección del cuello para obtener la tensión axial media $\bar{\sigma}_z$:

$$\bar{\sigma}_z = \frac{1}{\pi D^2/4} \int_0^{D/2} \sigma_z 2\pi r dr = Y \left(1 + \frac{4R}{D} \right) \log \left(1 + \frac{D}{4R} \right) \quad (2.38)$$

El inconveniente de la expresión anterior es la dificultad para medir el radio de curvatura R a lo largo del experimento. Sin embargo, asumiendo que (Bridgman, 1944):

$$\frac{D}{R} = 2\sqrt{\varepsilon_z - 0,1} \quad (\varepsilon_z > 0,1) \quad (2.39)$$

la tensión $\bar{\sigma}_z$ se pueden expresar de forma más conveniente en términos de la deformación logarítmica axial:

$$\bar{\sigma}_z = Y \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_z - 0,1}} \right) \log \left(1 + \frac{\sqrt{\varepsilon_z - 0,1}}{2} \right) \quad (2.40)$$

La expresión (2.40), junto con (2.20), permite obtener la ley constitutiva uniaxial $Y = Y(\varepsilon^p)$, cuando se conoce la carga axial P y el diámetro de la sección mínima D . Tanto P como D se pueden obtener directamente del ensayo de tracción simple. Es importante destacar que la deformación logarítmica ε_z solamente depende del diámetro actual D y del diámetro inicial D_0 del cuello. En consecuencia, en un ensayo se pueden obtener diferentes pares de valores $D - P$ que permitirán ajustar los coeficientes de la ecuación constitutiva buscada (saturación, potencia, etc.).

Para una ecuación constitutiva conocida, la expresión (2.40) permite calcular fácilmente la carga axial impuesta a partir únicamente del diámetro D del cuello. Esta propiedad, que puede ser sumamente útil para calibrar la ecuación constitutiva de un código de elementos finitos, ha sido sugerida en trabajos previos (García-Garino et al., 1999a; García-Garino et al., 1999b) y recientemente en (Valiente, 2001).

Observación 2.3.3 *Es interesante destacar que el estado triaxial de tensiones que tiene lugar en la zona de la estricción, acompañado de fuertes cambios locales en la geometría, está completamente determinado por el parámetro escalar D/D_0*

Observación 2.3.4 *Los resultados obtenidos este capítulo sugieren una relación directa entre la carga medida en el ensayo P , y la ley de endurecimiento $Y = Y(\varepsilon^p)$. Sin embargo, en la deducción de (2.40) se han utilizado las dos aproximaciones (2.36) y (2.39) debidas a (Bridgman, 1944). En consecuencia, los resultados expresados en (2.40) deben validarse con resultados numéricos y/o experimentales.*

2.4. Conclusiones

- Los resultados obtenidos para el campo de deformaciones se deducen a partir de las expresiones generales de la cinemática del sólido, empleando la hipótesis de incompresibilidad y la constancia de las deformaciones radiales.
- En la deducción de la distribución de tensiones se emplean aproximaciones debidas a Bridgman que deben validarse mediante estudios numéricos y/o experimentales.
- En consecuencia, la relación entre la tensión axial media y la tensión de fluencia debe de comprobarse mediante otros estudios.
- El estado triaxial de tensiones en la zona de la estricción está completamente determinado por el parámetro escalar D/D_0 .
- Los resultados analíticos presentados en este capítulo permiten validar y calibrar adecuadamente los programas de elementos finitos.

Capítulo 3

Estado del arte

3.1. Introducción y Antecedentes

En este capítulo se reseñan resultados numéricos y experimentales del problema disponibles en la literatura, los cuales se revisan y discuten. También se estudian los campos de tensión y deformación obtenidos numéricamente.

De igual modo se estudia detalladamente la relación entre la tensión axial media $\bar{\sigma}_z = \frac{P}{A}$ y la tensión efectiva $Y = Y(\varepsilon_p)$, ya que es un aspecto importante para interpretar el ensayo físico y calibrar ecuaciones constitutivas, objetivo principal del proyecto en curso (García-Garino et al., 2002-2004).

En el desarrollo del capítulo se contrastan los resultados numéricos y experimentales disponibles con los analíticos presentados en el capítulo 2 de este trabajo.

Desde el punto de vista experimental pueden citarse dos contribuciones muy importantes: (Norris et al., 1978) quien ensayó y simuló numéricamente probetas de acero y (Goicolea, 1985) que ensayó y estudió computacionalmente probetas de aluminio, ya que ambos autores brindan abundante información útil que se discute detalladamente más adelante.

En el contexto de la *Mecánica Computacional* pueden citarse diferentes contribuciones. Los primeros resultados, obtenidos cuando el cálculo de diferencias/elementos finitos no lineales estaba en sus inicios, se deben a (Wilkins, 1968; Chen, 1971; Needleman, 1972; Norris et al., 1978; Goicolea, 1985). Posteriormente la simulación computacional de este ensayo ha recibido la atención de numerosos autores (Hallquist, 1982; Simó, 1988b; García-Garino, 1993; Simó y Armero, 1993; Ponthot, 1994; Goicolea et al., 1996; García-Garino et al., 1996), situándolo en el contexto de formulaciones modernas de la plasticidad basadas tanto en modelos hipoeelásticos como modelos hiperelásticos con descomposición multiplicativa del gradiente de deformaciones.

Es importante señalar que, en general, en la literatura de Mecánica Computacional se ha empleado el problema para validar códigos e implementaciones numéricas de nuevos modelos constitutivos. Sin embargo, se ha dedicado menos atención a profundizar en algunos aspectos que todavía resultan ob-

jeto de discusión, línea en la que han avanzado los autores de este informe.

3.2. Ensayos experimentales y numéricos con probetas de acero

3.2.1. Estudio experimental

En los trabajos de (Norris et al., 1978) se estudiaron probetas de acero A 533 Grado B, Clase 1, extraídas de un material testigo reservado de un recipiente destinado a la industria nuclear.

Ensayaron las mismas siguiendo las normas de la ASTM (no indican la norma en cuestión), para lo cual utilizaron una máquina de ensayos equipada con celdas de carga, así como extensómetros y otros dispositivos de medición que fueron complementados con una serie de fotografías de alta resolución. De esta forma pudieron registrar diferentes variables de interés como la estricción y alargamiento de la probeta, forma del cuello y otras variables de interés.

La probeta estudiada era ligeramente cónica, con un diámetro máximo de 12,83 mm., un diámetro mínimo de 12,70 mm. y la longitud total es 53,34 mm. Las propiedades mecánicas del material empleado son módulo de elasticidad $E = 207$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,29$, tensión de fluencia inicial $Y_0 = 0,458$ GPa y tensión de rotura $Y_r = 0,621$ GPa, para una reducción de área del 65 %.

Los autores obtuvieron curvas de tensión axial media frente a la deformación logarítmica medida en el cuello. Asimismo se realizaron algunos estudios metalográficos. El más importante fue un corte longitudinal con el fin de investigar la densidad de huecos y defectos para correlacionarlos con los valores obtenidos numéricamente.

3.2.2. Modelos numéricos del ensayo de tracción

Para simular numéricamente el ensayo de tracción simple los autores emplearon el código HEMP (Giroud, 1973), para lo cual modelaron la probeta con 255 celdas, empleando una malla más refinada en la zona del cuello.

La figura 3.1 muestra, en el gráfico de la izquierda, el cociente de la tensión de fluencia y la tensión axial media $Y/\bar{\sigma}_z$ frente a la deformación plástica efectiva $\varepsilon^p = -2 \log(D/D_0)$. En el gráfico de la derecha se observa el cociente entre deformación radial y circunferencial $\varepsilon_r/\varepsilon_\theta$, también frente a deformación plástica efectiva $-2 \log(D/D_0)$.

El gráfico $Y/\bar{\sigma}_z - \varepsilon^p$ es importante para su comparación posterior con los resultados de este informe, así como para evaluar el factor de ajuste de Bridgman dado por la ecuación (2.40).

Como surge del gráfico de la derecha los autores encontraron diferencias entre las deformaciones radiales ε_r y anulares ε_θ . Este resultado, obtenido numéricamente, está en contra de los resultados analíticos presentados en el

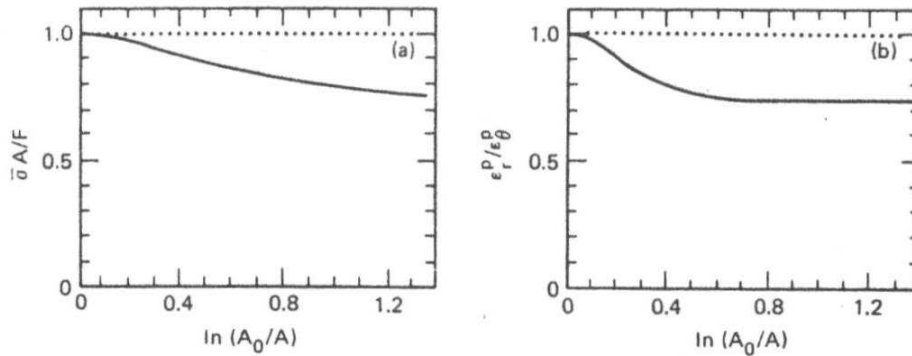


Figura 3.1: Resultados numéricos obtenidos por (Norris et al., 1978)

capítulo anterior (Bridgman, 1944; Davidenkov y Spiridonova, 1946), cuestión que se discute más adelante en este capítulo.

Para obtener la ley de endurecimiento no lineal $Y = Y(\epsilon^p)$ se utilizó un procedimiento computacional iterativo, utilizando como ecuación constitutiva inicial los valores experimentales de la tensión axial media $\bar{\sigma}_z - \epsilon^p$. Con los resultados $Y - \epsilon^p$ obtenidos en el cuello se ajustó una nueva ecuación constitutiva. Con ésta se procesó nuevamente el problema en forma numérica y se realizó un nuevo ajuste hasta alcanzar la convergencia. Los autores comunicaron que en tres iteraciones se obtuvo la ecuación constitutiva final que ajustaron mediante el siguiente polinomio:

$$Y = \frac{c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3}{1 + c_5x + c_6x^2}, \quad Y \geq Y_0 \quad (3.1)$$

donde Y (en GPa) es la regla de flujo, y x representa la deformación plástica efectiva, $c_1 = 0,458$, $c_2 = 5,74$, $c_3 = 484$, $c_4 = 140$, $c_5 = 8,50$ y $c_6 = 695$.

El ensayo de (Norris et al., 1978) fue tomado por (Hallquist, 1982) con el fin de calibrar su código NIKE2D. Este código se basa en una formulación elastoplástica con grandes deformaciones, y emplea un modelo constitutivo hipoeelástico. Para describir el movimiento utiliza una formulación lagrangiana actualizada, la discretización espacial se basa en elementos finitos mixtos y resuelve tanto problemas cuasiestáticos como dinámicos. En los cálculos se adoptó el criterio de fluencia de Von Mises.

Se modeló la mitad de la probeta debido a la simetría respecto del plano $r - \theta$ en $z = 0$. Se emplearon 330 elementos axilsimétricos cuadriláteros con presión constante y la malla fue convenientemente refinada en la zona del cuello para obtener la misma densidad de celdas utilizada por (Norris et al., 1978). Las condiciones de contorno son las usuales: simetría a lo largo del eje z en $r = 0$ y en $z = 0$. Cabe destacar que se impidieron los desplazamientos radiales en el extremo donde se impone la carga. Se impusieron desplazamientos axiales de valor final $\delta L = 14$ mm. El análisis se realizó con 100 incrementos de carga.

En la simulación del problema se empleó la ecuación constitutiva definida en (3.1), que se modeló como endurecimiento lineal por trozos. Los resultados obtenidos se ilustraron mediante la evolución de la estricción que contrastó muy bien con los resultados numéricos y experimentales debidos a (Norris et al., 1978). Se mostraron sucesivas mallas deformadas para ilustrar la aparición de la estricción, así como diferentes contornos de variables de interés en la zona del cuello para $D/D_0 = 0,540$. Puede decirse que este es uno de los primeros resultados del problema obtenido con un código elastoplástico relativamente moderno y que, sin duda, todavía es competitivo.

Estos resultados fueron reproducidos posteriormente por (Simó, 1988b) quien empleó un modelo más reciente basado en un material hiperelástico, y en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación \mathbf{F} . Se utilizó una descripción lagrangiana actualizada y elementos cuadriláteros mixtos. Simó adaptó la ley obtenida por (Norris et al., 1978) a una expresión cerrada denominada ley de saturación:

$$Y = \sigma_v^0 + (\sigma_v^\infty - \sigma_v^0)[1 - e^{-\delta\varepsilon_p}] + \zeta\varepsilon_p \quad (3.2)$$

dónde $\sigma_v^0 = 0,45$ GPa, $\sigma_v^\infty = 0,715$ GPa, $\delta = 16,93$ y $\zeta = 0,1294$ GPa. Las constantes elásticas resultan $E = 206,9$ GPa y $\nu = 0,29$. La figura 3.2 muestra la curva correspondiente a dicha ecuación constitutiva. En el cuadro 3.1 se muestran la comparación de los valores experimentales (Norris et al., 1978) con la ley analítica.

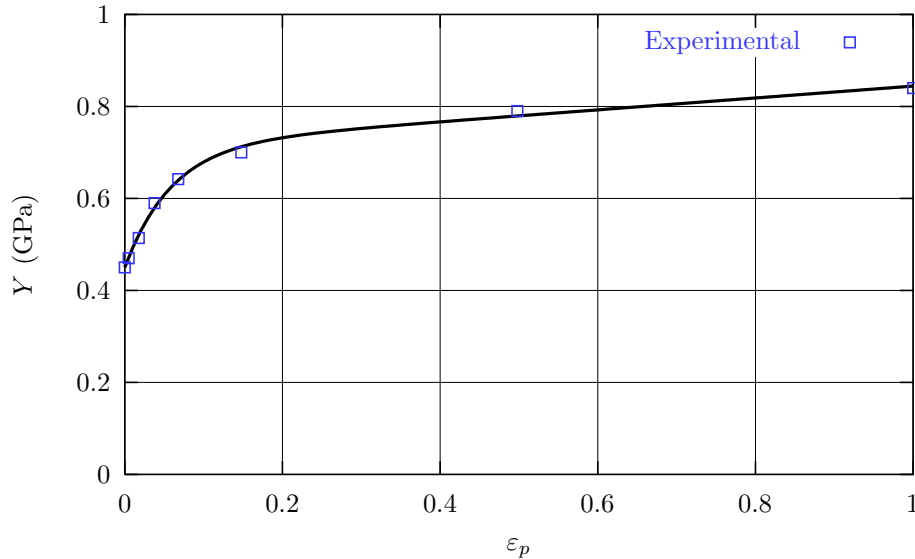


Figura 3.2: Ley de saturación para el acero A-533 (Simó, 1988b)

A grandes rasgos Simó reprodujo los resultados anteriores con la novedad de utilizar una gama de mallas de elementos finitos que cubrían un rango desde 50 hasta 1600 elementos, y empleó solo 14 pasos de tiempo. Si bien en este trabajo no se investigaron distribuciones de tensión y deformación, se

señaló la sensibilidad de los resultados en función de la discretización espacial, tema que se retoma en el capítulo 6 de este trabajo.

Este mismo problema fue estudiado por (Ponthot, 1994) quien empleó el código METAFOR para simular el ensayo. Este código se basa en elementos cuadriláteros mixtos, formulación lagrangiana actualizada y modelo constitutivo hipoeelástico. En su trabajo Ponthot reprodujo los resultados obtenidos por otros autores, y recopiló resultados previos del problema. En la figura 3.3 se muestra la evolución de la carga P en función de la deformación ingenieril $\Delta L/L_0$, comparándola con otros resultados numéricos y experimentales disponibles.

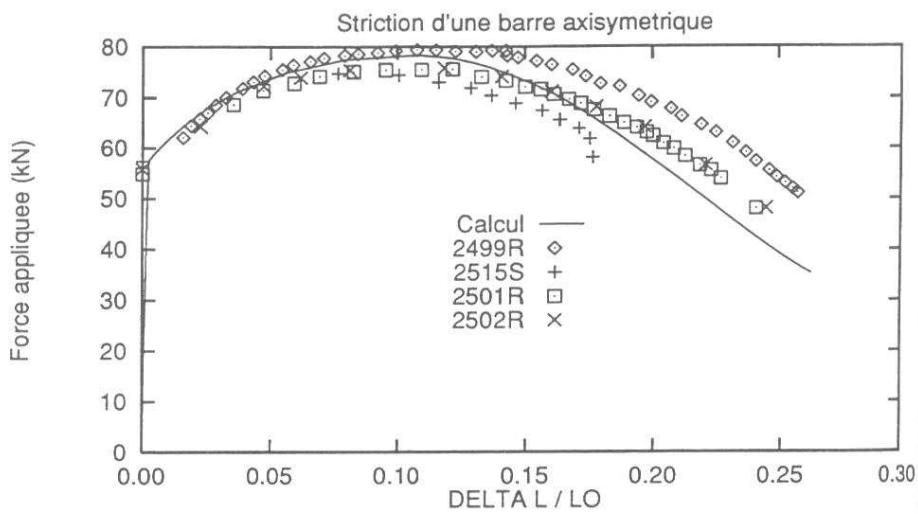


Figura 3.3: Curvas carga–deformación nominal reportadas por (Ponthot, 1994)

La figura 3.4 muestra la evolución de la estricción, que también se compara con otros resultados numéricos y experimentales disponibles.

En la figura 3.5 se muestra la sensibilidad de la respuesta del problema frente al tamaño de los incrementos de carga escogidos. Esta observación debida a (Ponthot, 1994), se ilustra mediante la evolución de la estricción (R/R_0) frente a la deformación ingenieril $\Delta L/L_0$.

En resumen:

1. El problema se ha empleado más bien como un estudio complejo para validar formulaciones y códigos de elementos recientes.
2. Los distintos resultados, medidos en variables globales por lo general, concuerdan bien entre sí.
3. Se ha señalado la sensibilidad de los resultados frente a las distintas mallas y diferentes pasos de tiempo empleados para resolver el proble-

ε_p	$Y_{\text{experimental}}$	$Y_{\text{analitico}}$
0,0000	0,450	0,450
0,0050	0,470	0,472
0,0178	0,514	0,521
0,0378	0,590	0,580
0,0678	0,642	0,640
0,1478	0,700	0,712
0,4980	0,790	0,779
1,0000	0,840	0,844

Cuadro 3.1: Comparación de los valores experimentales y valores analíticos de la ley de saturación

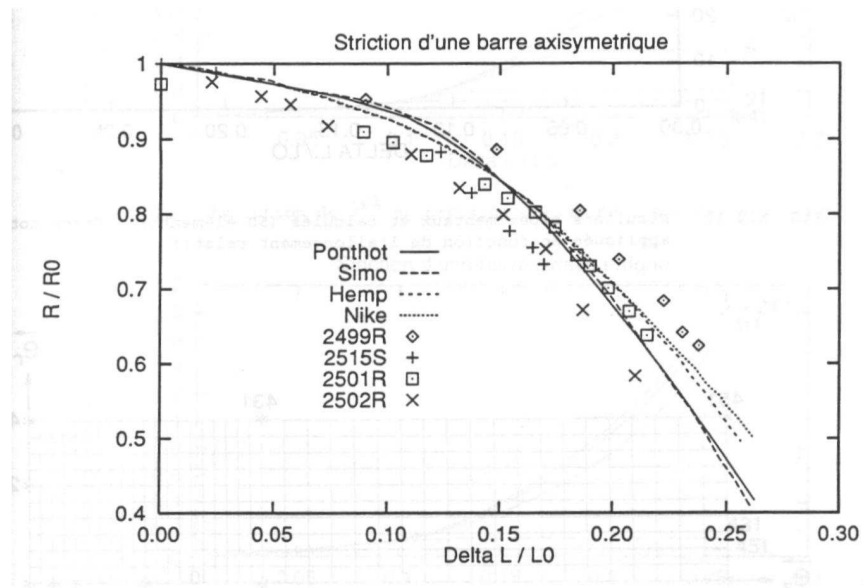


Figura 3.4: Curvas estricción–deformación nominal reportadas por (Ponthot, 1994)

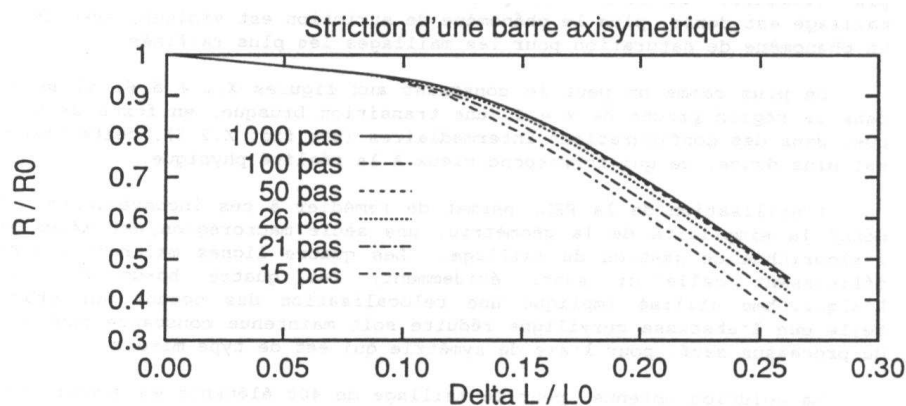


Figura 3.5: Curva estricción–deformación nominal. Sensibilidad al paso de tiempo reportada por (Ponthot, 1994)

ma. Sin embargo, a excepción del trabajo (Norris et al., 1978), no se discuten resultados relativos a los campos de tensión y deformación.

3.3. Ensayos experimentales y numéricos con probetas de aluminio

El principal objetivo de los ensayos que se describen a continuación (Goicolea, 1985) era obtener las ecuaciones constitutivas elastoplásticas de un aluminio, con el fin de emplearlas posteriormente para la simulación de problemas de plasticidad con grandes deformaciones.

3.3.1. Probetas y material

Las propiedades mecánicas del aluminio proporcionadas por el fabricante al suministrar el material eran:

Tensión para $\varepsilon^p = 0,1\%$:	239 – 270 MPa
Densidad:	2700 Kg/m ³
Módulo de elasticidad E :	67000 MPa
Coefficiente de Poisson ν :	0,3
Tensión última:	278 – 293 MPa
Elongación sobre 2 in:	7 – 10 %

Se llevaron a cabo cinco ensayos de tracción en probetas de aluminio HE30, cuya composición era: 95.2% Al, 0.1% Cu, 0.4-1% Mg, 0.6-1.3% Si, 0.6% Fe, 0.4-1.0% Mn, 0.1% Zn, 0.5% Cr y 0.2% de otros metales. El aluminio, fabricado mediante extrusión, fue mecanizado para obtener las probetas.

3.3.3. Resultados experimentales

Con las medidas del diámetro de la sección en la zona del cuello se obtuvieron los valores de la deformación logarítmica mediante la expresión (2.18). Con este valor y los datos extraídos de la máquina a lo largo del ensayo, se obtuvieron los puntos de las curvas de las figuras 3.7 y 3.8.

La figura 3.7 muestra la carga axial aplicada P frente a la deformación logarítmica ε_z para las probetas CT1, CT2, CT4, CT5 y CT6². En todas las curvas se alcanza un valor pico de la carga aplicada, que se alcanza cuando comienza la formación de la estricción. Con todas las probetas se obtienen resultados similares. El valor de la carga máxima se encuentra en el rango $P = 22\text{--}25$ kN para una deformación logarítmica $\varepsilon_z = 0,15\text{--}0,20$, y la deformación logarítmica de rotura está entre $\varepsilon_z = 1,15\text{--}1,20$. No se observa que influya en estos resultados el tiempo de recocido.

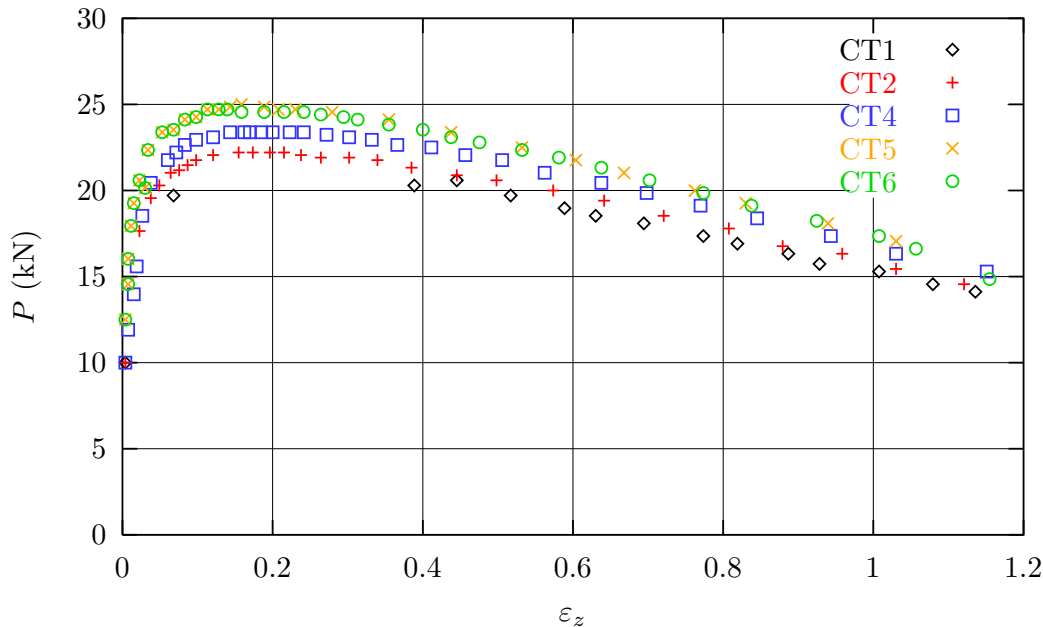


Figura 3.7: Curva fuerza-deformación logarítmica ($P\text{--}\varepsilon_z$). Resultados experimentales.

La figura 3.8 muestra la tensión axial media $\bar{\sigma}_z = P/A$ frente a la deformación logarítmica ε_z , también para las probetas sometidas a tratamiento de recocido. Es interesante destacar que aunque la carga aplicada P disminuye a partir del instante en que comienza la inestabilidad, debido a la reducción del valor del área, el material se endurece a lo largo de todo el proceso.

El estado de las probetas después del ensayo se muestra en la figura 3.9.

²Los resultados correspondientes a la probeta CT3 (sin recocido) se pueden consultar en (Goicolea, 1985), habiéndose ensayado esta probeta con el único fin de verificar las propiedades facilitadas por el fabricante

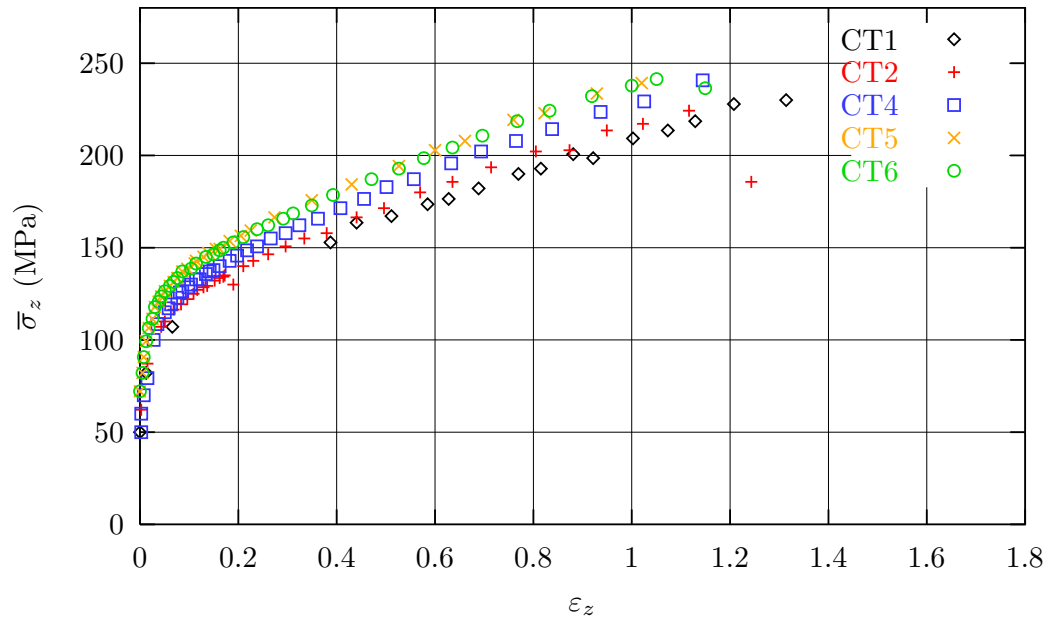


Figura 3.8: *Curva tensión media-deformación logarítmica ($\bar{\sigma}_z - \varepsilon_z$). Resultados experimentales.*



Figura 3.9: *Estado de las probetas de aluminio después del ensayo de tracción*

3.3.4. Medidas de microdureza

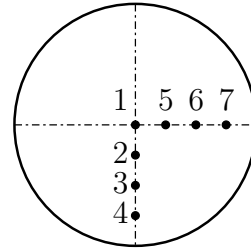
Una vez ensayadas las probetas se analizó la distribución de deformaciones plásticas mediante ensayos de microdureza en una sección normal al eje de la probeta. Esta sección era la más próxima a la de estricción máxima que no mostraba cambios en su estructura debido a la rotura. Una vez pulida la sección, se realizaron microindentaciones en distintos puntos a lo largo de dos radios normales. Los detalles sobre el procedimiento de ensayo y los equipos utilizados pueden consultarse en (Goicolea, 1985). Los resultados obtenidos pueden consultarse en el cuadro 3.3, observándose que la microdureza no muestra cambios significativos en la sección analizada.

El valor de la dureza H es proporcional a la tensión de fluencia Y (Hill, 1950), la cual a su vez depende de la deformación plástica efectiva ε^p :

$$H = CY(\varepsilon^p) \quad (3.3)$$

siendo C una constante cuyo valor está comprendido entre 2,5 y 3,0. En consecuencia, los resultados del análisis de microdureza realizado están en consonancia con la hipótesis de que la tensión de fluencia y la deformación plástica efectiva son constantes en la sección de estricción máxima (Bridgman, 1944).

Punto	Diámetro de la Identación (μm)	Microdureza (Kg/mm^2)
1	53	64
2	53	64
3	54	63
4	52	66
5	52	66
6	53	64
7	53	65



Cuadro 3.3: Resultados del ensayo de microdureza

3.3.5. Ajuste de la ley constitutiva

Las leyes de endurecimiento de tipo potencia:

$$\sigma_z = A\varepsilon_z^n \quad (3.4)$$

donde σ_z es la tensión uniaxial de Cauchy, ε_z la deformación logarítmica uniaxial y A, n constantes de material, representan de forma realista el comportamiento del aluminio. Los parámetros A y n se pueden interpretar en los siguientes términos: A es el valor de la tensión para una deformación unitaria, y es sencillo de demostrar que n es la deformación obtenida para la carga máxima del ensayo de tracción uniaxial.

Probeta	A (MPa)	n
CT1	169,1	0,190
CT2	172,5	0,177
CT4	184,7	0,196
CT5	191,5	0,170
CT6	190,6	0,178
Media	181,7	0,182

Cuadro 3.4: *Ajuste de los parámetros de la ley de endurecimiento*

Dada la equivalencia entre la tensión uniaxial y la tensión de Von Mises en un estado uniaxial de carga, una forma conveniente de escribir la ecuación constitutiva (3.4) es la siguiente:

$$Y = A\varepsilon_z^n \Rightarrow A \left(\varepsilon^p + \frac{Y}{E} \right) \Rightarrow Y \approx A(\varepsilon^p)^n \quad (3.5)$$

donde se ha tenido en cuenta la descomposición aditiva de la deformación en una parte elástica y una parte plástica, y posteriormente se ha despreciado la primera frente a la segunda.

Los valores de los puntos de la curva 3.8 se introdujeron en la expresión (2.40) para obtener la tensión de fluencia Y . A continuación, para cada ensayo se ajustó una curva $Y = A\varepsilon_z^n$ mediante una regresión lineal considerando los valores logarítmicos. Los valores así obtenidos se muestran en el cuadro 3.4. Finalmente, se obtuvo como primer ajuste de la ley de endurecimiento el correspondiente a los valores de A y n promediados:

$$Y = 181,7(\varepsilon^p)^{0,182} \quad (3.6)$$

3.3.6. Modelos numérico del ensayo de tracción

Los ensayos de tracción descritos anteriormente se modelizaron numéricamente empleando para ello el código explícito de diferencias finitas PR2D (Goicolea, 1992). Los resultados obtenidos, entre otras cosas, permiten:

1. calibrar de manera más fina los parámetros del modelo constitutivo
2. verificar la validez de las hipótesis realizadas en la interpretación analítica del ensayo sobre la distribución de tensiones y deformaciones plásticas en el cuello
3. validar los códigos de diferencias y elementos finitos.

La simulación numérica permitió observar que el ajuste de las curvas $Y-\varepsilon_z$ es correcta en el rango de grandes deformaciones ($\varepsilon_z > 0,2$). Sin embargo, para deformaciones menores que la indicada se observa cierta discrepancia entre los valores experimentales y los numéricos. Para mejorar el ajuste en (Goicolea, 1985) se adoptó el exponente $n = 0,159$, manteniendo el mismo valor de $A = 181,7$. En consecuencia, en (Goicolea, 1985) se observa que el factor de ajuste entre $\bar{\sigma}_z$ y la tensión de fluencia Y debido a (Bridgman, 1944) y expresado en (2.40) es válido en primera aproximación, siendo conveniente hacer una simulación numérica que permita un ajuste más fino. Este procedimiento es alternativo al esquema iterativo empleado por (Norris et al., 1978) y descrito en este trabajo en el apartado 3.2.2.

Modelo de diferencias finitas

Las probetas se discretizaron en 2D, empleando un modelo axilsimétrico. Con las condiciones de simetría del problema únicamente se modelizó una cuarta parte de las mismas. La malla constaba de 875 celdas triangulares agrupadas en 438 elementos MTQ (Goicolea, 1985), y 390 nodos. La malla estaba más refinada en la parte de la estricción debido a que los gradientes de tensión y deformación eran mayores en esta zona. La malla y un detalle de la zona del cuello se muestra en la figura 3.10.

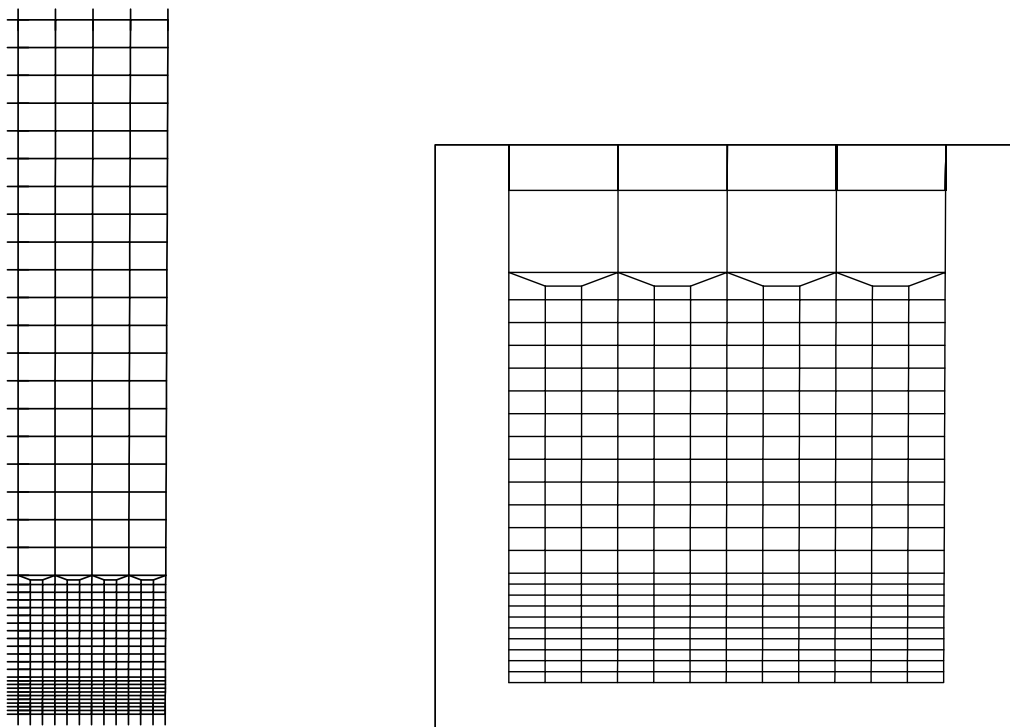


Figura 3.10: Malla y condiciones de contorno. Detalle de la zona refinada y de la transición

Resultados

De los resultados obtenidos en el análisis computacional pudieron extraerse las siguientes conclusiones:

1. Las tensiones radiales y circunferenciales son prácticamente iguales en la zona de estricción, tendiendo a cero en el radio exterior, y alcanzando un valor máximo, aproximadamente igual a 60 MPa, en el eje de revolución
2. La tensión axial es no uniforme en la zona de estricción, disminuyendo desde 270 MPa. en el eje hasta 200 MPa. en el radio exterior.
3. La tensión de fluencia Y es prácticamente constante en la sección de estricción teniendo un valor de 189 MPa. aproximadamente.
4. La deformación logarítmica axial en la sección del cuello vale $\varepsilon_z = 1,22$, lo que de acuerdo con la expresión (3.6) corresponde a una tensión de fluencia:

$$Y = 181,7 \cdot 1,22^{0,159} = 188 \text{ MPa.} \quad (3.7)$$

y una tensión axial media (ecuación (2.40)):

$$\bar{\sigma}_z = 1,23Y = 231 \text{ MPa.} \quad (3.8)$$

que son acordes con los descritos anteriormente en los puntos 2 y 3.

Todos los resultados están en consonancia con la interpretación analítica del ensayo descrita en el capítulo 2, confirmando las teorías semi-empíricas establecidas en (Bridgman, 1944) y (Davidenkov y Spiridonova, 1946).

3.4. Simulación computacional

3.4.1. Definición del modelo

Para reproducir numéricamente el ensayo de tracción, se ha escogido una probeta de aluminio HE30 (BS1474), idéntica a la utilizada en (Goicolea, 1985). La probeta tiene una altura de 75 mm. y diámetro 16,2 mm. En los extremos de la probeta se impone un desplazamiento de 10 mm. Dada la simetría existente solo se ha modelizado una cuarta parte. La malla empleada y las condiciones de contorno se muestran en la figura 3.10. El modelo tiene 412 nodos y 360 elementos, resultando un total de 762 grados de libertad.

Para que se desarrolle la estricción se introduce una pequeña imperfección geométrica (también presente en la probeta real), disminuyendo el radio en la sección central en un 1,8518 % respecto del nominal. La variación del radio entre la sección central y la sección extrema es lineal. Otros autores (Needleman, 1972) plantean el inicio de la estricción calculando el modo de

bifurcación mediante un análisis espectral y modificando la matriz de rigidez cuando se alcanza dicho modo.

La formulación del modelo constitutivo J_2 empleado en el cálculo está descrita en (García-Garino, 1993; Gabaldón, 1999). Las constante elásticas correspondientes al aluminio del ensayo son:

$$E = 67000 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,3$$

La ley de endurecimiento empleada es una ley potencial del tipo:

$$Y(\varepsilon) = A(b + \varepsilon^n)^n \quad (3.9)$$

Los valores de A y n fueron obtenidos por (Goicolea, 1985) como se ha descrito en el apartado 3.3:

$$A = 181,7 \text{ GPa}$$

$$n = 0,159$$

El parámetro b se obtiene imponiendo en la ecuación (3.9) que el límite elástico inicial sea $Y_0 = 50 \text{ MPa}$, resultando:

$$b = 2,989 \cdot 10^{-4}$$

3.4.2. Resultados

En las simulaciones computacionales se han empleado tres modelos distintos de elementos finitos: un modelo explícito con formulación hipoelástica (Goicolea, 1992), (Goicolea, 1985), un modelo implícito con formulación hiperelástica (García-Garino, 1993), y por último un modelo implícito con formulación hipoelástica de un programa comercial de propósito general (ABAQUS, 1994). Resumimos las características esenciales de cada uno de estos modelos.

Modelo explícito hipoelástico (PR2D) (Goicolea, 1992), (Goicolea, 1985).- Se basa en un esquema de integración explícito en el tiempo por diferencias centrales, por lo que de forma directa únicamente se puede aplicar a problemas dinámicos. Los problemas cuasiestáticos deben resolverse mediante relajación dinámica o mediante distorsión controlada de las escalas de masa o velocidad.

El uso de una matriz de masa diagonal permite un ciclo de cálculo para cada intervalo de tiempo Δt explícito, sin necesidad de resolver sistemas de ecuaciones. No se necesitan emplear matrices de coeficientes globales y la resolución se realiza a nivel local, elemento por elemento, lo que confiere al método una gran sencillez y robustez.

En contrapartida, el esquema de integración temporal exige para su estabilidad que Δt sea menor que un valor crítico pequeño determinado por

la velocidad de propagación de las ondas elásticas (c) y el tamaño de los elementos (h) según la condición de Courant:

$$\Delta t < \Delta t_{\text{cr}} = \frac{h}{c} \quad (3.10)$$

La formulación elastoplástica se basa en la descomposición aditiva de las deformaciones:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p, \quad \text{siendo: } \mathbf{d} = \nabla^s \dot{\mathbf{x}} \quad (3.11)$$

y una ley de evolución hipoelástica para las tensiones,

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda \text{traza}(\mathbf{d}^e) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{d}^e \quad (3.12)$$

donde se emplea la tasa co-rotacional de Jaumann $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\sigma}$ siendo $\boldsymbol{\omega}$ la parte hemisimétrica del gradiente de velocidades. Esta corrección permite considerar adecuadamente la rotación del tensor de tensiones.

La discretización emplea elementos mixtos: cuadriláteros para las componentes volumétricas de las tensiones y deformaciones, divididos cada uno en dos triángulos para las componentes desviadoras. Estos elementos están libres de bloqueo para deformación plástica incompresible así como de modos de energía nula.

Modelo hiperelástico implícito (SOGDE) (García-Garino, 1993).- La cinemática del modelo empleado está basada en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones (Simó, 1988a):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (3.13)$$

La ley constitutiva se formula en el contexto de la termodinámica irreversible de sólidos mediante una función de energía libre:

$$W = W^e(\mathbf{e}^e) + W^p(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.14)$$

donde \mathbf{e}^e es la parte elástica del tensor de deformaciones de Almansi (\mathbf{e}) y $\boldsymbol{\xi}$ son las variables internas. El modelo constitutivo se basa en la descomposición aditiva de \mathbf{e} (que se deduce a partir de (3.13)):

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p \quad (3.15)$$

La relación tensión-deformación es de tipo hiperelástico,

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi^e(\mathbf{e}^e)}{\partial \mathbf{e}^e} \quad (3.16)$$

La integración del modelo constitutivo se basa en un algoritmo predictor-corrector, descrito con mayor detalle en (García-Garino, 1993). El predictor elástico se resuelve mediante el tensor elástico de Finger:

$${}^{t+\Delta t}(\mathbf{b}^e)^{-1}|^{(\text{pred.})} = \mathbf{f}^{-T} {}^t(\mathbf{b}^e)^{-1} \mathbf{f}^{-1} \quad (3.17)$$

donde $\mathbf{f} = \partial^{t+\Delta t} \mathbf{x} / \partial^t \mathbf{x}$ es el tensor gradiente de deformaciones incremental. El tensor elástico de Finger juega el papel de una variable interna en este modelo. El corrector plástico se calcula con un esquema de integración de Euler hacia atrás, resultando:

$${}^{t+\Delta t}(\mathbf{b}^e)^{-1} = {}^{t+\Delta t}(\mathbf{b}^e)^{-1}|^{(\text{pred.})} + 2\gamma^{t+\Delta t} \mathbf{n} \quad (3.18)$$

donde la corrección $\gamma^{t+\Delta t} \mathbf{n}$ se obtiene mediante el algoritmo de retorno radial (Simó, 1988a; Simó, 1988b). A continuación se obtiene el tensor de deformaciones elásticas de Almansi:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^e = \frac{1}{2} [{}^{t+\Delta t} \mathbf{g} - {}^{t+\Delta t}(\mathbf{b}^e)^{-1}] \quad (3.19)$$

siendo \mathbf{g} el tensor de la métrica. Finalmente, las tensiones se obtienen aplicando (3.16), que en este caso vale

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{traza}(\mathbf{e}^e) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{e}^e \quad (3.20)$$

Los elementos empleados son de tipo mixto, con integración volumétrica media.

Modelo implícito hipoelástico (ABAQUS) (ABAQUS, 1994).- Se ha empleado también el programa comercial de elementos finitos ABAQUS. El modelo constitutivo es hipoelástico, basado en la derivada de Jaumann del tensor de tensiones de Cauchy. Se han empleado dos tipos de elementos distintos, \bar{B} (integración reducida selectiva) y elementos mixtos de modos incompatibles según la formulación (Simó y Armero, 1993).

Resultados numéricos

Los resultados obtenidos en los modelos de cálculo citados se presentan en las figuras 3.11 a 3.14.

En todas las simulaciones se captura adecuadamente la formación del cuello en el ensayo. En la figura 3.11 se muestra una deformada de la malla al final del ensayo, siendo similares la obtenidas con los tres modelos.

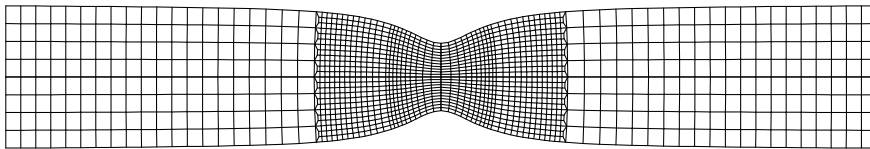


Figura 3.11: *Malla deformada*

La figura 3.12 contiene la evolución de la estricción en el cuello (D/D_0), frente al alargamiento nominal ($\Delta l/l_0$). La figura 3.13 representa la carga axial (P) frente a la deformación logarítmica axial en la sección de estricción

(ε_z , calculada según la fórmula (2.20)). La figura 3.14 representa la tensión ($\bar{\sigma}_z = P/A$) frente a ε_z .

Como resumen de la comparación de los resultados se deduce que, en líneas generales la respuesta de los tres modelos es similar. La localización geométrica de las deformaciones en el cuello es menos marcada en PR2D, más acusada en SODGE y aún mayor en ABAQUS. Los dos tipos de elementos en ABAQUS dieron resultados casi iguales. En el cuadro 3.5 se realiza una comparación cuantitativa de los resultados de los cálculos con los resultados experimentales. Se observa que los tres modelos obtienen un resultado dentro del *abanico* experimental, estando el valor medio de éste situado entre el resultado de PR2D y el de SODGE.

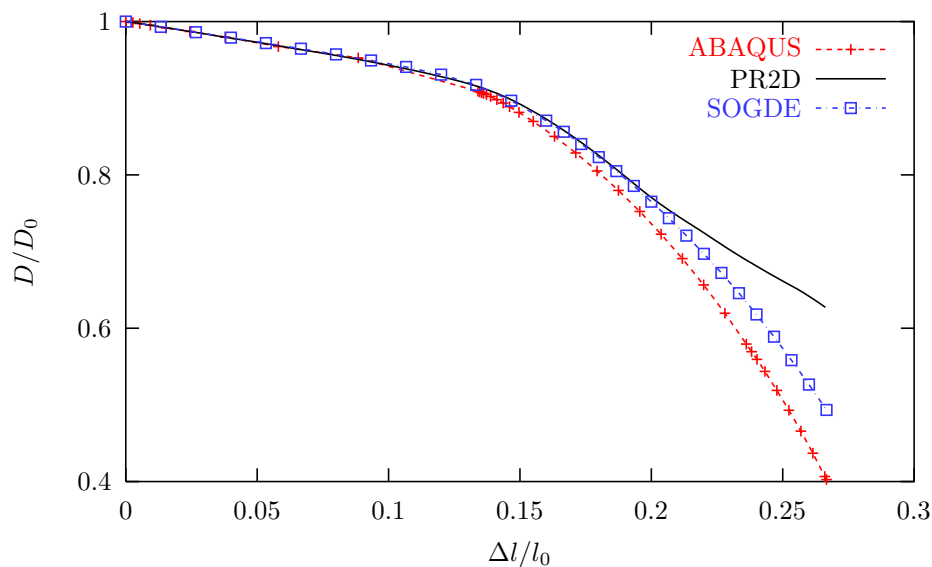


Figura 3.12: Resultados numéricos para la relación de estricción (D/D_0) frente al alargamiento de la probeta ($\Delta l/l_0$)

	$\bar{\sigma}_z$ (MPa)	P (kN)
PR2D	207	16.8
SODGE	215	17.3
ABAQUS	217	17.5
Experimentos	213 ± 15	17.2 ± 1.2

Cuadro 3.5: Comparación de resultados numéricos en la zona del cuello para $\varepsilon_z = 0,9$.

3.4.3. Distribución de tensiones en el cuello

En el ensayo de tracción, cuando comienza a desarrollarse la estricción, el estado tensional en el cuello pasa de ser uniaxial homogéneo a ser un estado

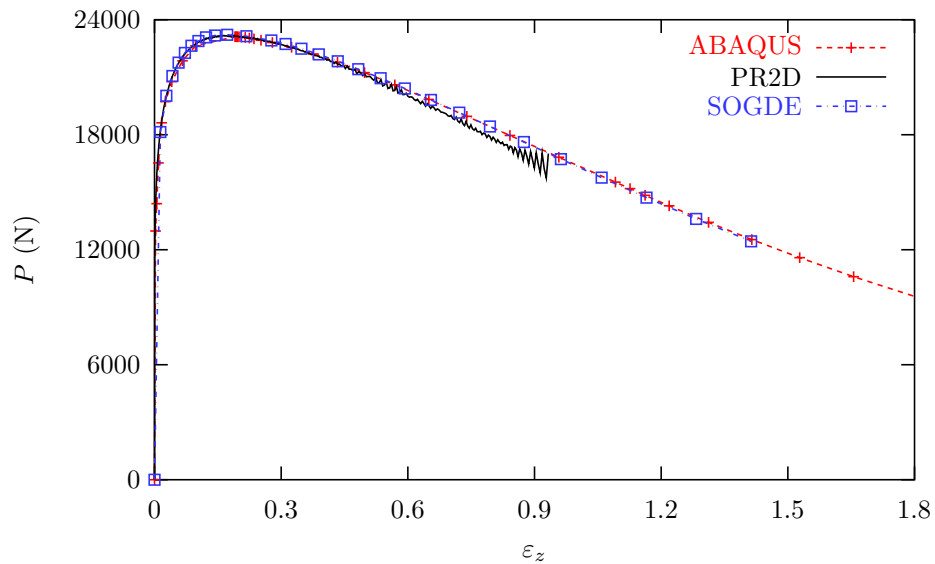


Figura 3.13: Resultados numéricos para la carga (P) frente a la deformación logarítmica en el cuello (ε_z)

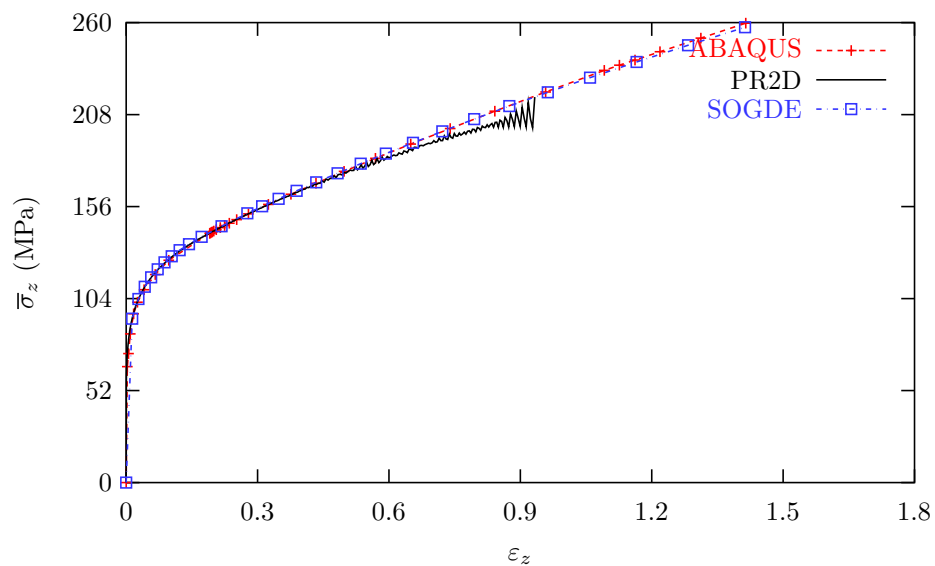


Figura 3.14: Resultados numéricos para la tensión axial promedio ($\bar{\sigma}_z$) frente a deformación logarítmica en el cuello (ε_z)

triaxial. Curiosamente, incluso aparece un bulbo de compresiones axiales inicialmente obtenido en (Norris et al., 1978), y que se muestra en la figura 3.15.

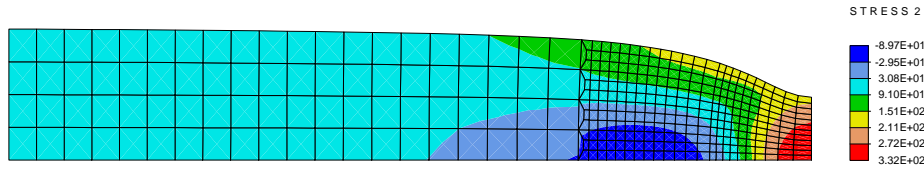


Figura 3.15: *Tensiones axiales. En una zona de la probeta las tensiones son de compresión*

En este apartado se estudia la distribución de tensiones en el cuello de la probeta al final del análisis, cuando el desplazamiento axial impuesto alcanza 10 mm.

En primer lugar se comprueba las hipótesis de Bridgman en el cuello correspondiente a la igualdad entre las tensiones radiales y circunferenciales. Para ello, la figura 3.16 muestra los contornos de tensiones radiales y de tensiones circunferenciales en la zona del cuello.

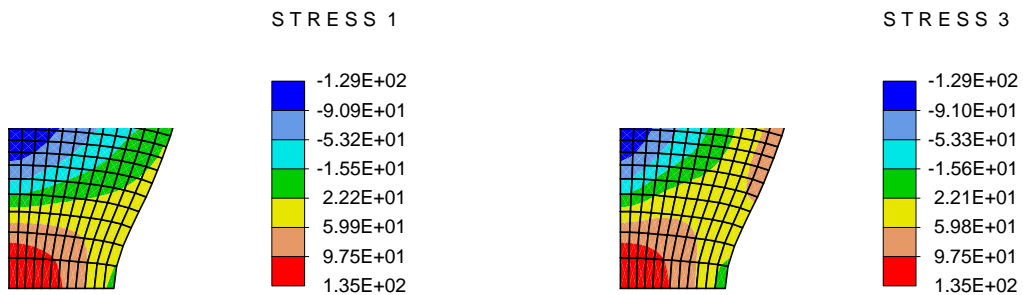


Figura 3.16: *Distribución de tensiones radiales y circunferenciales en el cuello*

Asimismo, en la figura 3.17 se muestran los contornos de tensión en el cuello obtenidos con PR2D.

En las figuras 3.18 y 3.19 se muestra la comparación de los resultados obtenidos mediante elementos finitos y los debidos a Bridgman, para la deformación plástica efectiva y la tensión de fluencia respectivamente. Dichas curvas muestran los valores a lo largo de la coordenada radial en la sección del cuello. Como puede observarse el ajuste es correcto.

Para comprobar si se verifica numéricamente la igualdad $\sigma_r = \sigma_{theta}$, deducida en el capítulo 2, en la figura 3.20 se muestran los perfiles de dichas tensiones en la sección del cuello. Puede observarse que dicha igualdad se aproxima relativamente en la zona próxima al eje de revolución, mientras que en el punto de mayor radio se encuentran discrepancias.

Con el fin de investigar la calidad de la aproximación de (Bridgman, 1944) expresada en (2.40), en la figura 3.21 se comparan los valores de dicha

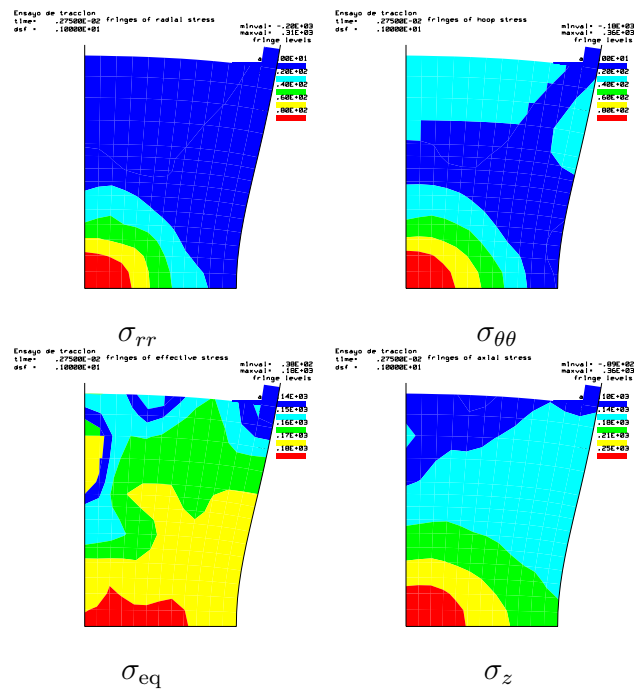


Figura 3.17: Contornos de igual tensión para distintos componentes, obtenidos con PR2D

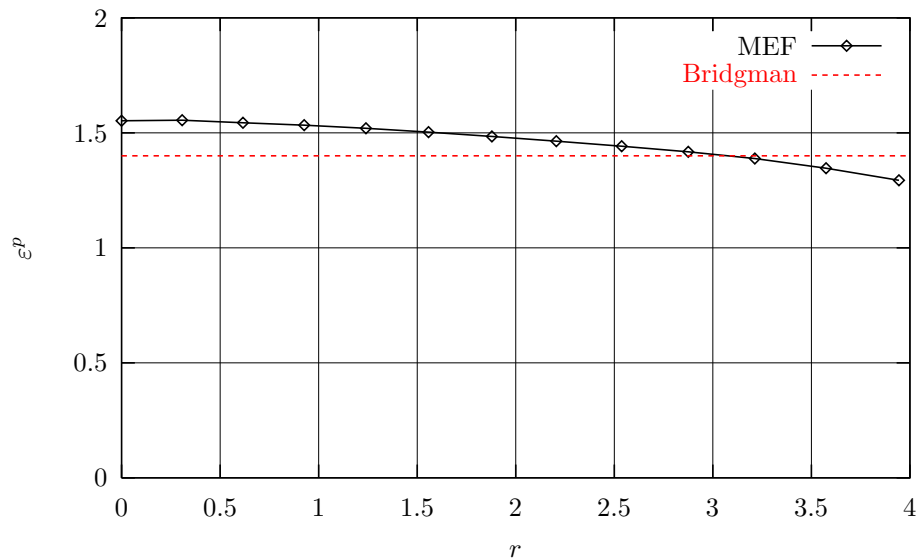


Figura 3.18: Perfil de la deformación plástica efectiva en la zona de estricción. Comparación de resultados numéricos (MEF) con los semi-empíricos de Bridgman

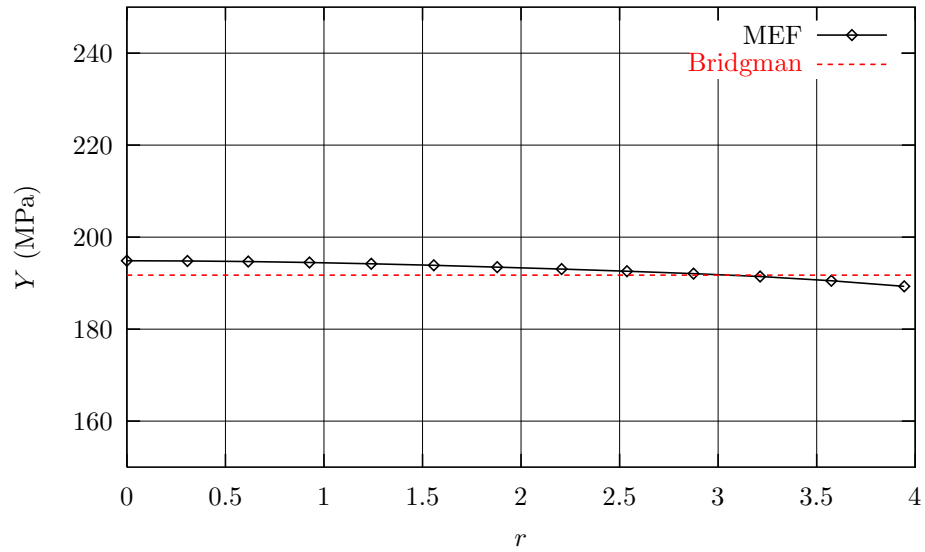


Figura 3.19: Perfil de la tensión de fluencia en la zona de estricción. Comparación de resultados numéricos (MEF) con los semi-empíricos de Bridgman

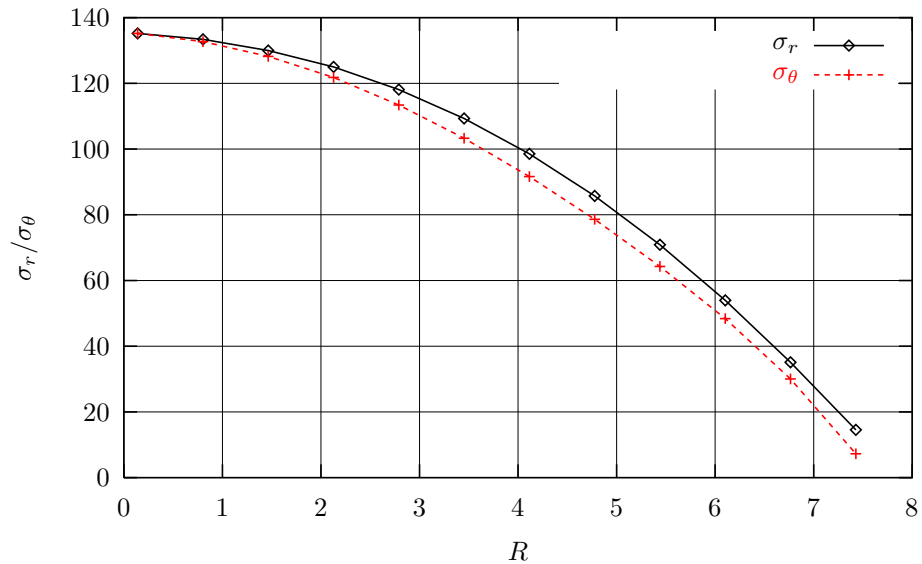


Figura 3.20: Perfil de tensiones radiales y circunferenciales en la sección del cuello.

ecuación con los resultados numéricos obtenidos mediante el MEF. Se observa que el MEF predice valores menores de $\bar{\sigma}_z/Y$ que la ecuación (2.40) para valores de $\varepsilon_z < 0,8$, ajusta razonablemente bien para $0,8 < \varepsilon_z < 1,2$, y proporciona valores mayores para $\varepsilon_z > 1,2$. No obstante, este último rango puede carecer de interés práctico debido a que la probeta se fractura para deformaciones menores.

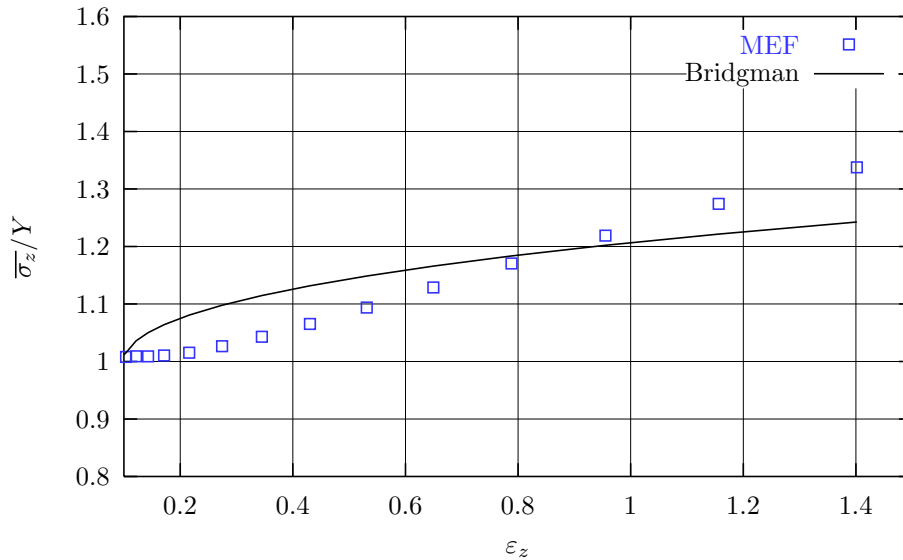


Figura 3.21: Relación $\bar{\sigma}_z/Y$ frente a ε_z . Comparación de resultados numéricos (MEF) con los semi-empíricos de Bridgman

Una vez comprobadas estas hipótesis, a continuación se analiza la distribución de las tensiones calculadas en los puntos de Gauss más próximos a la estricción, comparándolas con las que se obtienen de aplicar las expresiones (2.23) y (2.37).

La curva de la figura 3.22 muestra estos resultados. La distribución de tensiones propuesta por Bridgman se ha obtenido sustituyendo en (2.23) y (2.37), los valores de D y ε_z calculados por elementos finitos.

De esta curva se extrae como conclusión importante que en general, la distribución de tensiones se ajusta correctamente a la obtenida experimentalmente por Bridgman. Se puede observar que los perfiles de tensiones son suaves, los valores máximos se alcanzan en la zona del eje de revolución, y que σ_r tiende a anularse en el radio exterior de la probeta. También se comprueba que la diferencia $\sigma_z - \sigma_r$ es igual a la tensión de fluencia Y . De esta manera se ratifican todos los resultados semi-empíricos de (Bridgman, 1944). Sin embargo, debe destacarse que hay ligeras discrepancias numéricas entre los valores numéricos y los debidos a Bridgman.

Con el fin de profundizar en este sentido, en la figura 3.23 se muestra la distribución de presiones y tensiones desviadoras radiales y axiales en el cuello

Para ello se calcula la distribución de la presión y de las tensiones desviadoras en el cuello. De acuerdo con el estado tensional expresado en (2.22), la presión vale:

$$p = \frac{2\sigma_r + \sigma_z}{3} \quad (3.21)$$

y sustituyendo en esta expresión los resultados (2.23) y (2.37), se obtiene:

$$\frac{p}{Y} = \frac{1}{3} + \frac{(D^2 - 4r^2)\sqrt{\varepsilon_z - 0,1}}{2D^2} \quad (3.22)$$

Asimismo, expresando la ecuación (2.23) en términos de las tensiones desviadoras, s_r y s_z , e imponiendo que la traza del tensor de tensiones desviadoras es 0, se obtiene que dichas tensiones son constantes en el cuello y valen:

$$s_r = -\frac{1}{3}Y \quad (3.23)$$

$$s_z = \frac{2}{3}Y \quad (3.24)$$

En la curva de la figura 3.23 se comparan las leyes dadas por las ecuaciones (3.22), (3.23) y (3.24), con las obtenidas en el cálculo por elementos finitos. Puede comprobarse que en los puntos próximos al eje de la probeta, se obtienen valores de la presión (que no interviene en la parte correctora del modelo constitutivo) que no se ajustan a los expresado en (3.22). Sin embargo, los valores correspondientes a las tensiones desviadoras se ajustan perfectamente. En consecuencia, parece importante investigar la validez de la tecnología de los elementos finitos empleados para capturar la presión.

A pesar de la discrepancia encontrada en el ajuste de las presiones, los valores obtenidos para la tensión axial media $\bar{\sigma}_z$ frente a la deformación natural ε_z , y la carga aplicada P frente a ε_z reproducen adecuadamente los resultados experimentales.

3.5. Conclusiones

- La tecnología de elementos finitos y los modelos constitutivos para grandes deformaciones elastoplásticas disponibles en la actualidad, permiten simular adecuadamente el ensayo de tracción simple.
- Las simulaciones computacionales realizadas reproducen correctamente las curvas de tensión axial media $\bar{\sigma}$ y carga aplicada P , frente a deformación logarítmica ε_z
- Los resultados numéricos obtenidos permiten ratificar la igualdad entre las tensiones radiales y circunferenciales en la zona del cuello, de acuerdo con los resultados de (Bridgman, 1944) presentados en el capítulo 2.

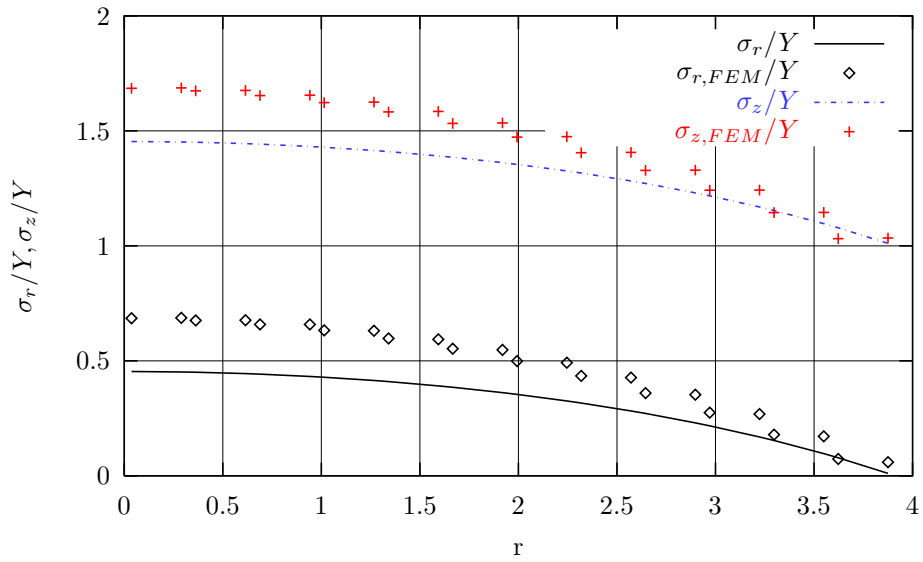


Figura 3.22: Distribución de tensiones radiales y verticales en el cuello

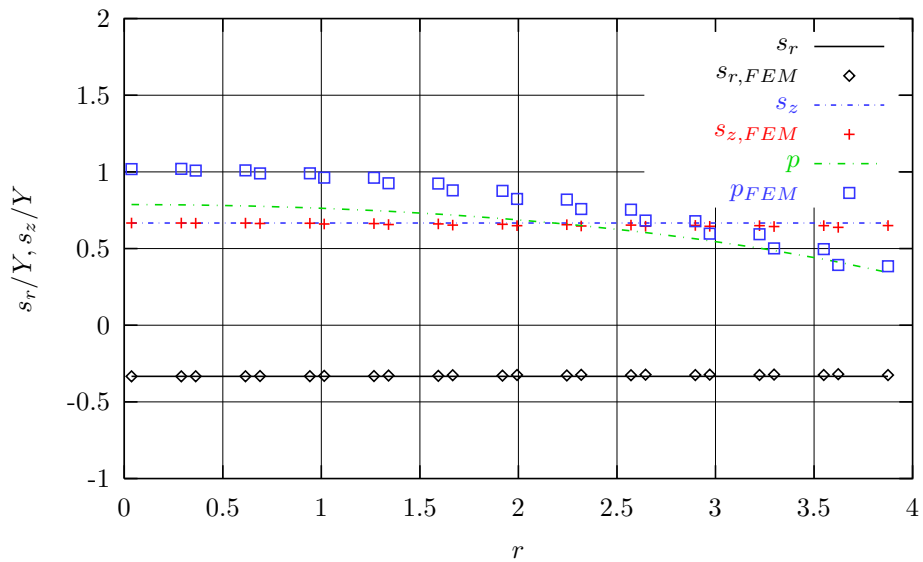


Figura 3.23: Distribución de tensiones desviadoras radiales y verticales en el cuello

- La distribución de tensiones en la sección del cuello obtenida a partir de las simulaciones computacionales, reproduce correctamente las expresiones analíticas presentadas en el capítulo 2. Lo mismo cabe decir de los valores de la deformación plástica efectiva ε^p y de la tensión de fluencia Y en dicha sección.
- Existen ciertas diferencias entre los valores analíticos de la presión y los obtenidos numéricamente por lo que es importante investigar la influencia de la tecnología de elementos finitos en los resultados obtenidos.
- De los estudios realizados se concluye que la expresión analítica (2.40) que relaciona $\bar{\sigma}_z$ con Y (Bridgman, 1944) es válida en una primera aproximación.

Capítulo 4

Tecnología de elementos

4.1. Introducción

En este capítulo se investiga la influencia que tiene la formulación del elemento escogido para la simulación en los resultados computacionales del ensayo. La definición del modelo de cálculo (modelo constitutivo, malla de elementos finitos, condiciones de contorno, cargas, etc.) es idéntica a la descrita en el apartado 3.4.1 del capítulo 3.

Para ello se han considerado el elemento mixto de presión constante (Q1/P0) (Nagtegaal et al., 1974) y los elementos de deformaciones supuestas Q1/E5, Q1/ES5 y Q1/ET5 (Armero y Glaser, 1997), integrados con cuadraturas de 5 y 9 puntos de Gauss.

En primer lugar se comparan los resultados obtenidos en este trabajo, con los resultados experimentales detallados en el apartado 3.3.3.

También se analiza la evolución de las siguientes variables a lo largo del ensayo:

- Estricción (D/D_0)
- Fuerza axial aplicada (P)
- Tensión axial media en el cuello ($\bar{\sigma}_z$)

Estos resultados permiten extraer conclusiones relativas a la influencia de la cuadratura empleada, y al comportamiento de las distintas familias de elementos consideradas.

Finalmente se investiga la distribución de las tensiones en la zona de la estricción, comparando los valores calculados en los puntos de Gauss con las distribuciones dadas por las expresiones (2.23) y (2.37).

4.1.1. Comparación con los resultados experimentales

En la figura 4.1 se muestran las curvas “Fuerza-Deformación Logarítmica ($P - \varepsilon_z$)” y “Tensión axial media-Deformación Logarítmica ($P/A - \varepsilon_z$)”. En

estas figuras se superponen los puntos que resultaron del ensayo de las cinco probetas sometidas al proceso de recocido (que en los títulos se denominan CT1, CT2, CT4, CT5 y CT6), con los obtenidos numéricamente en este trabajo.

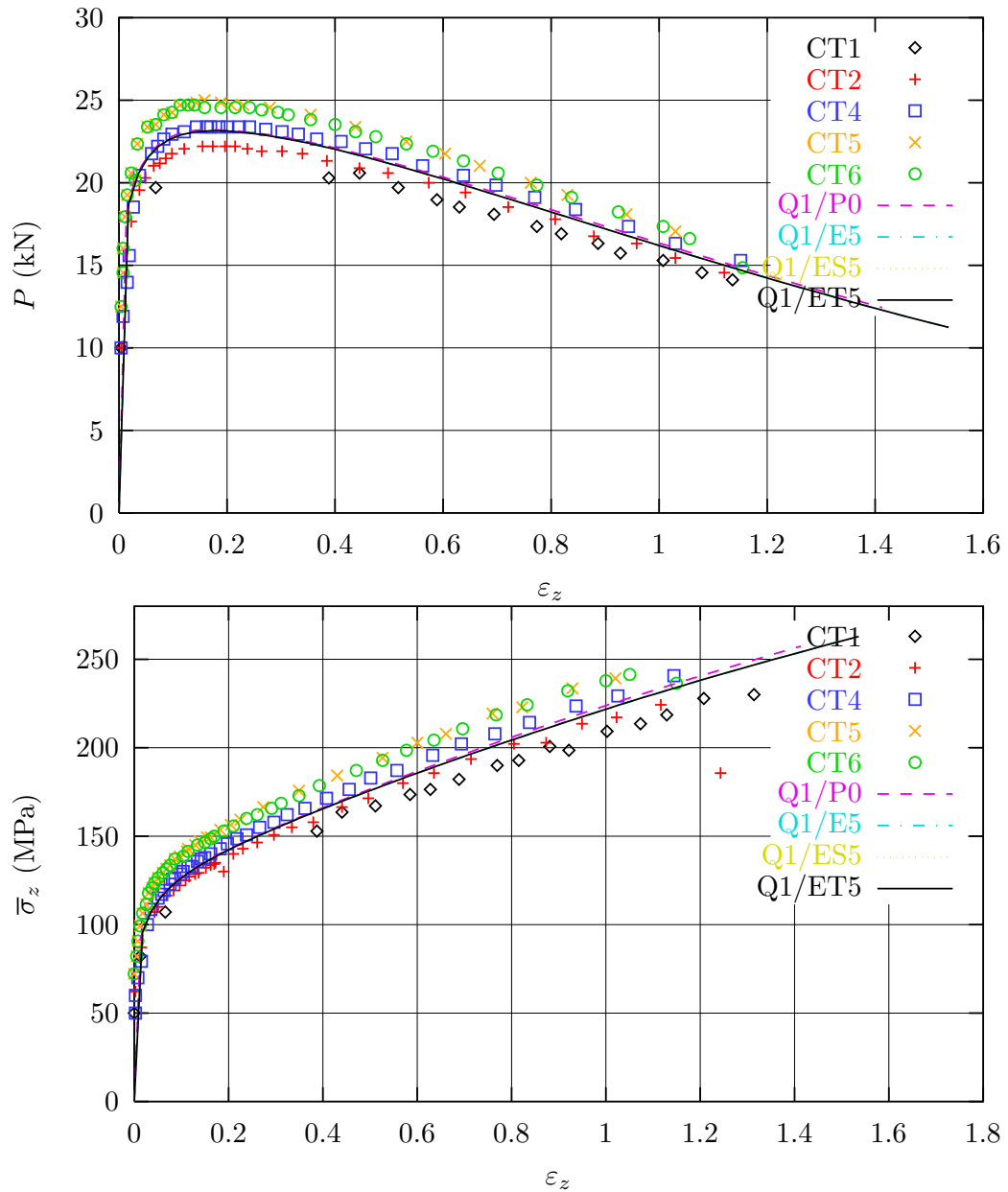


Figura 4.1: Comparación de resultados numéricos y experimentales. Curvas fuerza-deformación ($P - \varepsilon_z$) y tensión-deformación ($\bar{\sigma}_z - \varepsilon_z$)

En ambas figuras puede observarse que los resultados obtenidos numéricamente reproducen de manera adecuada los resultados experimentales. Aproximadamente a partir de $\varepsilon_z \approx 0,2$ el efecto geométrico de reducción de la sección (debido a la estricción) prima sobre el endurecimiento del material, y la carga total disminuye a pesar de que el material no tiene reblandecimiento.

4.1.2. Evolución de la estricción

Todos los elementos utilizados capturan adecuadamente la formación del cuello en el ensayo de tracción. En la figura 4.2 se muestra la deformada global obtenida con el elemento $Q1/E5$ integrado con cinco puntos de Gauss, y que es similar en todos los casos analizados. En la figura 4.3 se muestra un detalle de la zona de estricción, para cada uno de los elementos mejorados distinguiendo el orden de la cuadratura empleada. Todas estas figuras corresponden al final del proceso, cuando el desplazamiento impuesto en el extremo es 10 mm., sin que se aprecien diferencias entre unas y otras.

Para conocer la evolución de la estricción, se han dibujado las curvas de estricción D/D_0 frente a alargamiento $\Delta l/l_0$ a lo largo del ensayo. La figura 4.4 muestra la comparación, para un mismo tipo de elemento, de los resultados obtenidos con reglas de integración de 5 y 9 puntos de Gauss.

La conclusión que se extrae a la vista de estas figuras es que el orden de la cuadratura empleada no influye de manera sensible en la estricción que se desarrolla a lo largo del cálculo.

La figura 4.5 compara los resultados obtenidos con los elementos mejorados, integrados con cinco puntos de Gauss, con el elemento de presión constante $Q1/P0$. Como se puede observar, la estricción alcanzada es ligeramente mayor si se utilizan elementos de deformaciones supuestas.

En el cuadro 4.1 se recoge un resumen de los valores de la estricción obtenidos al final del cálculo.

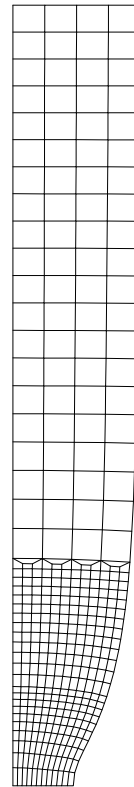


Figura 4.2: *Malla deformada. Elemento $Q1/E5$*

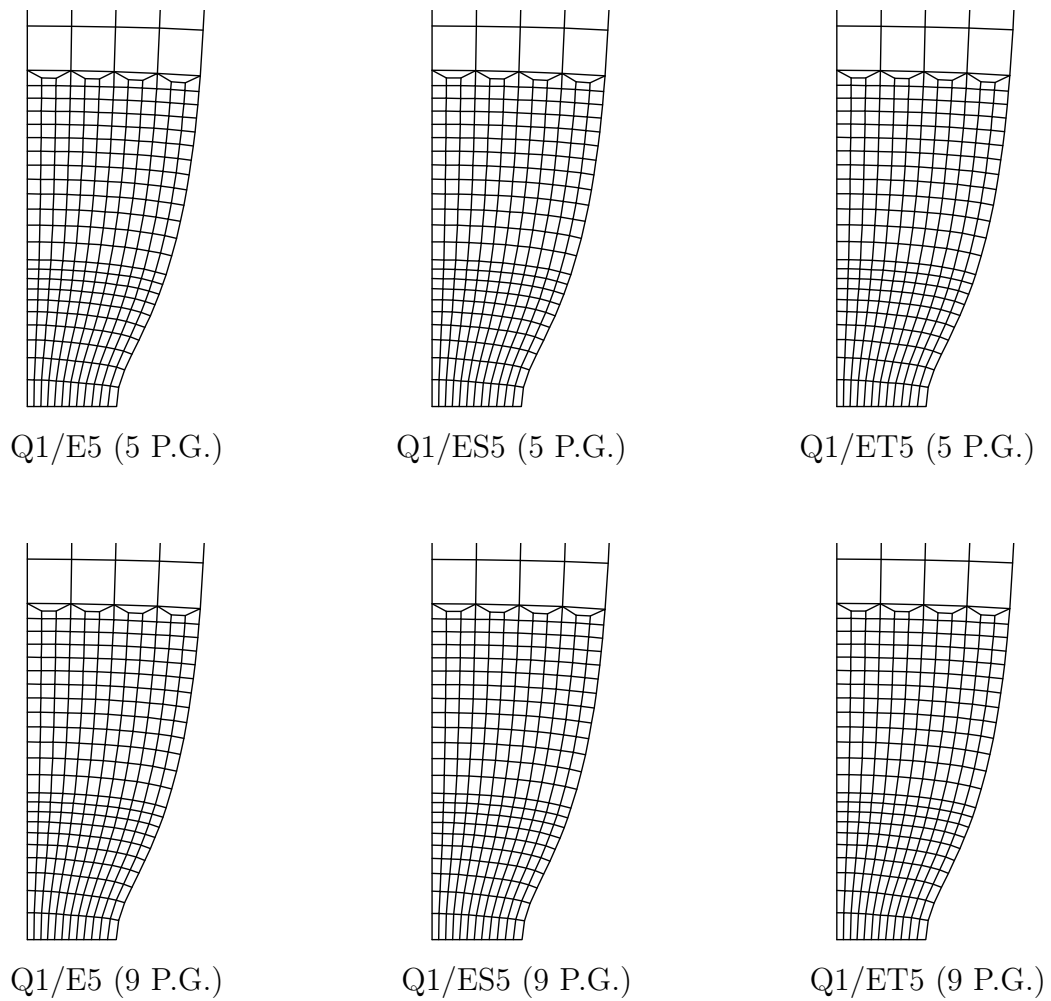


Figura 4.3: *Detalles de la zona de estricción*

	D/D_0
Q1/P0	0,493
Q1/E5 (5 P.G.)	0,464
Q1/E5 (9 P.G.)	0,471
Q1/ES5 (5 P.G.)	0,464
Q1/ES5 (9 P.G.)	0,475
Q1/ET5 (5 P.G.)	0,464
Q1/ET5 (9 P.G.)	0,467

Cuadro 4.1: *Comparación de resultados numéricos de la estricción, en el cuello, al final del análisis*

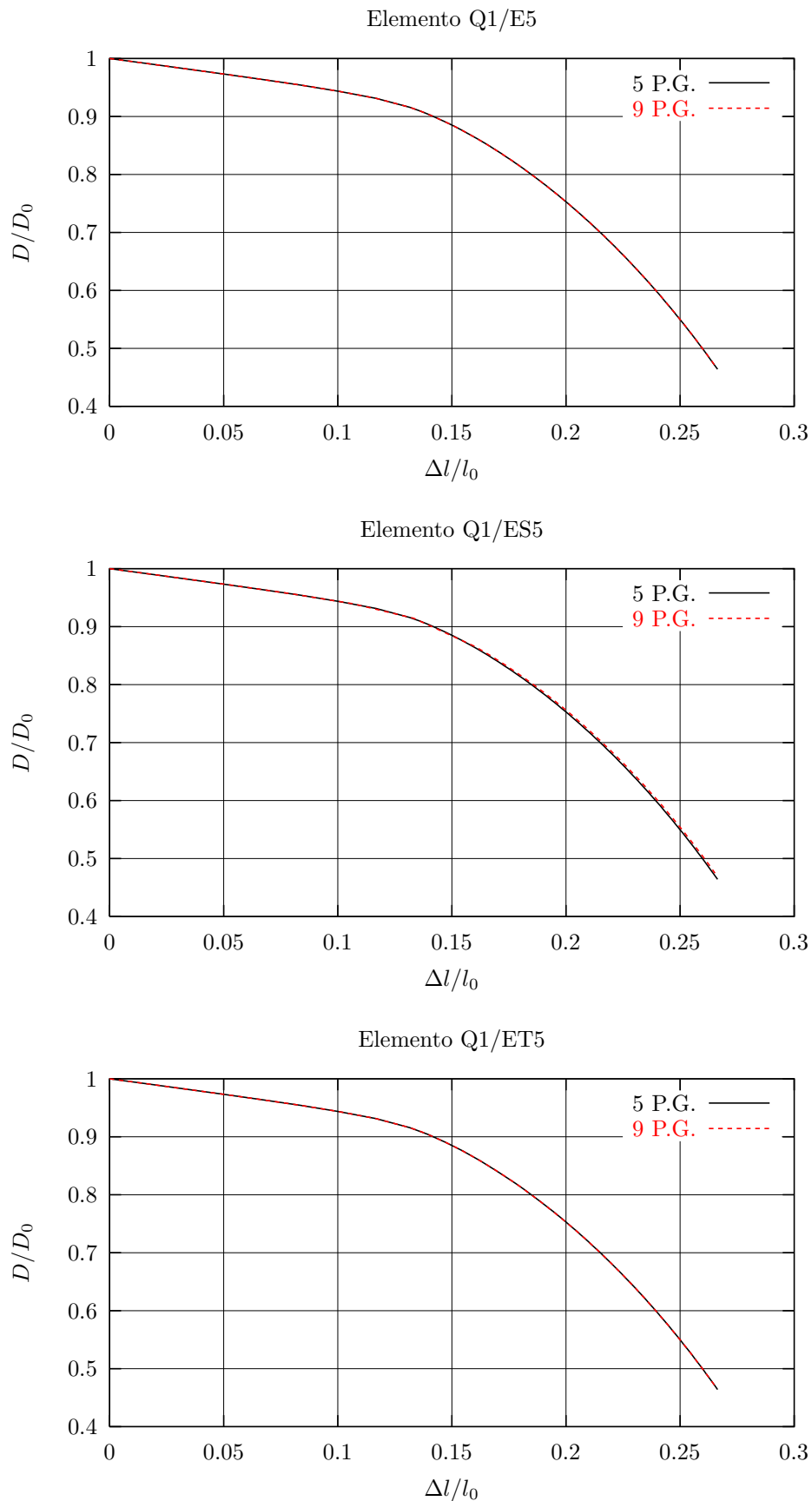


Figura 4.4: Estricción frente a alargamiento. Elementos Q1/E5, Q1/ES5 y Q1/ET5. Cuadraturas de 5 y 9 puntos de Gauss

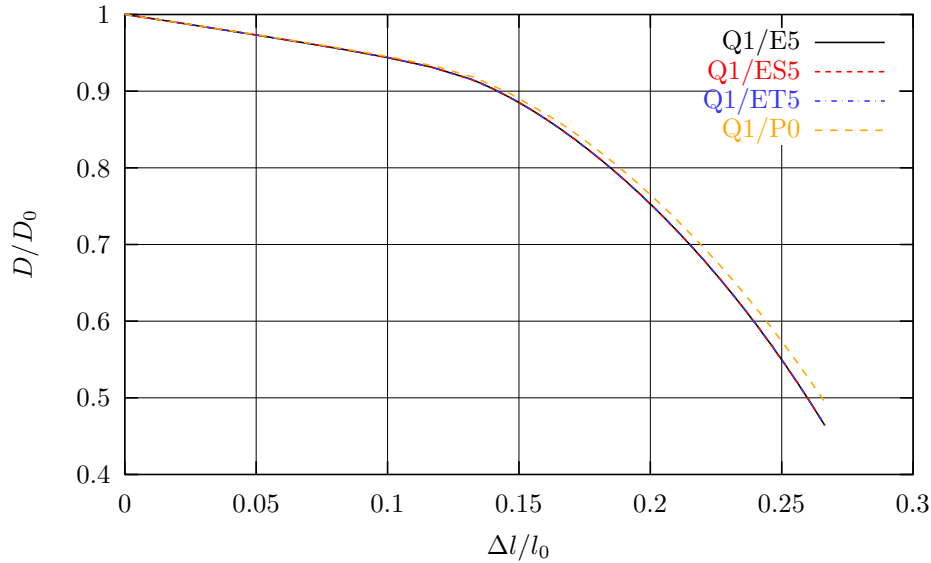


Figura 4.5: Estricción frente a alargamiento. Elementos Q1/E5, Q1/ES5, Q1/ET5 y Q1/P0

4.1.3. Evolución de la tensión axial media

A continuación se discuten los resultados obtenidos referentes a la evolución de la tensión axial media $\bar{\sigma}_z$ en el cuello, a lo largo del ensayo. La tensión $\bar{\sigma}_z$ se dibuja frente a la deformación logarítmica axial ε_z , con objeto de obtener una curva que represente de manera global el comportamiento elastoplástico uniaxial del aluminio. Para ello, los valores de ε_z y $\bar{\sigma}_z$ se obtienen introduciendo en las expresiones (2.20) y (2.25), respectivamente, los valores de P y D calculados en el análisis de elementos finitos.

En primer lugar se analiza la influencia del orden de la cuadratura de Gauss en los resultados de los elementos con deformaciones supuestas. En la figura 4.6 se representa los resultados obtenidos con cada familia de elementos mejorados, si se emplea la regla de 5 o 9 puntos de Gauss. La conclusión, a la vista de estos gráficos, es que la relación obtenida entre tensión y deformación axiales vuelve a ser independientemente del orden de la cuadratura de integración empleada. Sin embargo, a pesar de que dicha relación sea la misma, las curvas obtenidas con 5 puntos de Gauss terminan en puntos de mayor abscisa, dado que la estricción final es mayor, y por lo tanto la deformación logarítmica también.

En la figura 4.7 se comparan los resultados obtenidos con los elementos de deformaciones supuestas y el elemento mixto Q1/P0. Aunque desde el punto de vista práctico son los mismos, el elemento Q1/P0 tiene un comportamiento ligeramente más rígido, y la deformación logarítmica al final del ensayo es algo menor.

Finalmente, en el cuadro (4.2), se muestran los valores de la deformación y de la tensión alcanzados al final del cálculo.

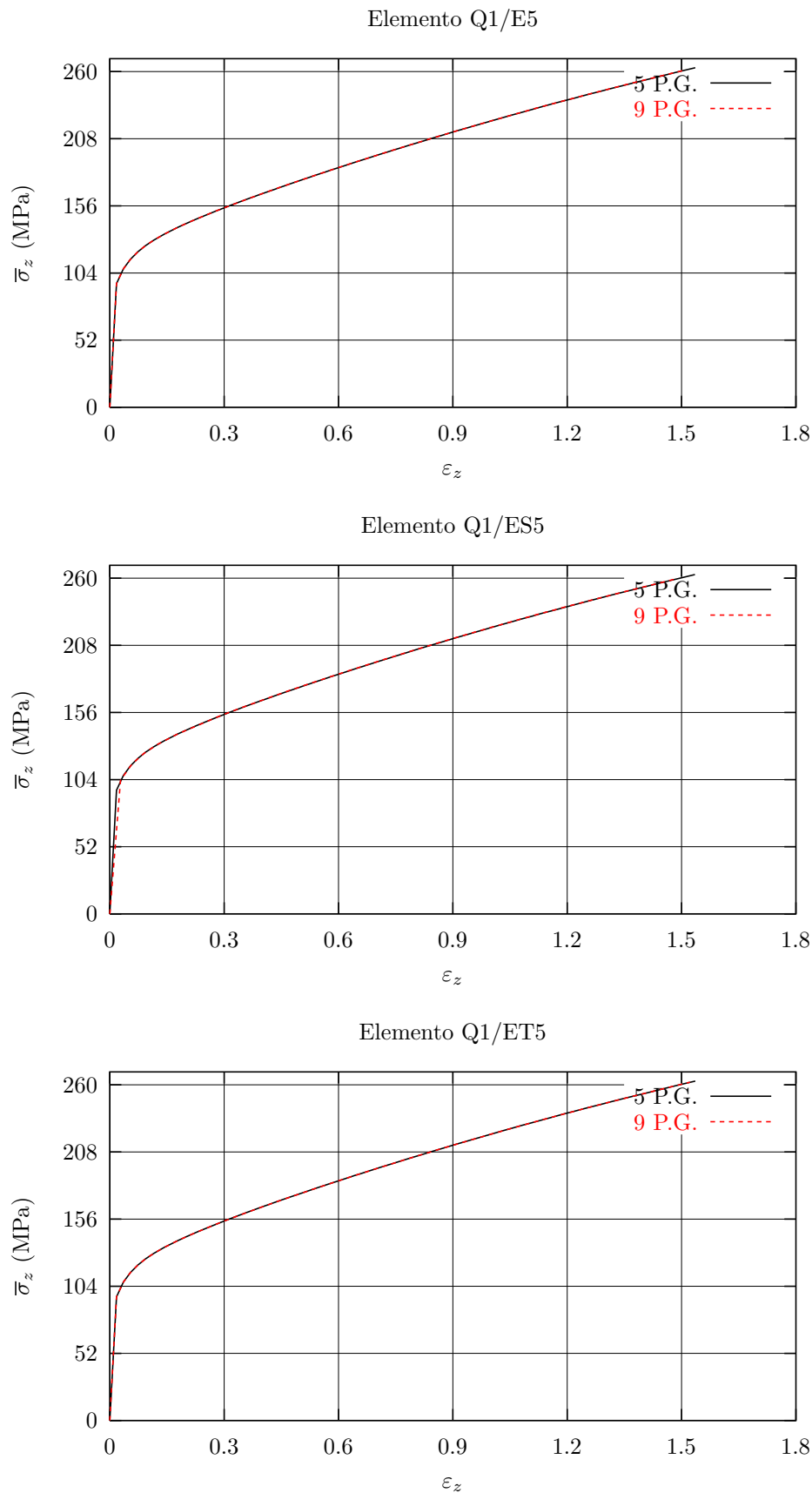


Figura 4.6: Tensión axial media frente a deformación logarítmica axial. Elementos Q1/E5, Q1/ES5 y Q1/ET5. Cuadraturas de 5 y 9 puntos de Gauss

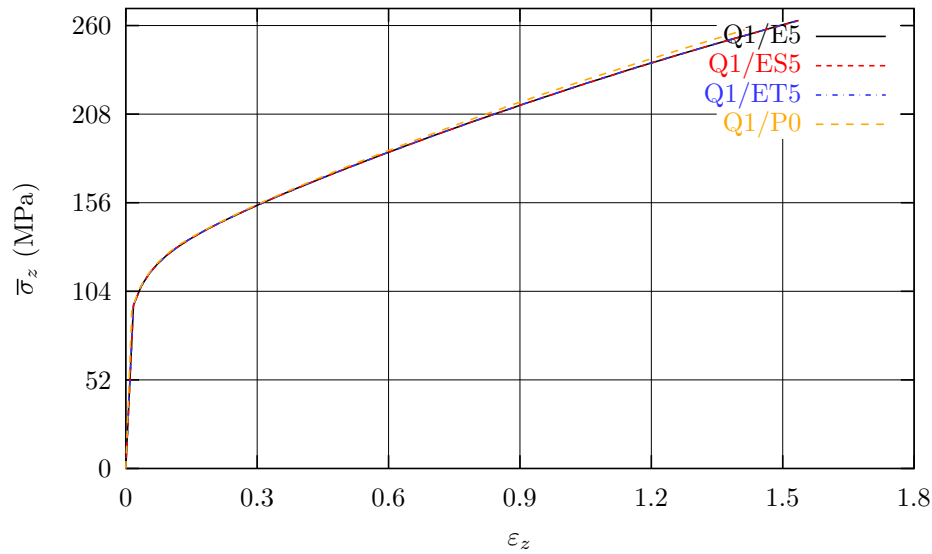


Figura 4.7: Tensión axial media frente a deformación logarítmica axial. Elementos Q1/E5, Q1/ES5, Q1/ET5 y Q1/P0

	ε_z	$\bar{\sigma}_z$ (MPa)
Q1/P0	1,413	257,4
Q1/E5 (5 P.G.)	1,536	263,0
Q1/E5 (9 P.G.)	1,508	261,1
Q1/ES5 (5 P.G.)	1,535	262,8
Q1/ES5 (9 P.G.)	1,490	259,8
Q1/ET5 (5 P.G.)	1,536	262,9
Q1/ET5 (9 P.G.)	1,522	262,0

Cuadro 4.2: Deformación y tensión axial al final del análisis

4.1.4. Evolución de la carga aplicada

A continuación se analiza la evolución de la carga axial aplicada frente a la deformación logarítmica. El valor de dicha carga se obtiene sumando las reacciones axiales de cada uno de los nodos que tienen el desplazamiento impuesto. Al igual que en los apartados anteriores se comienza por investigar la influencia del orden de la cuadratura de Gauss y se analiza el comportamiento de cada una de la familia de elementos considerada.

La figura 4.8 muestra la evolución de la carga aplicada para los elementos Q1/E5, Q1/ES5 y Q1/ET5 integrados con 5 y 9 puntos de Gauss. La figura 4.9 compara la respuesta de los elementos mejorados, integrados con cinco puntos de Gauss, y del elemento mixto de presión constante. Al igual que en apartados anteriores se puede concluir que el comportamiento de todos

los elementos es esencialmente es el mismo, con independencia de la regla de integración empleada. El cuadro 4.3 muestra los valores máximos de la carga y la deformación logarítmica axial correspondiente, y el valor de la deformación al final del cálculo con la carga correspondiente. Los valores de este cuadro permiten concluir:

- El elemento Q1/P0 es ligeramente más rígido que los elementos con deformaciones supuestas
- El comportamiento de los elementos con deformaciones supuestas es esencialmente el mismo. En la rama pre-pico el comportamiento es idéntico, y en la rama post-pico se observa un ligero aumento de la rigidez si se utiliza la cuadratura de 3×3 puntos de Gauss.

	P_{max} (N)	$\varepsilon_z(P_{max})$	$\varepsilon_{z,fin}$	P_{fin} (N)
Q1/P0	23,21	0,172	1,413	12,44
Q1/E5 (5 P.G.)	23,15	0,176	1,536	11,25
Q1/E5 (9 P.G.)	23,15	0,176	1,508	11,48
Q1/ES5 (5 P.G.)	23,15	0,176	1,535	11,24
Q1/ES5 (9 P.G.)	23,16	0,179	1,490	11,62
Q1/ET5 (5 P.G.)	23,15	0,176	1,536	11,24
Q1/ET5 (9 P.G.)	23,15	0,176	1,522	11,35

Cuadro 4.3: *Comparación de resultados numéricos de la carga aplicada y de la deformación logarítmica axial en el cuello*

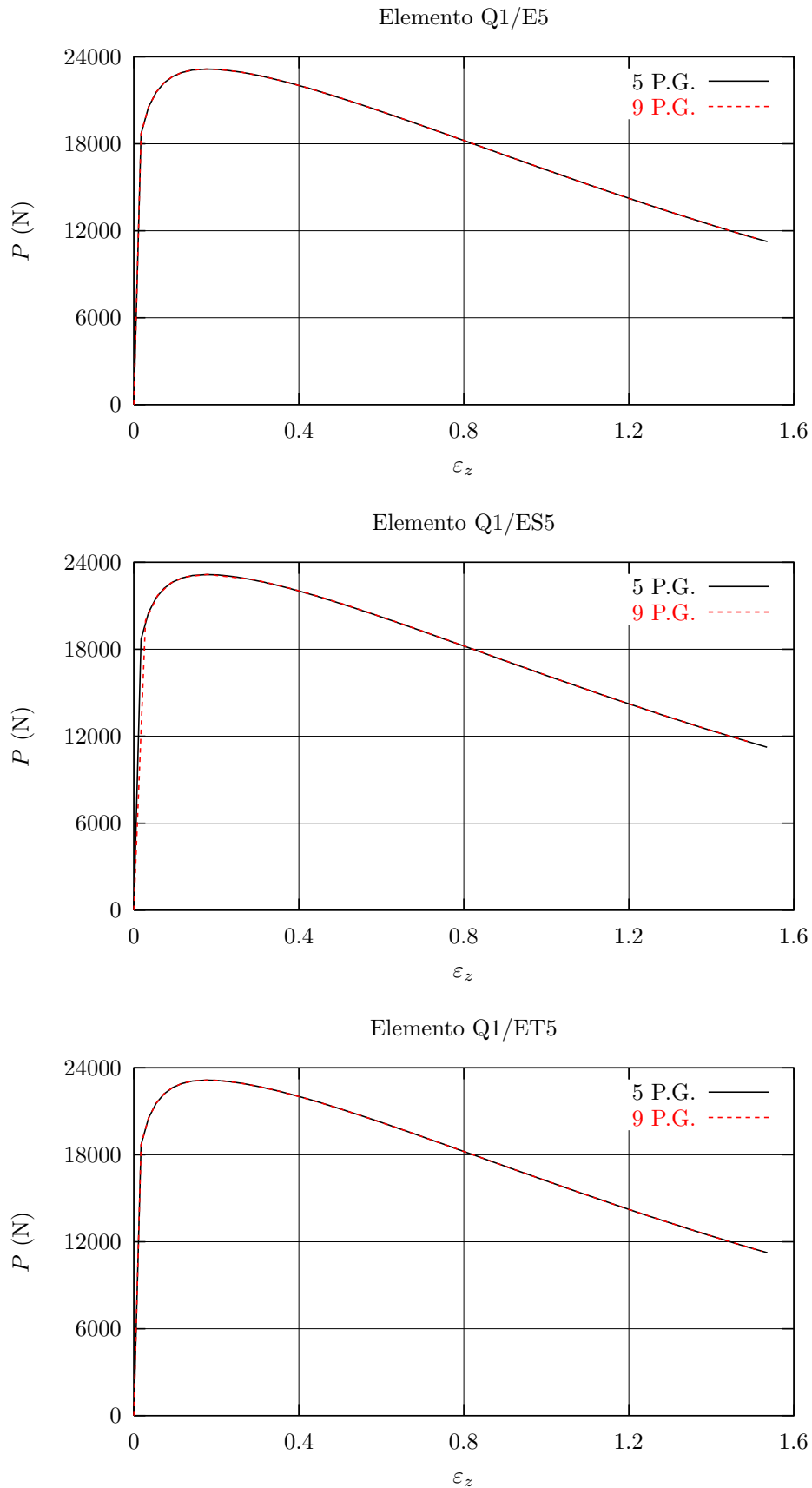


Figura 4.8: Carga aplicada frente a deformación logarítmica axial. Elementos Q1/E5, Q1/ES5 y Q1/ET5. Cuadraturas de 5 y 9 puntos de Gauss

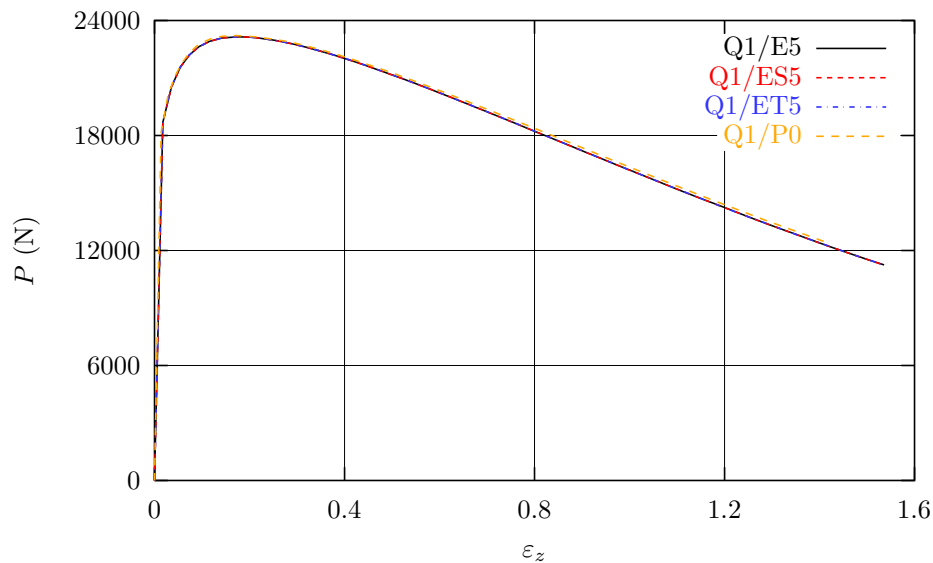


Figura 4.9: Carga aplicada frente a deformación logarítmica axial. Elementos $Q1/E5$, $Q1/ES5$, $Q1/ET5$ y $Q1/P0$

4.1.5. Distribución de tensiones en el cuello

En este apartado se analiza la influencia que tiene la formulación del elemento en la distribución de tensiones en el cuello de la probeta. Se considera el instante final del análisis, en el que el desplazamiento axial impuesto alcanza 10 mm.

Para comprobar cualitativamente la hipótesis de Bridgman en el cuello correspondiente a la igualdad entre las tensiones radiales y circunferenciales, en las figuras 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14 y 4.15 se muestran los contornos correspondientes, concluyéndose que esta hipótesis se verifica, con independencia del elemento y del orden de la cuadratura que se utilice.

En la figura 4.16 se muestran los contornos de deformación plástica efectiva, para comprobar que su valor en el cuello es constante de acuerdo con la ecuación 2.21.

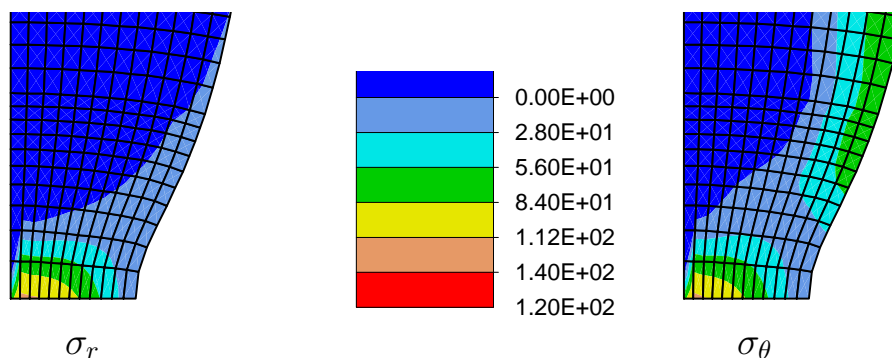


Figura 4.10: Elemento $Q1/E5$. Cuadratura de 5 puntos de Gauss.

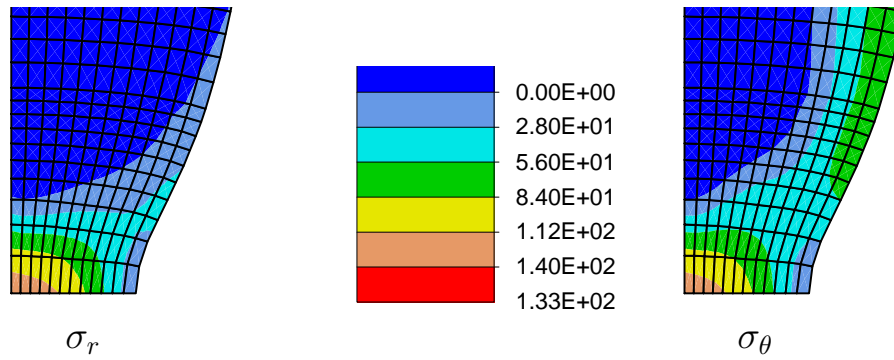


Figura 4.11: Elemento $Q1/E5$. Cuadratura de 9 puntos de Gauss.

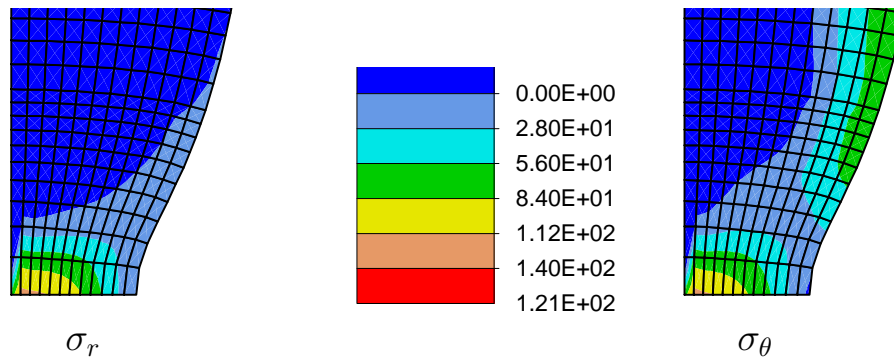


Figura 4.12: Elemento $Q1/E5$. Cuadratura de 5 puntos de Gauss.

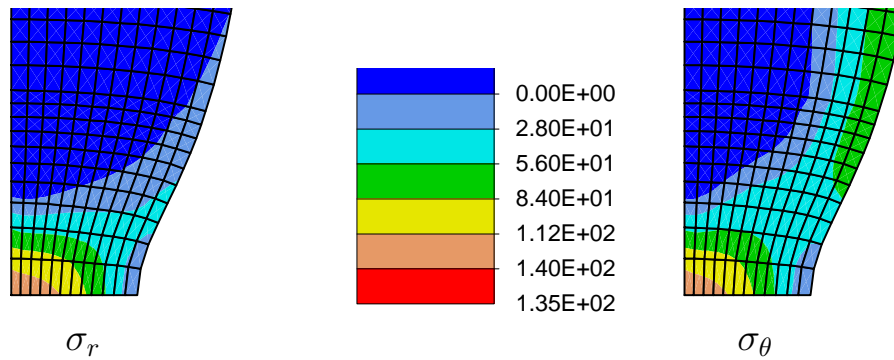


Figura 4.13: Elemento $Q1/ES5$. Cuadratura de 9 puntos de Gauss.

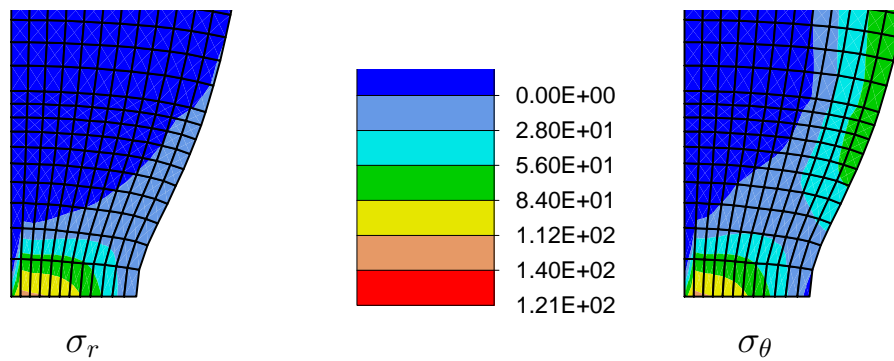


Figura 4.14: Elemento $Q1/ET5$. Cuadratura de 5 puntos de Gauss.

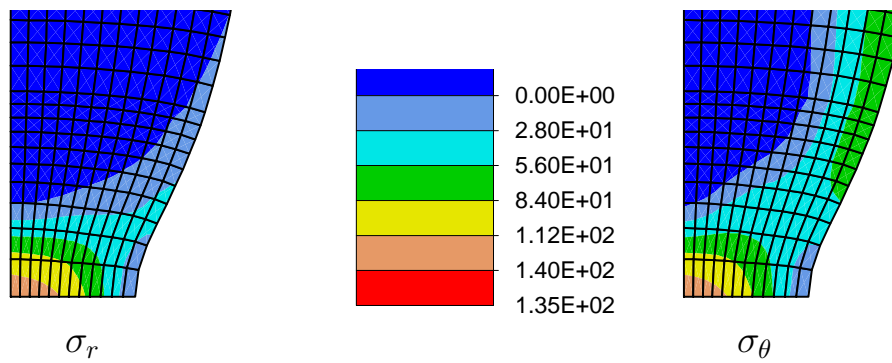


Figura 4.15: Elemento Q1/ET5. Cuadratura de 9 puntos de Gauss.

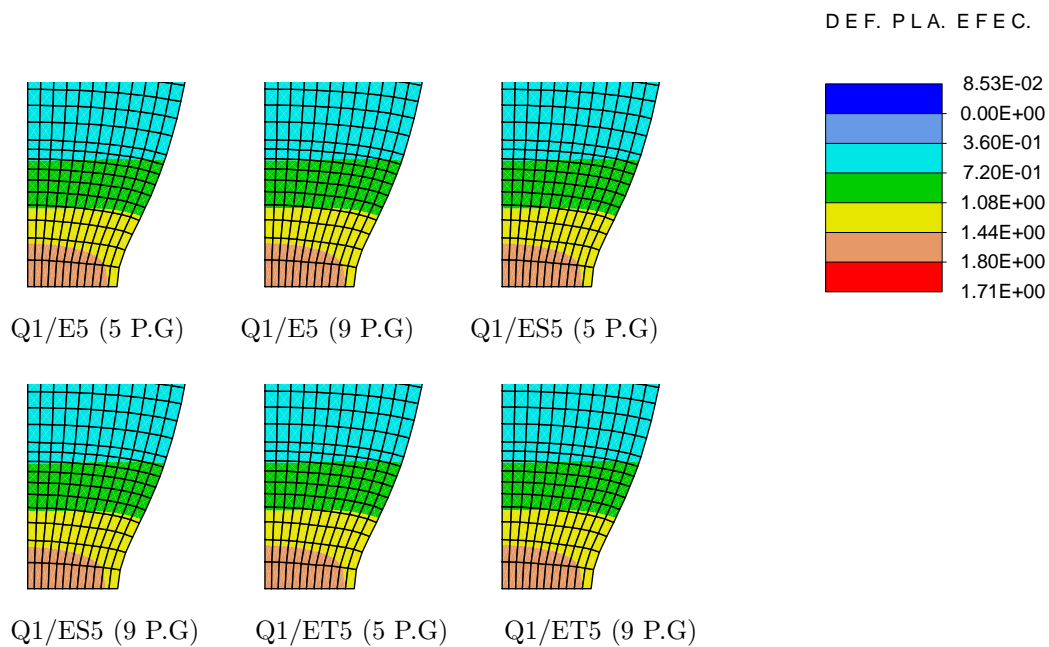


Figura 4.16: Deformación plástica efectiva en el cuello de la probeta

Para la sección del cuello se compara la distribución de tensiones analíticas (Bridgman, 1944) definida por las ecuaciones (2.23) y (2.37), con la obtenidas en este capítulo para los puntos de Gauss próximos a la estricción, realizando para ello un análisis similar al del apartado 3.4.3. Las curvas de las figuras 4.17 y 4.18 comparan los perfiles de tensiones analíticos con los obtenidos empleando el elemento Q1/P0, y los elementos mejorados Q1/E5, Q1/ES5 y Q1/ET5 integrados con cinco y nueve puntos de Gauss.

De estas curvas se extraen las siguientes conclusiones:

1. En general, la distribución de tensiones se ajusta correctamente a la obtenida por Bridgman.
2. Cuando se emplean cuadraturas de 5 puntos de Gauss los resultados obtenidos reproducen de forma razonable las predicciones de Bridgman, aunque se observan oscilaciones de los valores numéricos, especialmente en la zona próxima al eje de revolución.
3. Cuando se emplean reglas de integración de 9 puntos de Gauss los perfiles de tensiones obtenidos numéricamente ajustan muy bien con los resultados semi-empíricos (Bridgman, 1944)

Las figuras 4.19 y 4.20 muestran la distribución de las tensiones desviadoras y de la presión en el cuello. En ellas se comparan las curvas analíticas (3.22), (3.23) y (3.24), con las obtenidas en el cálculo por elementos finitos usando distintas cuadraturas. Puede comprobarse que en los puntos próximos al eje de la probeta se obtienen valores de la presión que no se ajustan a los expresados en (3.22), para los elementos Q1/P0 y los mejorados con 5 puntos de Gauss. Sin embargo, los valores correspondientes a las tensiones desviadoras se ajustan perfectamente. Se comprueba también que los resultados obtenidos al emplear la cuadratura de 9 puntos de Gauss son correctos.

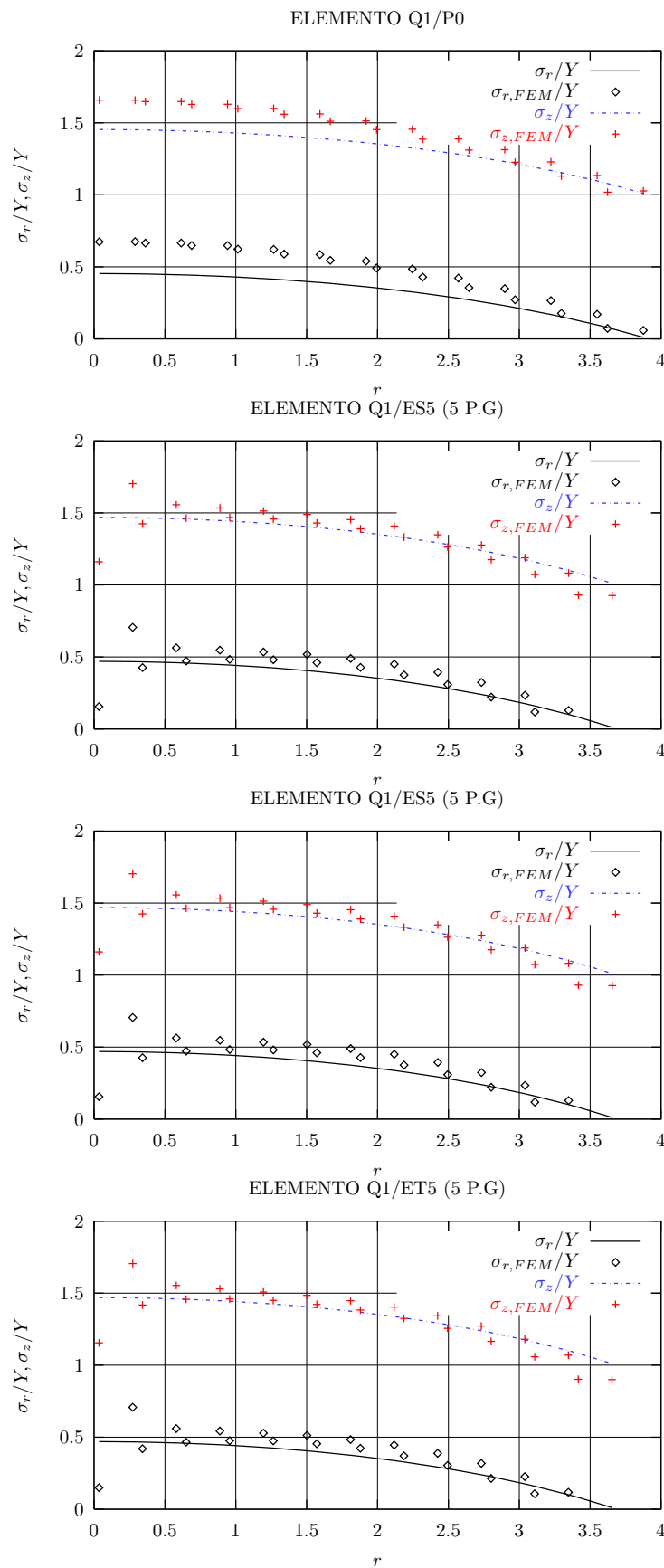


Figura 4.17: Distribución de tensiones radiales y verticales en el cuello

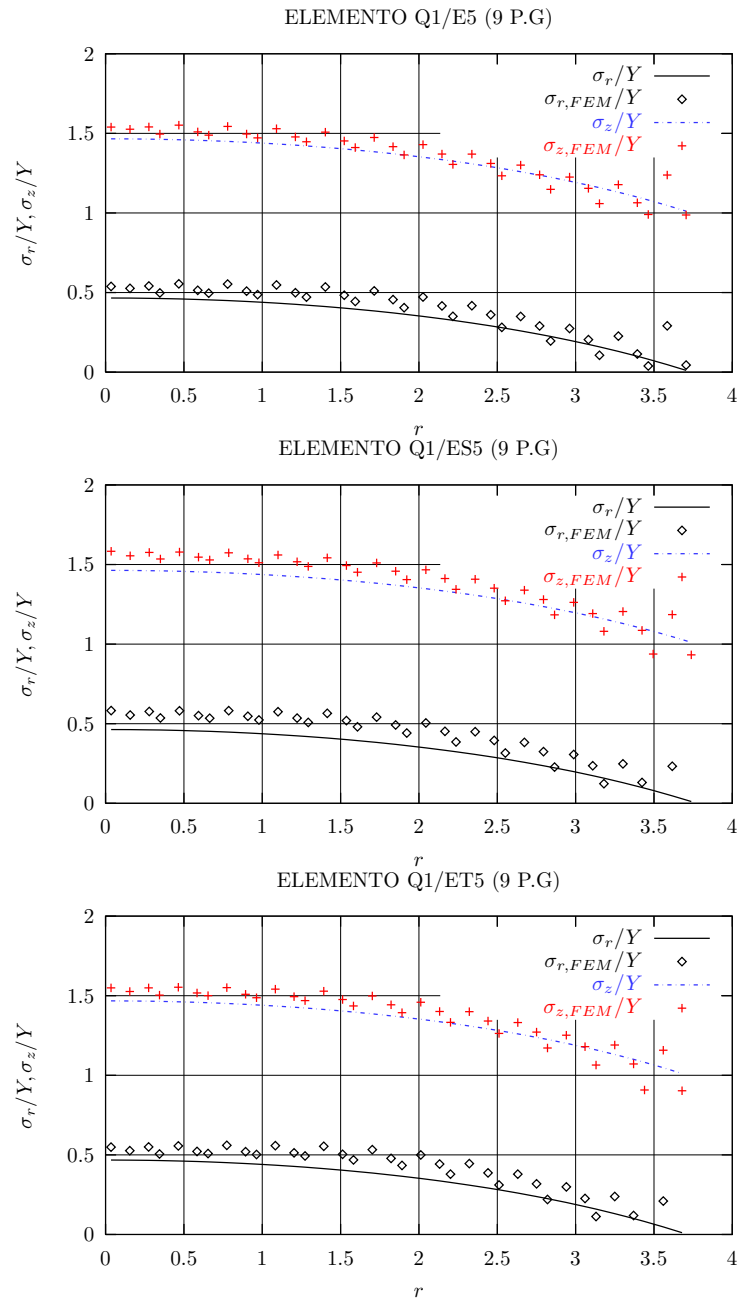


Figura 4.18: *Distribución de tensiones radiales y verticales en el cuello*

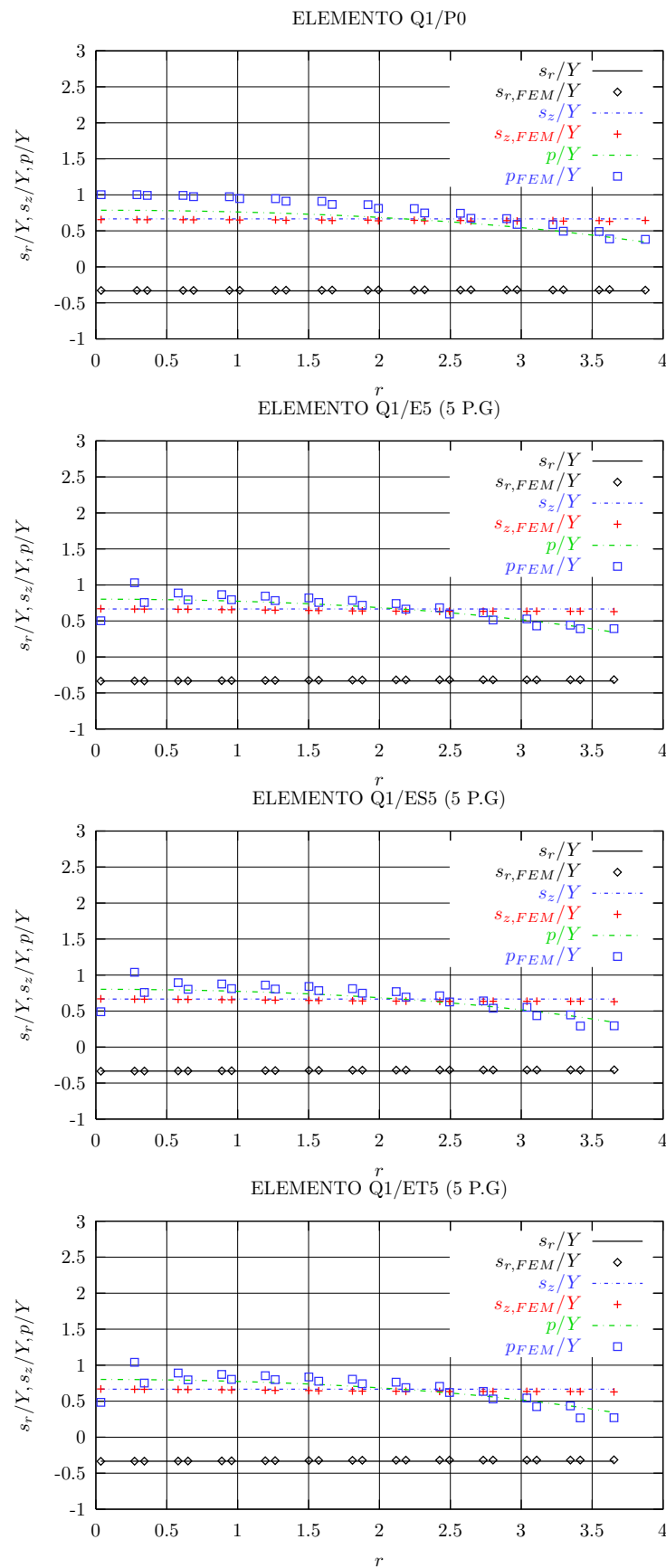


Figura 4.19: Distribución de presiones y tensiones desviadoras radiales y verticales en el cuello

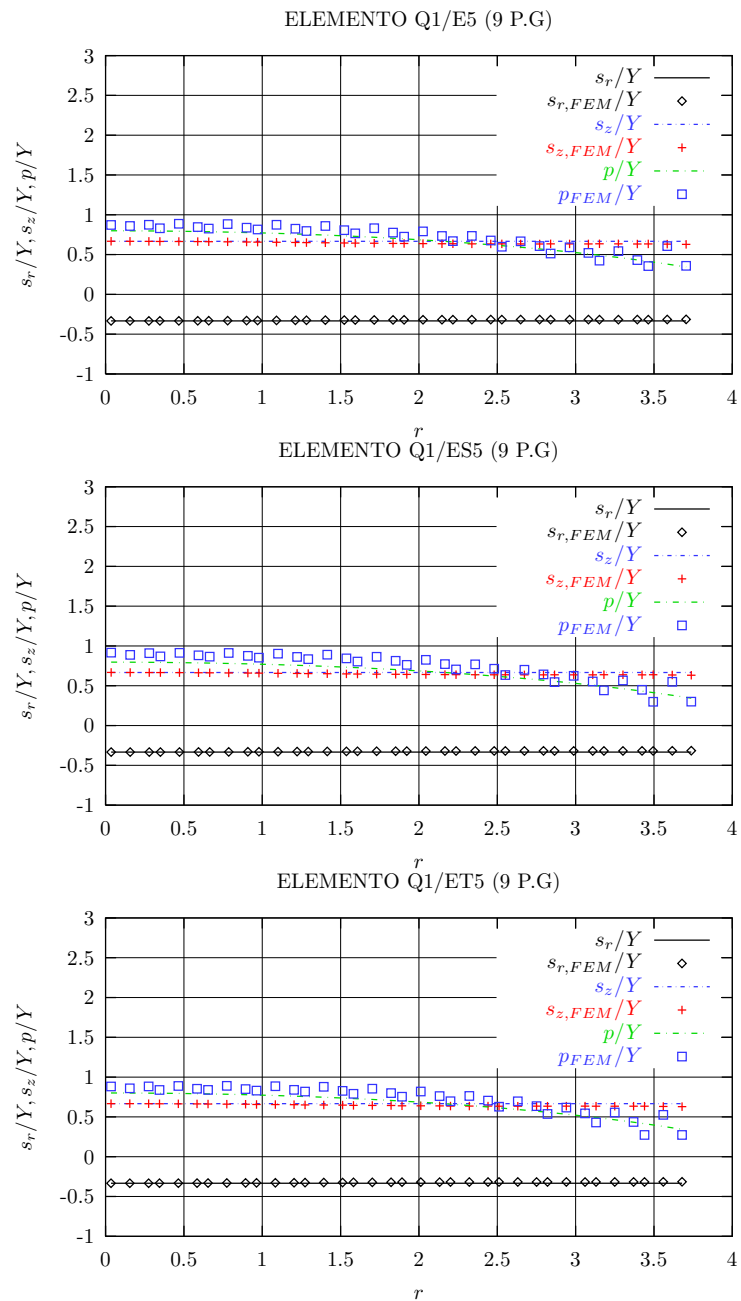


Figura 4.20: *Distribución de presiones y tensiones desviadoras radiales y verticales en el cuello*

4.2. Conclusiones

De los resultados presentados en este capítulo se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Todos los elementos finitos empleados ($Q1/P0$ y formulación EAS con 5 y 9 puntos de Gauss) reproducen de manera adecuada los valores globales del ensayo reportados experimentalmente: estricción, carga aplicada, tensión axial media, etc.
- Los elementos mejorados con integración de 9 puntos de Gauss reproducen bien la distribución de tensiones de ([Bridgman, 1944](#))

Capítulo 5

Sensibilidad frente a la imperfección

5.1. Introducción

Cuando se desea ensayar una probeta mediante el ensayo de tracción simple se suele imponer una pequeña imperfección en la zona central con el fin de obligar a que la estricción se produzca en dicho lugar.

La respuesta de la probeta ensayada, como se ha destacado en capítulos anteriores, posee dos etapas muy bien marcadas: una primera en la cual la respuesta es prácticamente homogénea y una segunda etapa que se caracteriza por la estricción que aparece en la zona central.

Cuando se realiza la simulación computacional del ensayo de tracción simple puede emplearse una probeta homogénea y realizar un estudio de autovalores para determinar la bifurcación y la trayectoria post-crítica (Needleman, 1972). Una alternativa más habitual en la práctica computacional consiste en imponer una pequeña imperfección obteniéndose un problema de punto límite con imperfecciones.

Esta segunda opción, también empleada en el contexto de problemas de estabilidad elástica, se distingue por la sensibilidad de los resultados frente al tamaño de las imperfecciones.

Desde el punto de vista de la caracterización de las ecuaciones constitutivas, objetivo esencial del proyecto en curso (García-Garino et al., 2002-2004), la interpretación de los resultados del ensayo es clave para obtener buenos resultados. En consecuencia, es necesario investigar si la sensibilidad de los resultados frente a las imperfecciones puede influir en la calibración de las ecuaciones constitutivas.

Como se señaló en el capítulo 3, en (Simó, 1988b) se detecta sensibilidad de los resultados frente a cambios en la malla de elementos finitos, cuestión que se trata en el capítulo 6.

Los autores han estudiado el problema desde el punto de vista numérico en trabajos previos (García-Garino et al., 1996; García-Garino et al., 1997; García-Garino et al., 1999b; García-Garino et al., 1999a), cuyos resultados

se presentan en este capítulo. Actualmente se llevan a cabo estudios experimentales para profundizar en el conocimiento del problema.

Para llevar a cabo el citado estudio se simuló computacionalmente el ensayo de estricción para un conjunto de probetas con diferentes imperfecciones. La sensibilidad de los resultados obtenidos frente a las imperfecciones consideradas se midió comparando la evolución de variables de interés como son la estricción y la carga axial aplicada.

Se realizaron dos tipos de análisis. El primero de ellos, denominado *global*, compara las diferentes respuestas en función del alargamiento de la probeta $\Delta L/L_0$ (deformación ingenieril), variable usual en la literatura. El segundo estudio, denominado *local*, compara la respuesta de las probetas consideradas en función de la deformación logarítmica en el cuello ε_z . Este segundo estudio, hasta el conocimiento de los autores, no registra antecedentes en la literatura.

5.2. Definición de las imperfecciones

Para realizar el estudio numérico se parte de una geometría perfectamente cilíndrica de radio $R = 8,1$ mm., y se introduce una serie de imperfecciones en la sección central disminuyendo ligeramente el radio. Para definir el radio de la sección central se han utilizado los valores de la tabla 5.1.

Geometría	R_i	$1 - R_i/R_0$ (%)
1	7,95	1,85 %
2	8,00	1,23 %
3	8,05	0,62 %
4	8,06	0,49 %
5	8,07	0,37 %
6	8,08	0,25 %
7	8,09	0,12 %

Cuadro 5.1: *Definición de las imperfecciones consideradas en el análisis de sensibilidad.*

Para realizar los estudios numéricos correspondientes se han utilizado los mismos parámetros (discretización, condiciones de contorno, acciones y modelo constitutivo) que en el modelo del capítulo 4. Los elementos empleados son mixtos con la formulación $Q1/P0$ descrita en (García-Garino, 1993).

5.3. Resultados del problema

En la figura 5.1 se muestra el perfil de los desplazamientos radiales a lo largo de la probeta para las distintas imperfecciones consideradas. Puede observarse que para la geometría sin imperfecciones el desplazamiento

radial obtenido es uniforme sin producirse estricción. En cambio, para las geometrías con imperfección se observa que los valores de estricción alcanzados dependen fuertemente del tamaño de la imperfección. Asimismo se observa que en las zonas alejadas del cuello los perfiles dependen en menor medida de la imperfección, tendiendo a coincidir.

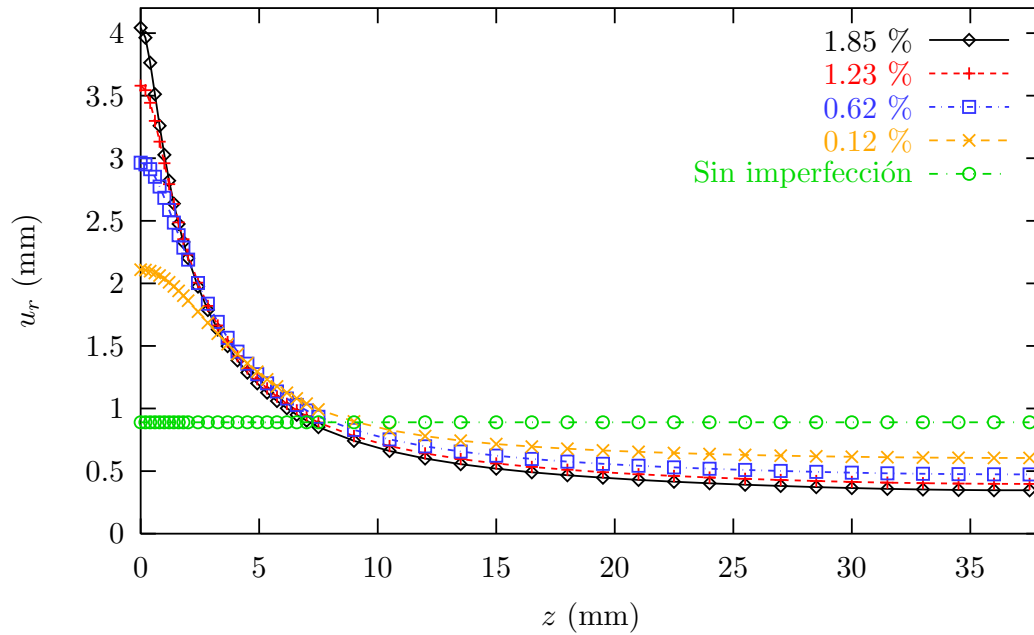


Figura 5.1: Perfil de desplazamientos radiales u_r frente a la coordenada axial z para las diferentes imperfecciones.

5.4. Análisis de sensibilidad global

Para estudiar la influencia de las imperfecciones en los resultados obtenidos con las distintas geometrías consideradas, se compara la evolución de la estricción D/D_0 y la carga axial P , en función del alargamiento de la probeta $\Delta L/L_0$, como es usual en la literatura.

La figura 5.2 muestra la evolución de la estricción y la figura 5.3 muestra la evolución de la carga aplicada, ambas frente a la deformación ingenieril, para cada uno de las geometrías estudiadas. En las mismas se observa una marcada sensibilidad de los resultados obtenidos.

Si bien en la literatura no se han realizado estudios de sensibilidad frente a las imperfecciones geométricas para este problema, pueden citarse otros análisis de sensibilidad. En (Simó, 1988b) se presentó la dependencia de los resultados frente a la discretización espacial, y en (Ponthot, 1994) se muestra que el problema es dependiente del programa de carga.

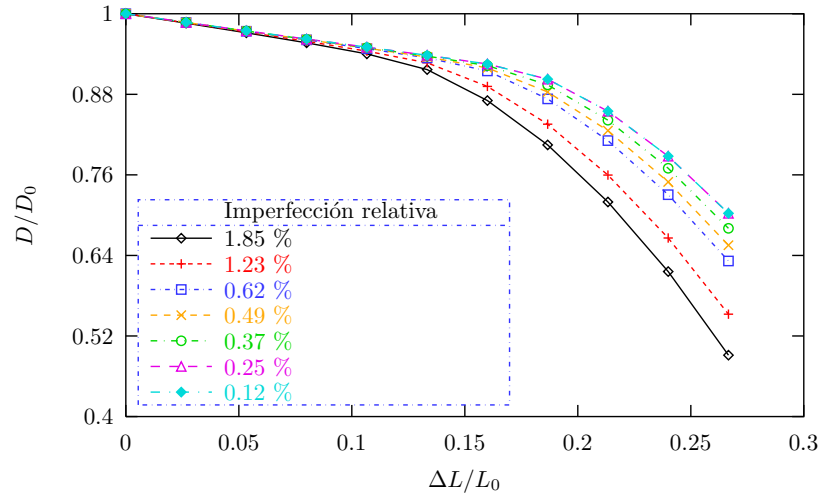


Figura 5.2: Evolución de la estricción D/D_0 en función de la deformación ingenieril para las diferentes imperfecciones.

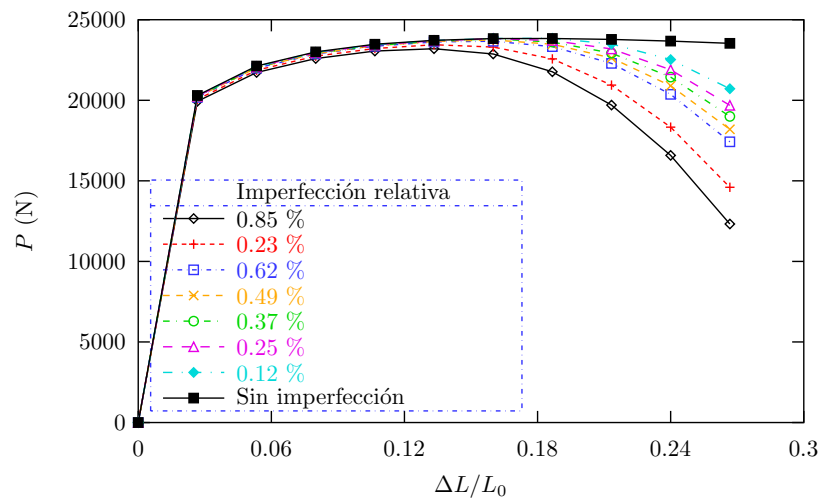


Figura 5.3: Evolución de la carga P (N) en función de la deformación ingenieril $\Delta l/l_0$ para las diferentes imperfecciones.

5.4.1. Análisis local

A partir de los resultados obtenidos previamente por los autores (García-Garino et al., 1996; García-Garino et al., 1997; García-Garino et al., 1999b; García-Garino et al., 1999a) se discute el *análisis local* que relaciona la carga P en función una variable independiente local.

La elección de la variable local no es trivial y bien podría adoptarse el parámetro D/D_0 , sin embargo, teniendo en cuenta que el interés del problema es conocer la ecuación constitutiva, se selecciona la deformación logarítmica $\varepsilon_z = -2\ln(D/D_0)$ en la sección del cuello.

La figura 5.4 muestra un resultado destacable y quizás sorprendente: la respuesta de todas las probetas estudiados es prácticamente la misma, con excepción de las ligeras diferencias que aparecen en el entorno de la carga máxima. Aparentemente se ha recuperado la unicidad de la solución para el problema, un resultado que, hasta el conocimiento de los autores, no aparece citado en la literatura.

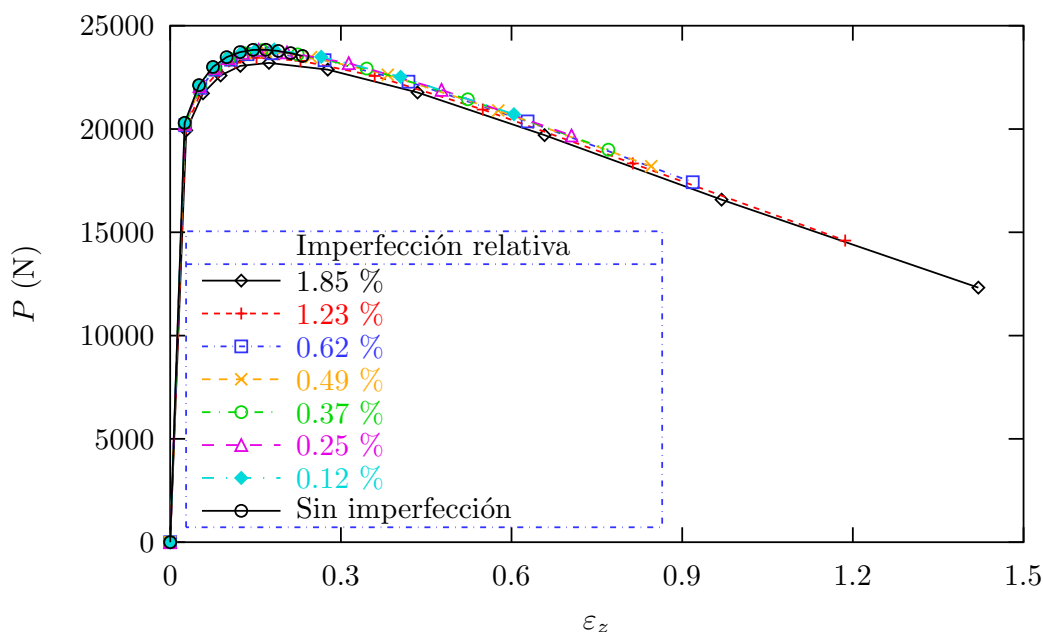


Figura 5.4: Carga versus deformación logarítmica en $z = 0$ en función del tamaño de la imperfección

Sin embargo un análisis cuidadoso de la figura 5.4 revela que las diferentes curvas, si bien siguen la misma trayectoria y alcanzan prácticamente la misma carga máxima, muestran distintos rangos de valores para la variable independiente local ε_z .

Este efecto se debe a que el tamaño de la imperfección influye en el valor final de D/D_0 y, consecuentemente en el valor final de la deformación logarítmica. A su vez éste influye en el rango alcanzado por la ecuación

constitutiva. En conclusión, la unicidad sólo es aparente, y por ello en un trabajo anterior se denominó *unicidad aparente* (García-Garino et al., 1997).

Del análisis local se obtienen dos importantes conclusiones:

1. La curva $P - \varepsilon_z$ no depende de las imperfecciones, si se deja de lado el rango de la variable considerada independiente ε_z alcanzado en cada caso. Consecuentemente la ecuación constitutiva parece no depender de las imperfecciones.
2. De la figura 5.4 surge que puede considerarse a la carga P como una función de D/D_0 , aspecto que se había considerado en el capítulo 2 de este trabajo.

5.5. Conclusiones

- La ecuación constitutiva no parece ser sensible al tamaño de las imperfecciones, excepto en el rango de valores que alcanza la misma, como surge del análisis del estudio de sensibilidad local.
- Si la respuesta del ensayo se mide en función de parámetros globales los resultados resultan fuertemente dependientes del tamaño de las imperfecciones.
- Debe investigarse la sensibilidad frente a otro tipo de imperfecciones geométricas en el cuello (“blunt notched”, etc.)

Capítulo 6

Sensibilidad frente a la malla

6.1. Introducción

En este apartado se analiza la sensibilidad de los resultados del problema de la estricción, frente a la discretización espacial utilizada. Para ello se comparan los resultados obtenidos con diversas mallas que se generan mediante refinamientos uniformes sucesivos. Otros estudios de sensibilidad de este problema se han realizado en (Ponthot, 1994) y (Simó, 1988b). La contribución de este capítulo es la utilización de elementos mixtos con deformaciones supuestas con objeto de analizar las posibles ventajas que tiene su uso frente al de otros elementos. En concreto, a efectos de comparación se considera el elemento mixto de presión constante, dado que su uso es clásico en el estudio de este problema (Goicolea, 1985; García-Garino, 1993; Ponthot, 1994).

Se han considerado las mallas de 50, 100, 200, 400, 800 y 1600 elementos que se muestran en la figura 6.1, resueltas con los elementos $Q1/P0$, $Q1/E5$, $Q1/ES5$ y $Q1/ET5$.

A efectos de los análisis de sensibilidad de la malla, se ha considerado que son significativos los siguientes resultados:

- Evolución de la estricción.
- Evolución de la carga aplicada.
- Relación entre la tensión media y la deformación logarítmica, en dirección axial.

Para cada uno de estas variables, se realizan dos tipos de comparaciones:

1. Para cada elemento, resultados obtenidos con todas las mallas
2. Para cada malla, resultados obtenidos con todos los elementos

El primer grupo permite extraer conclusiones sobre la influencia del tamaño de la malla en los resultados, y el segundo grupo permite comparar entre sí las prestaciones de las distintas familias de elementos.

Asimismo, se comparan los resultados obtenidos con las curvas experimentales ya empleadas en el apartado 3.4.2.

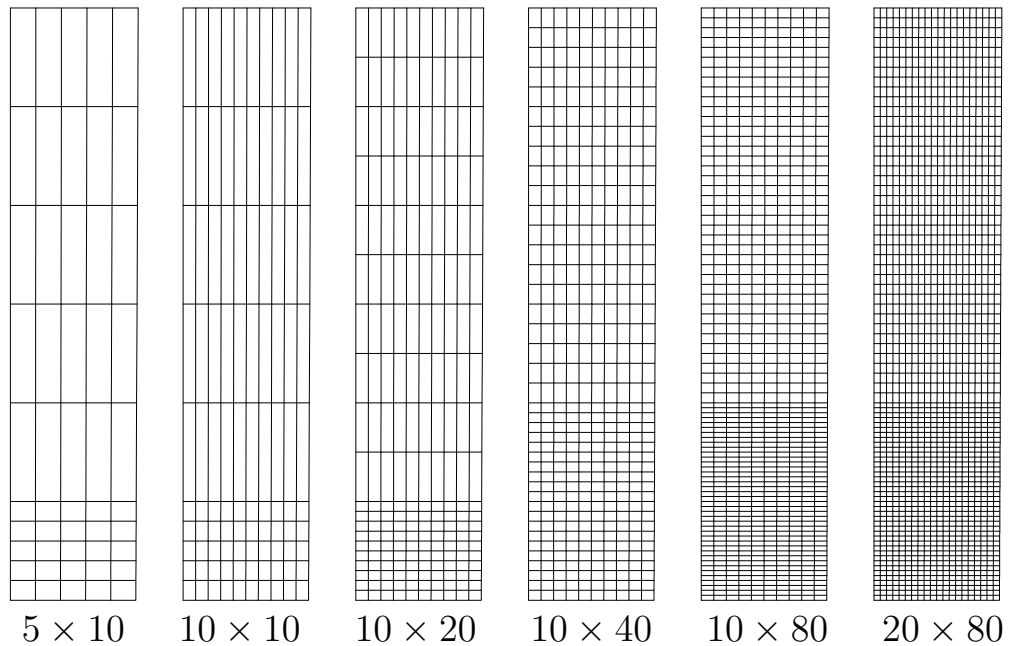
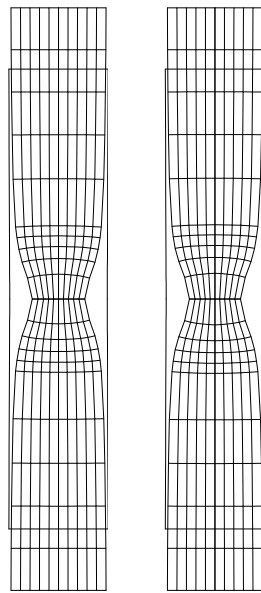


Figura 6.1: Mallas utilizadas en el estudio de sensibilidad

6.2. Estricción



$Q1/P0$

$Q1/ET5$

En todas las mallas, y con todos los elementos, se captura la formación del cuello. En la figura 6.2 se muestran las deformadas obtenidas con la malla de 50 elementos, con el elemento de presión constante y con el elemento $Q1/ET5$. La evolución de la estricción a lo largo del ensayo está relacionada con la rigidez de los elementos. En las dos situaciones extremas en que el elemento se bloquea (por incompresibilidad o por corte) o en que los modos de flexión están asociados a autovalores nulos (por subintegración del elemento), la evolución de la estricción no representa de manera realista el ensayo de tracción.

Las figuras 6.3 y 6.4, permiten comparar los diferentes resultados que se obtienen con cada una de las seis mallas consideradas. Es de destacar que los resultados que se obtienen con los distintos elementos son muy parecidos, aunque en todos los casos el elemento de presión constante alcanza una estricción ligeramente inferior a la obtenida con los elementos mejorados. También cabe destacar que el valor de la estricción es prácticamente el mismo con independencia del orden de la cuadratura con que se integran los elementos mejorados.

Figura 6.2:
Deformadas de las mallas de 50 elementos

de los elementos mejorados.

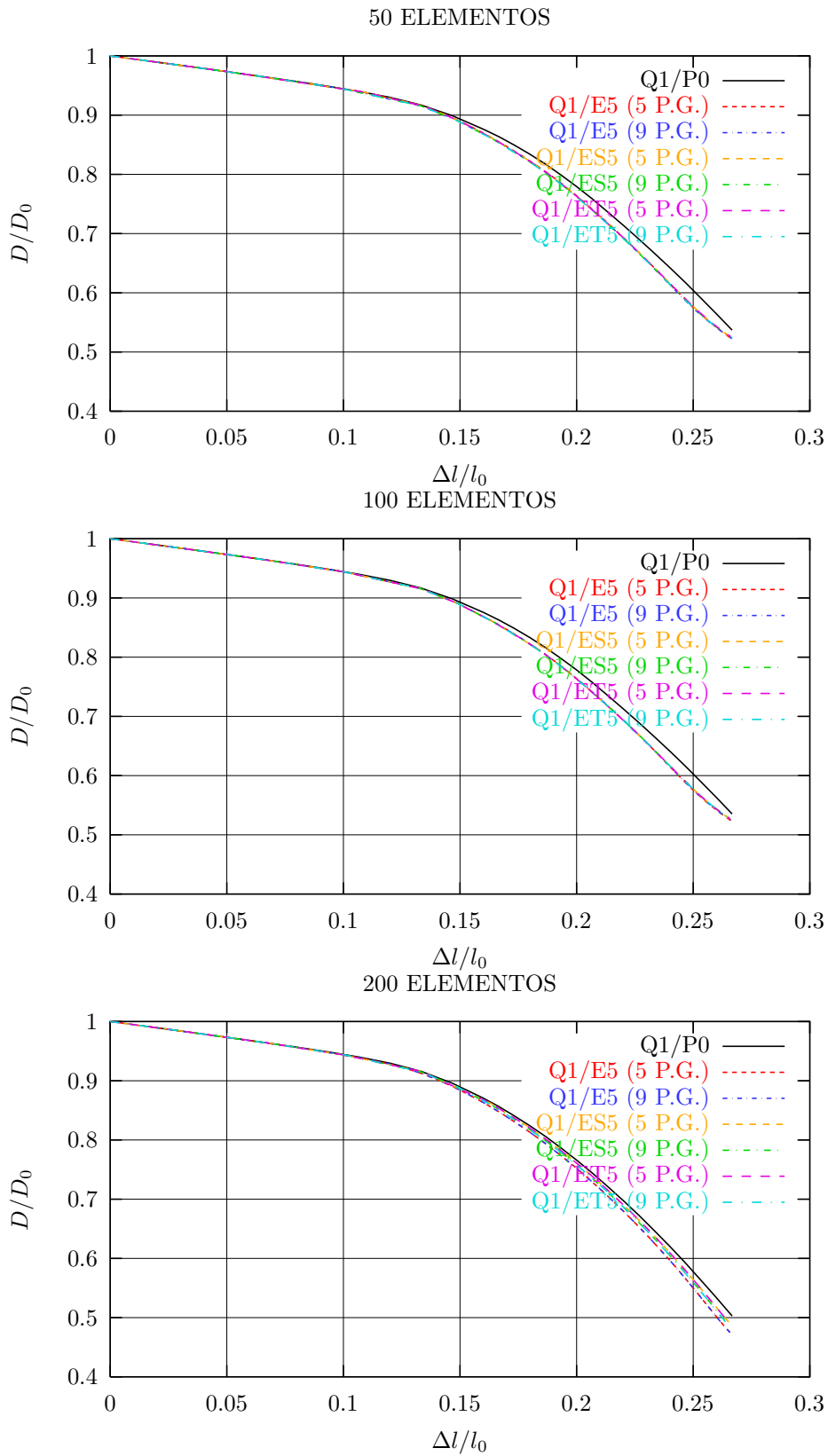


Figura 6.3: Estricción frente alargamiento. Mallas de 50, 100 y 200 elementos

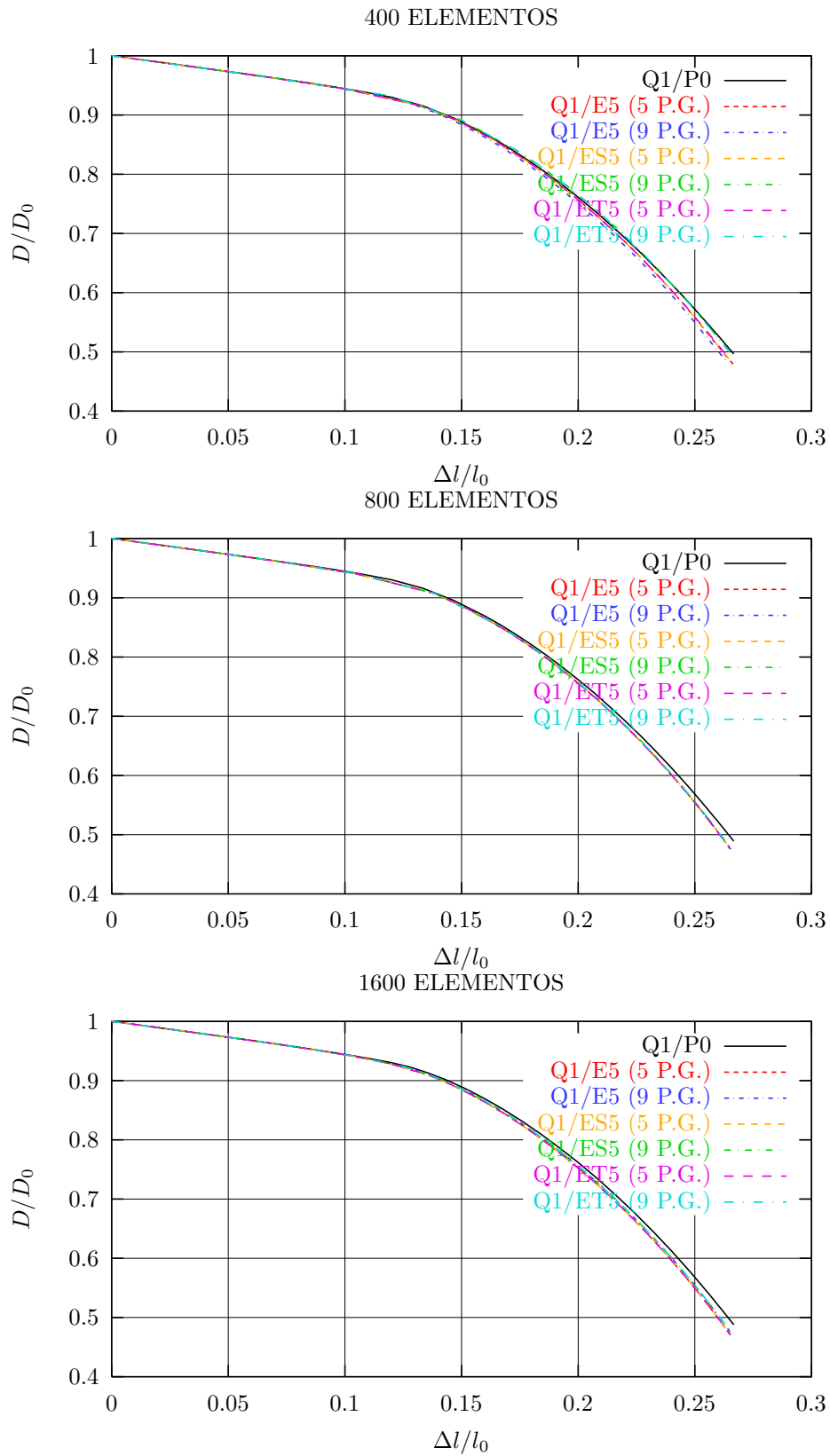


Figura 6.4: Estricción frente alargamiento. Mallas de 400, 800 y 1600 elementos

Las figuras 6.5 y 6.6 comparan para cada elemento, los resultados obtenidos con las diferentes mallas. La conclusión principal es que para todos los elementos, a efectos de la evolución de la estricción, los resultados que se obtienen con la malla de 200 elementos son muy similares a los que se obtienen con mallas más finas.

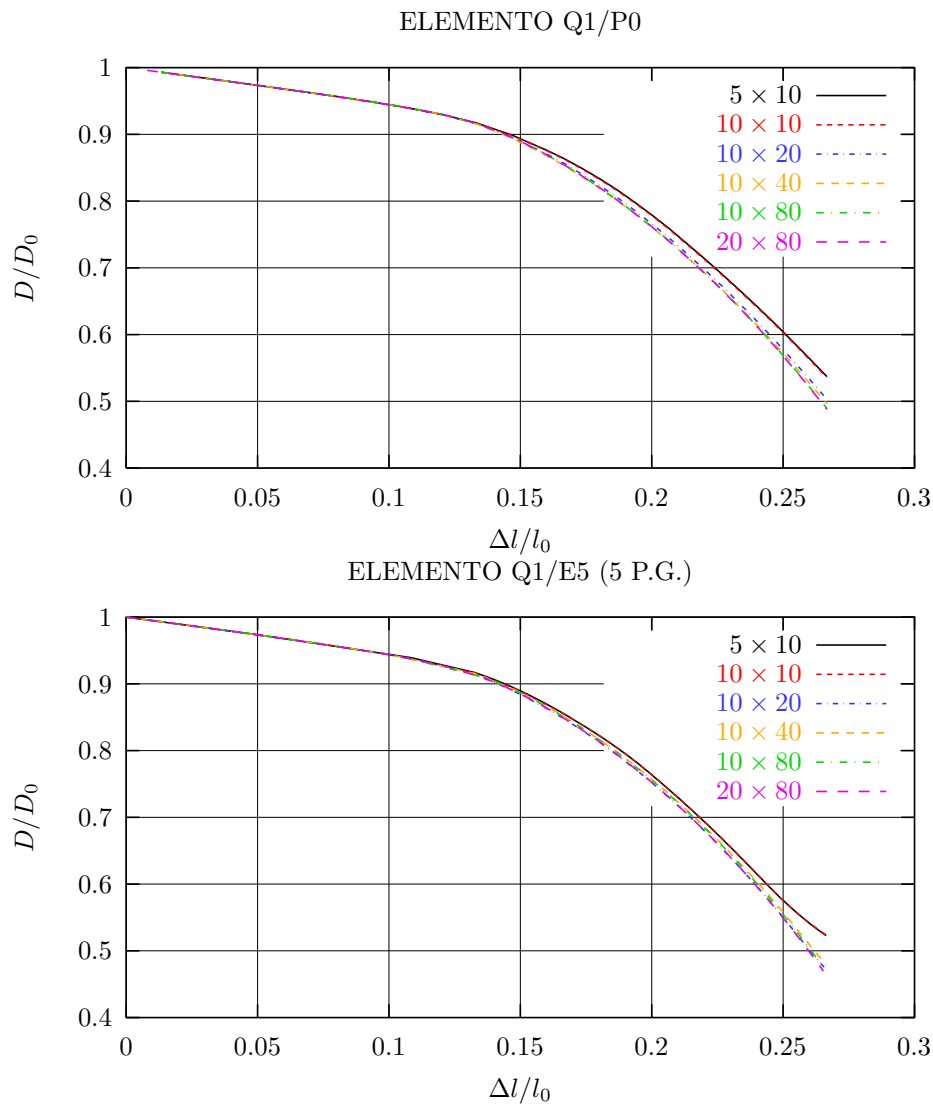


Figura 6.5: Estricción frente alargamiento. Elementos $Q1/P0$ y $Q1/E5$

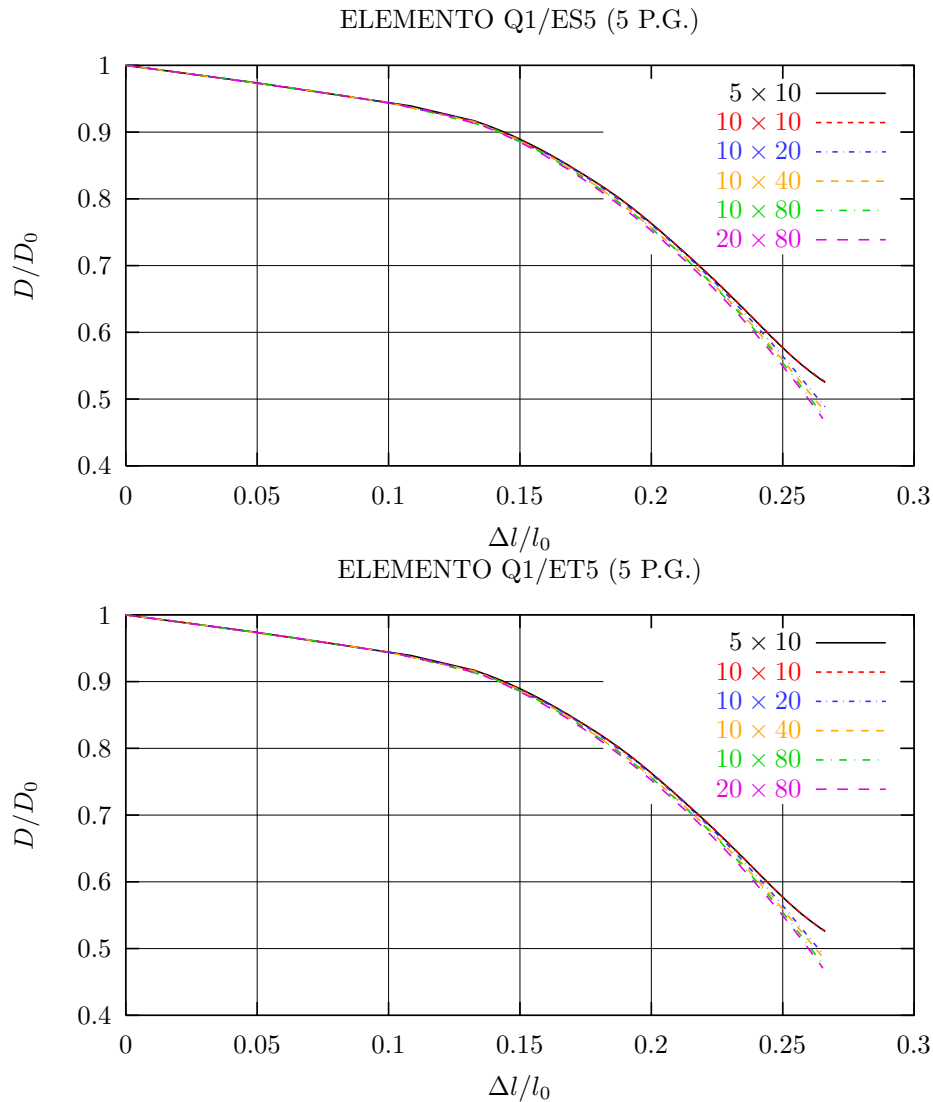


Figura 6.6: *Estricción frente alargamiento. Elementos Q1/ES5 y Q1/ET5*

Para cuantificar las ligeras diferencias que se observan en los gráficos anteriores, en el cuadro 6.1 se muestra el valor de D/D_0 al final del análisis.

6.3. Tensión axial media

En este apartado se analizan los resultados obtenidos con las mallas de la figura 6.1, para ley $\bar{\sigma}_z - \varepsilon_z$. Estos valores se han obtenido a través de la expresiones (2.25) y (2.20) respectivamente.

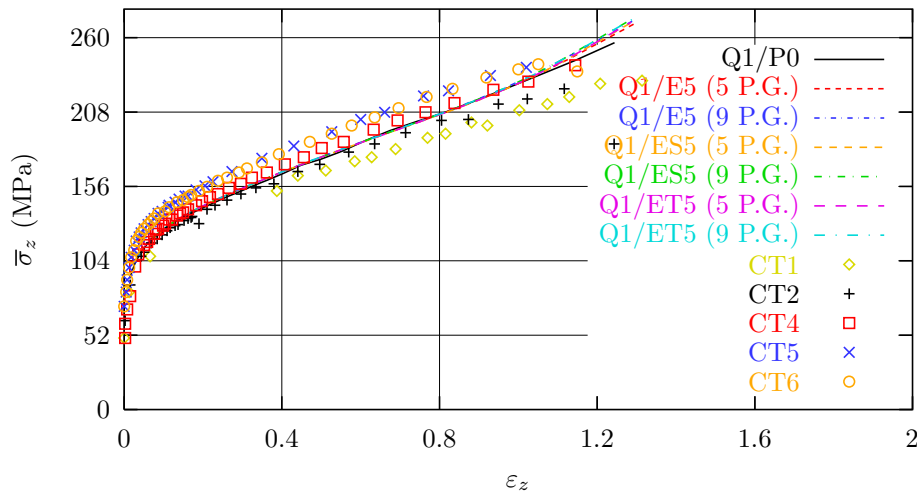
Todos las leyes $\bar{\sigma}_z - \varepsilon_z$ obtenidas, incluso con la malla de 50 elementos (ver figura 6.7), se ajustan a los resultados experimentales descritos en el apartado 3.4.2.

Los resultados obtenidos con las mallas de 100 o más elementos, se muestran en las figuras 6.8 y 6.9. Para cada una de ellas, todos los elementos de

	5×10	10×10	10×20	10×40	10×80	20×80
Q1/P0	0,54	0,54	0,50	0,50	0,49	0,49
Q1/E5 (5 P.G)	0,52	0,52	0,48	0,48	0,48	0,47
Q1/E5 (9 P.G)	0,52	0,52	0,47	0,48	0,48	0,48
Q1/ES5 (5 P.G)	0,52	0,53	0,49	0,48	0,48	0,47
Q1/ES5 (9 P.G)	0,53	0,53	0,50	0,49	0,47	0,48
Q1/ET5 (5 P.G)	0,53	0,53	0,49	0,49	0,48	0,47
Q1/ET5 (9 P.G)	0,52	0,53	0,49	0,50	0,47	0,48

Cuadro 6.1: Valores de D/D_0 al final del análisis

50 ELEMENTOS

Figura 6.7: Resultados $\bar{\sigma}_z - \varepsilon_z$ con la malla de 5×10 elementos. Comparación con los resultados experimentales

deformaciones supuestas, independientemente del orden de la cuadratura empleada, dan la misma ley $\bar{\sigma}_z - \varepsilon_z$. Para las mallas con 200 o más elementos, la ley obtenida con los elementos de deformaciones supuestas es prácticamente la misma que se obtiene con el elemento de presión constante. Sin embargo, si se emplean los elementos EAS, las curvas alcanzan puntos de mayor deformación logarítmica dado que, de acuerdo con el cuadro 6.1, el diámetro final que se obtiene con estos elementos es ligeramente inferior al calculado con el Q1/P0.

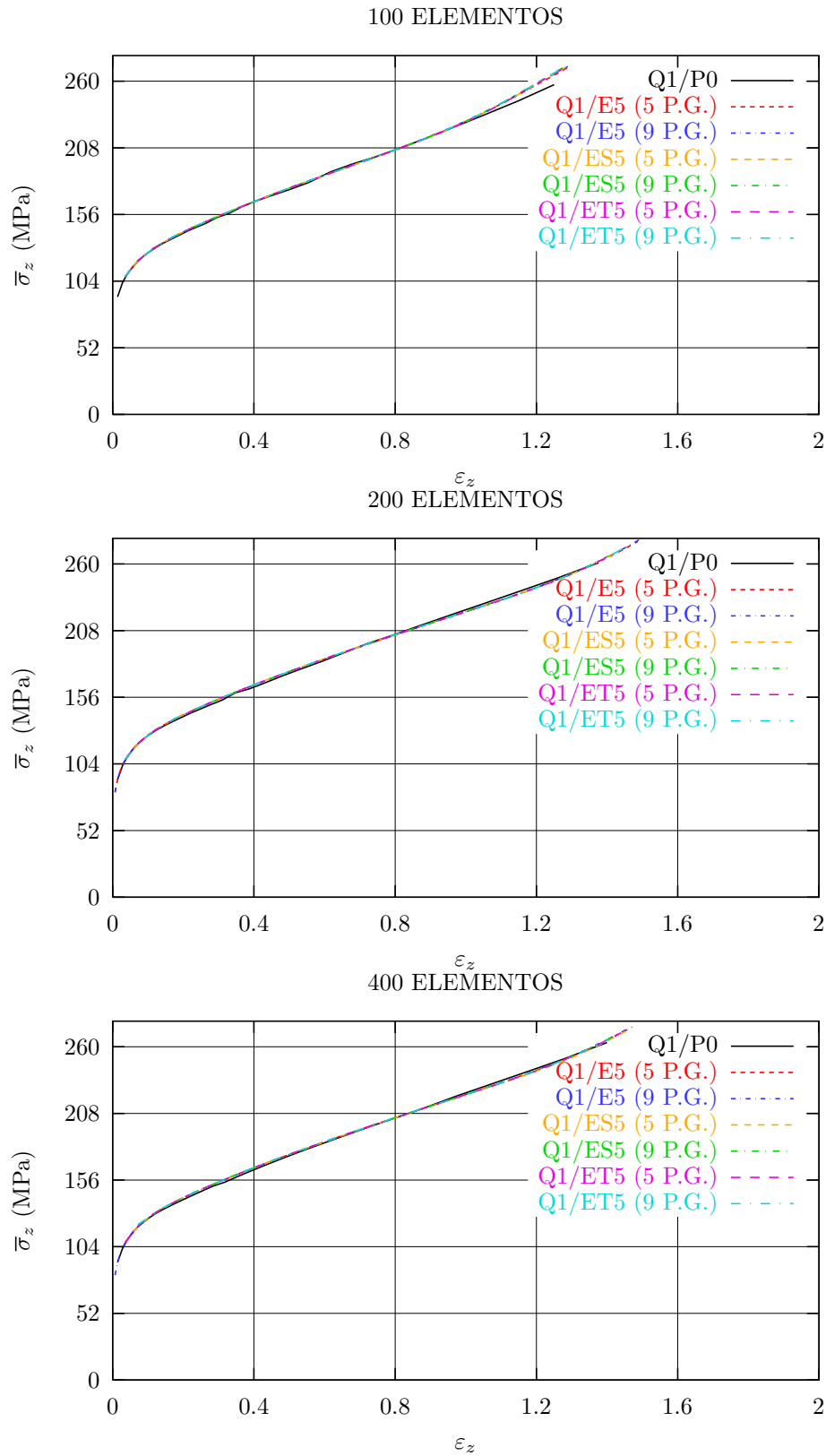


Figura 6.8: Curvas $\bar{\sigma}_z - \varepsilon_z$. Mallas de 100, 200 y 400 elementos

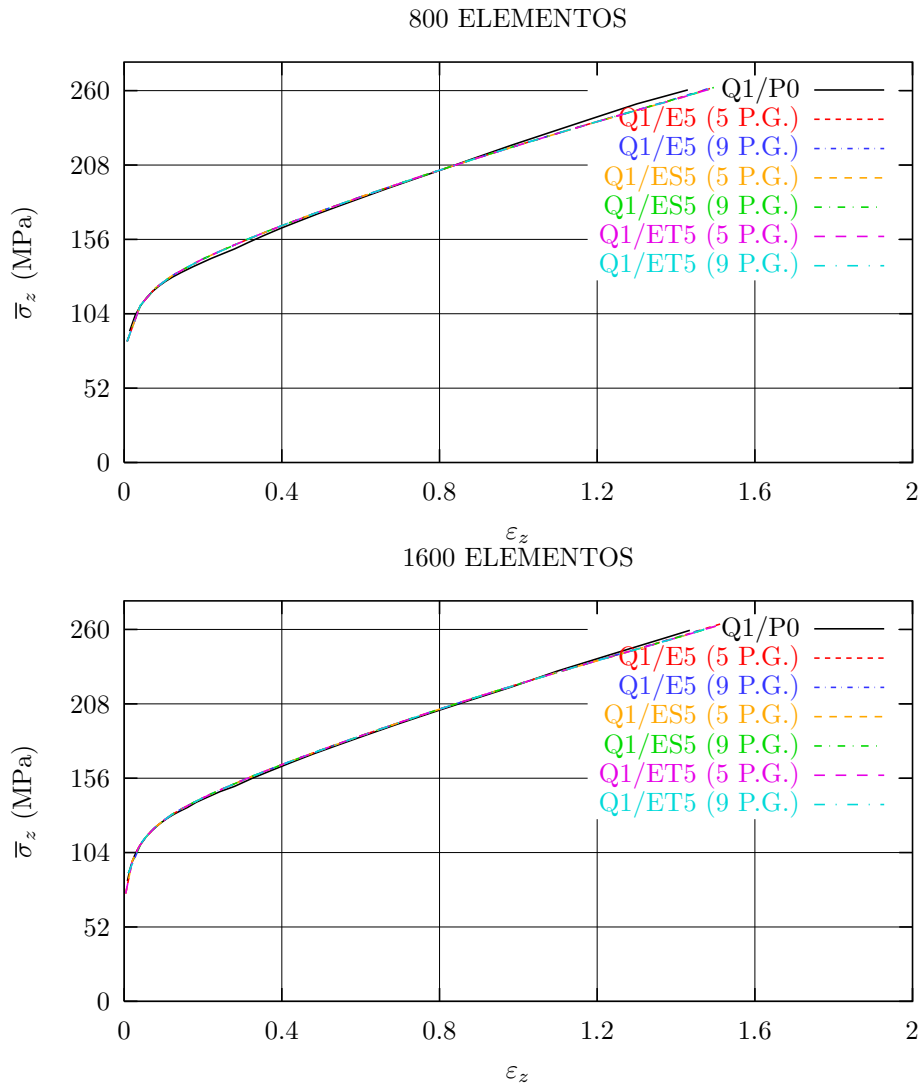
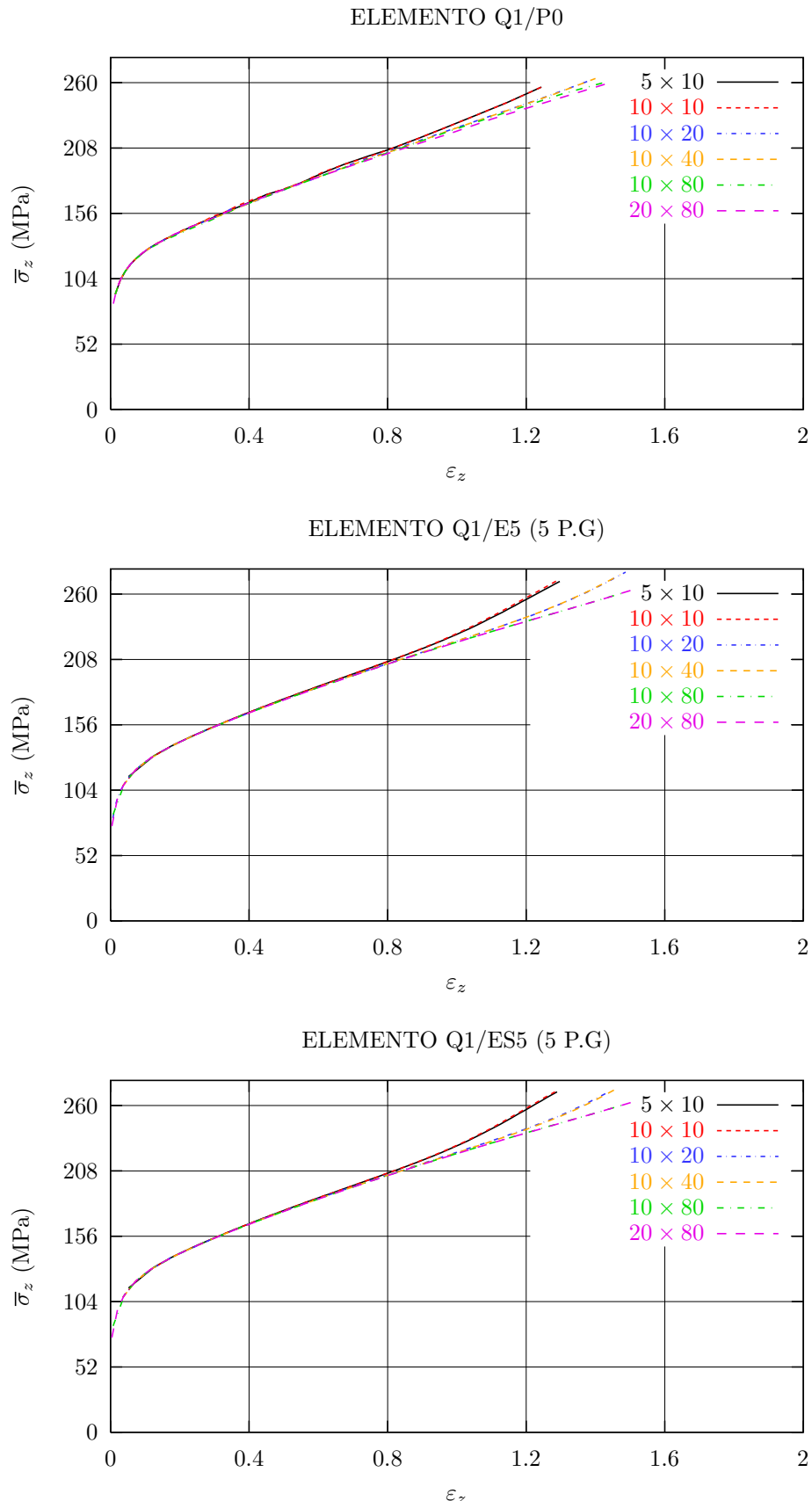


Figura 6.9: Curvas $\bar{\sigma}_z - \varepsilon_z$. Mallas de 800 y 1600 elementos

Las figuras 6.10 y 6.11, muestran los resultados obtenidos con cada elemento según se va refinando la malla. En el elemento de presión constante se obtienen idénticos resultados con las mallas de 50 y 100 elementos, y resultados muy similares entre sí con las restantes mallas. Los resultados obtenidos con las mallas de 50 y 100 elementos son sensiblemente más rígidos que los calculados con mallas más finas. Con los elementos mejorados, los resultados para las mallas de 50 y 100 elementos son idénticos. Lo mismo sucede con las de 200 y 400 elementos, y con las de 800 y 1600 elementos. Además, la flexibilización de los resultados según se va refinando la malla es más notable cuando se usan estos elementos que cuando se usa el elemento Q1/P0.

Finalmente, con objeto de hacer una comparación con resultados experimentales, en el cuadro 6.2 se muestran los valores calculados de $\bar{\sigma}_z$ en MPa, cuando la deformación logarítmica axial en el cuello es $\varepsilon_z = 0,9$. El valor experimental de referencia es $\sigma_z = 213 \pm 15$ MPa.



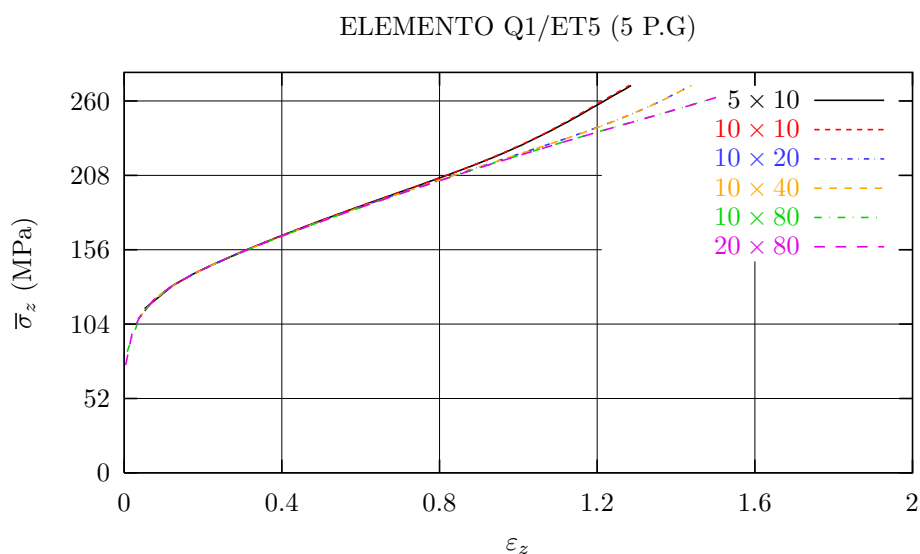


Figura 6.11: Curva $\bar{\sigma}_z - \varepsilon_z$. Elemento ET5

	5 × 10	10 × 10	10 × 20	10 × 40	10 × 80	20 × 80
Q1/P0	216,9	216,9	214,8	214,1	213,9	212,5
Q1/E5 (5 P.G)	216,6	216,9	213,7	213,8	213,2	213,2
Q1/E5 (9 P.G)	217,3	217,2	213,7	213,6	213,2	213,2
Q1/ES5 (5 P.G)	216,5	216,7	213,8	213,5	213,2	213,2
Q1/ES5 (9 P.G)	217,1	217,0	213,9	213,8	213,3	213,2
Q1/ET5 (5 P.G)	216,5	216,7	213,8	213,7	213,2	213,2
Q1/ET5 (9 P.G)	217,1	217,0	213,8	213,7	213,3	213,2

Cuadro 6.2: Valores calculados de la tensión axial media (MPa) para $\varepsilon_z = 0,9$. Valor experimental de referencia: $\sigma_z = 213 \pm 15$ MPa

6.4. Carga axial aplicada

Los resultados correspondientes a la carga axial aplicada frente a la deformación logarítmica axial, empleando la malla de 50 elementos, se ajusta correctamente con los resultados experimentales según se muestra en la figura 6.12.

En las figuras 6.13 y 6.14, se muestran los resultados obtenidos con las mallas de 100, 200, 400, 800 y 1600 elementos. Con la malla de 100 elementos el comportamiento de los elementos EAS es ligeramente más rígido que el del elemento Q1/P0, al final de la rama de descarga. Con las mallas más finas, la respuesta de todos los elementos es esencialmente la misma.

La figuras 6.15 y 6.16 muestran la influencia del tamaño de la malla en el comportamiento de cada familia de elementos. El refinamiento da lugar a un comportamiento más flexible en la rama de descarga que se hace más notable en los elementos mejorados, y tiene menor influencia en el elemento

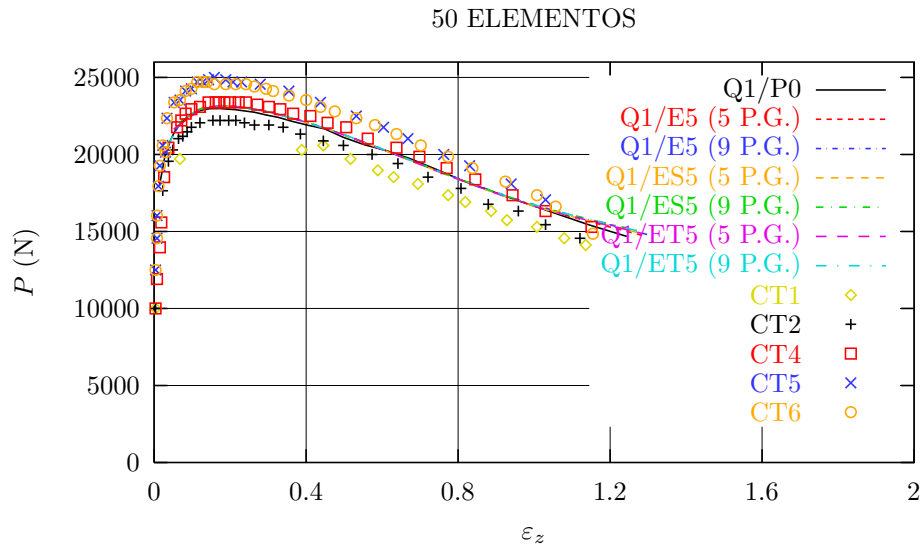


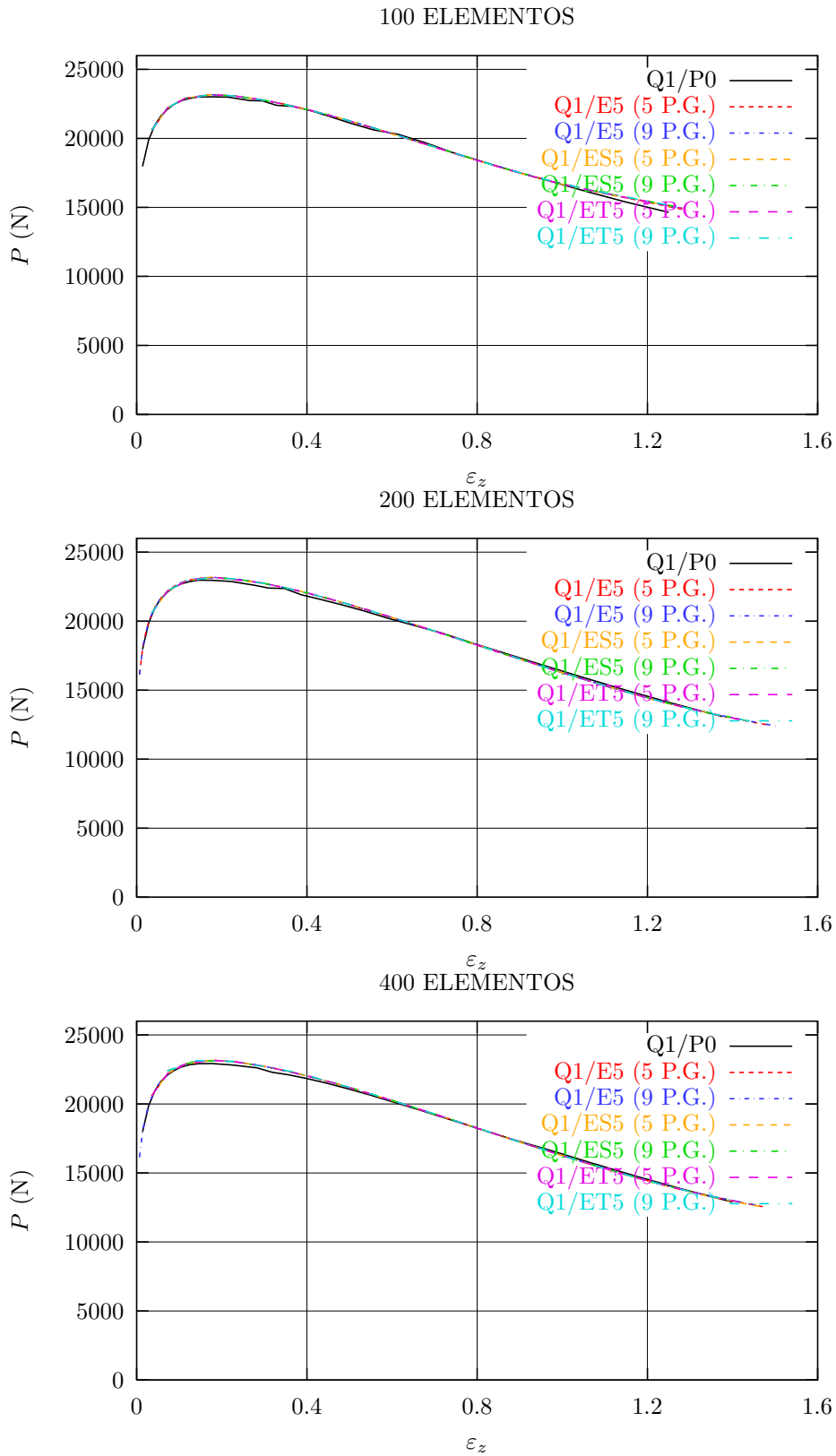
Figura 6.12: Resultados $P-\varepsilon_z$ con la malla de 5×10 elementos. Comparación con los resultados experimentales

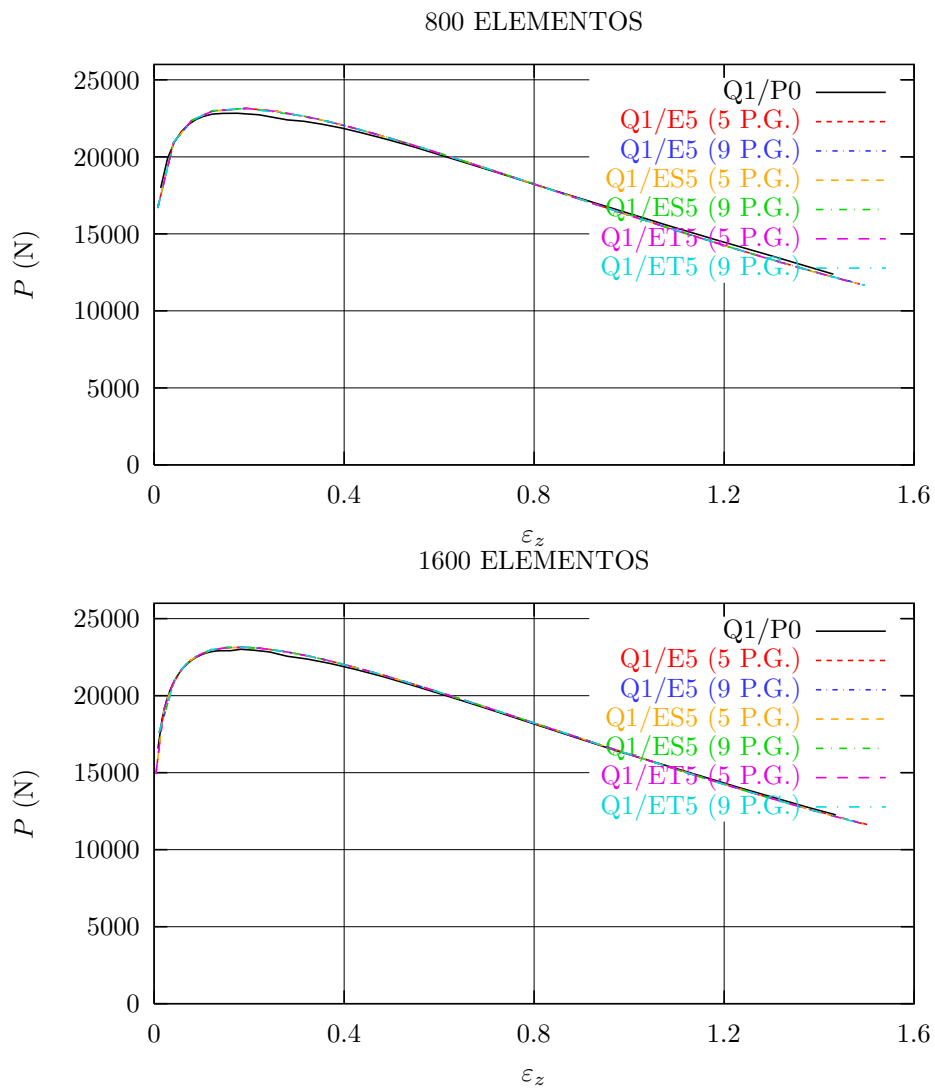
Q1/P0.

En el cuadro 6.3 se compara el valor calculado de la carga aplicada cuando la deformación logarítmica axial es $\varepsilon_z = 0,9$, con el obtenido experimentalmente. El valor experimental de referencia es $P = 17,2 \pm 1,2$ kN.

	5×10	10×10	10×20	10×40	10×80	20×80
Q1/P0	17,51	17,51	17,34	17,28	17,27	17,16
Q1/E5 (5 P.G)	17,49	17,51	17,25	17,26	17,22	17,21
Q1/E5 (9 P.G)	17,55	17,53	17,25	17,25	17,22	17,21
Q1/ES5 (5 P.G)	17,47	17,49	17,26	17,24	17,21	17,21
Q1/ES5 (9 P.G)	17,53	17,51	17,27	17,25	17,22	17,20
Q1/ET5 (5 P.G)	17,49	17,50	17,27	17,25	17,21	17,21
Q1/ET5 (9 P.G)	17,53	17,52	17,27	17,25	17,22	17,21

Cuadro 6.3: Valores calculados de la fuerza axial (kN) aplicada para $\varepsilon_z = 0,9$. Valor experimental de referencia: $P = 17,2 \pm 1,2$

Figura 6.13: Curvas $P - \varepsilon_z$. Mallas de 100, 200 y 400 elementos

Figura 6.14: Curvas $P - \varepsilon_z$. Mallas de 800 y 1600 elementos

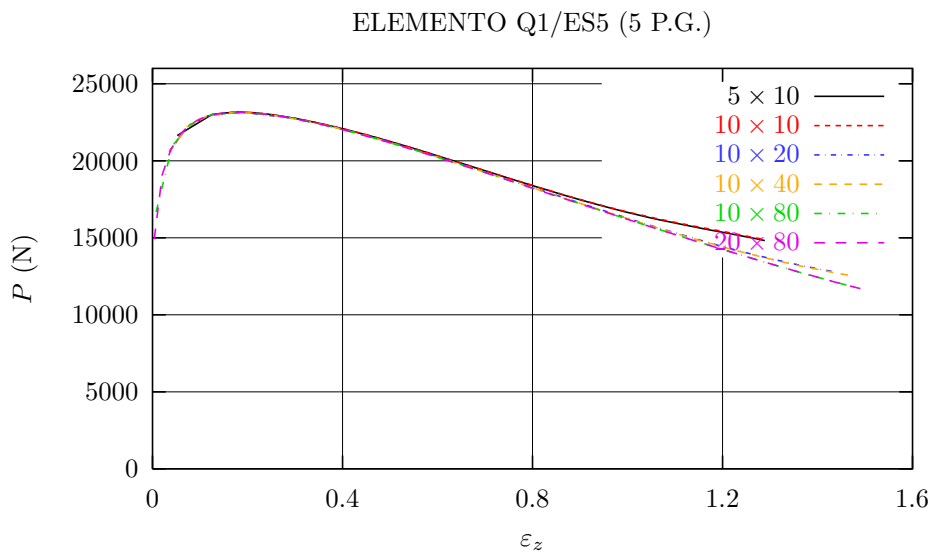
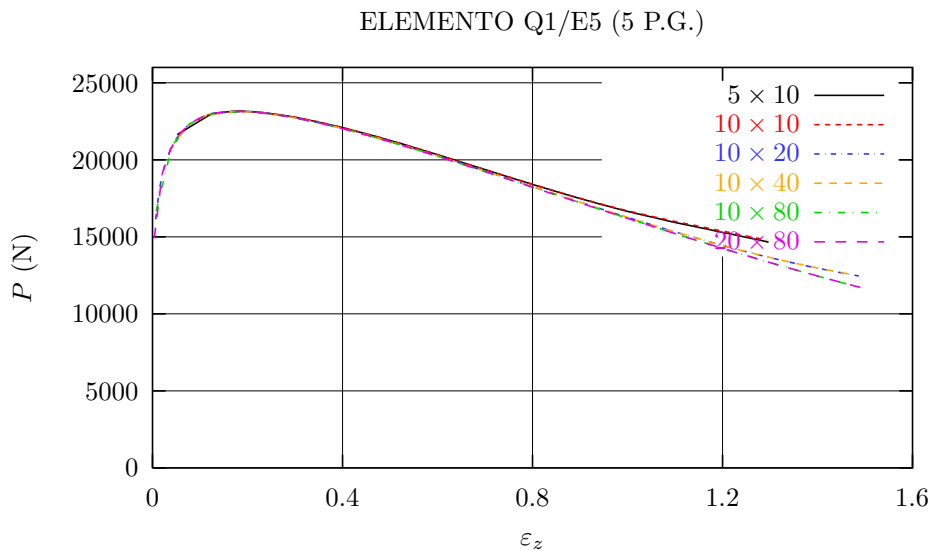
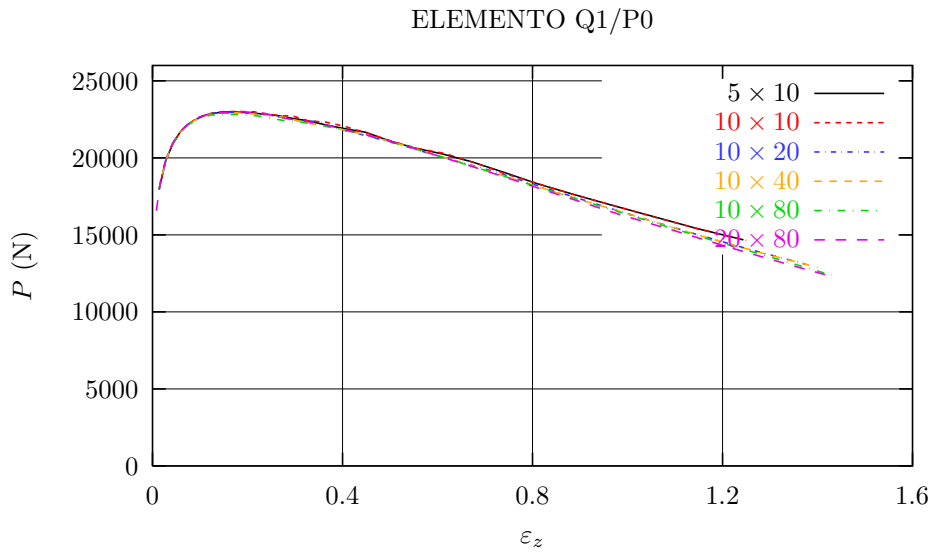


Figura 6.15: *Curvas $P - \varepsilon_z$. Elementos P0, E5 y ES5*

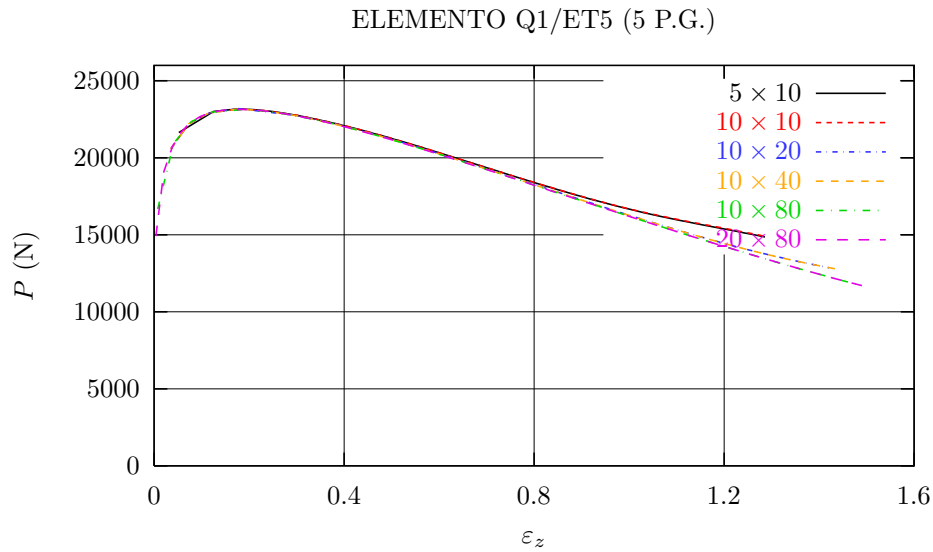


Figura 6.16: Curva $P - \varepsilon_z$. Elemento $ET5$

6.5. Conclusiones

A la vista de los resultados obtenidos en este capítulo se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. No tiene ventajas apreciables el emplear elementos con formulación EAS, en lugar de otros elementos con formulaciones también adecuadas para abordar el problema (elementos mixtos de presión constante, \overline{B} , etc).
2. Incluso con mallas de pocos elementos, los resultados numéricos son acordes con los resultados experimentales. De hecho, a partir de un cierto número de elementos los resultados varían poco según se va refinando la malla.

Capítulo 7

Conclusiones generales y líneas de investigación propuestas

7.1. Conclusiones

- Los resultados analíticos presentados en el capítulo 2 permiten validar y calibrar adecuadamente los programas de elementos finitos y los correspondientes modelos constitutivos.
- La tecnología de elementos finitos y los modelos constitutivos para grandes deformaciones elastoplásticas disponibles en la actualidad, permiten simular adecuadamente el ensayo de tracción simple.
- Las simulaciones computacionales realizadas reproducen correctamente los resultados experimentales correspondientes a la tensión axial media y carga aplicada, para todas las formulaciones de elementos finitos empleadas.
- Incluso con mallas de pocos elementos, los resultados numéricos obtenidos para tensión axial media y carga aplicada frente a deformación logarítmica son acordes con los resultados experimentales. De hecho, a partir de un cierto número de elementos los resultados varían poco según se va refinando la malla.
- La simulación computacional proporciona resultados de la distribución de tensiones en el cuello que son acordes con los reportados por Bridgman. No obstante, se han encontrado algunas discrepancias en los valores de la presión para algunas formulaciones de elementos. Los elementos mejorados con integración de 9 puntos de Gauss reproducen bien la distribución de tensiones.
- Los resultados numéricos del ensayo de tracción simple reportados en términos de variables globales (deformación ingenieril, etc.), dependen fuertemente de las imperfecciones geométricas del modelo.

- Los resultados numéricos del ensayo de tracción simple reportados en términos de variables locales (deformación logarítmica en el cuello, etc.), son poco sensibles a las imperfecciones geométricas del modelo.
- Debe investigarse la sensibilidad frente a otro tipo de imperfecciones geométricas en el cuello (“blunt notched”, etc.)
- A la luz de los resultados obtenidos puede considerarse que la simulación computacional del ensayo de tracción simple es una herramienta válida para calibrar ecuaciones constitutivas en el rango de grandes deformaciones.
- De los estudios numéricos realizados se concluye que la expresión analítica de Bridgman que relaciona la tensión axial media con la tensión de fluencia es válida en una primera aproximación. Parece importante profundizar el estudio de dicha relación.

7.2. Líneas de investigación propuestas

- Comparar los resultados numéricos obtenidos en este trabajo para la estricción D/D_0 , con los resultados que se obtengan de los ensayos experimentales previstos en el marco de este proyecto.
- Complementar los resultados numéricos obtenidos para aluminio HE30 con los correspondientes a otros materiales como el acero.
- Completar el estudio presentado en el capítulo 6 acerca de la dependencia de los resultados numéricos frente a cambios en la discretización espacial. En particular es importante estudiar la sensibilidad de la distribución de tensiones en el cuello, y la evolución de las variables de interés frente a la deformación ingenieril.
- Se considera que es importante seguir investigando sobre el factor de ajuste de Bridgman entre la tensión axial media y la tensión de fluencia.

Agradecimientos

Los autores de este trabajo agradecen a las siguientes instituciones la ayuda recibida, sin la cual ni hubiera sido posible desarrollar las investigaciones presentadas:

- Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT) de Argentina, FONCYT, Proyecto PICT 12-03268.
- Universidad Politécnica de Madrid. Dirección de Relaciones con Latinoamérica. Proyecto AL-98-0440-215: Investigación y desarrollo de elementos finitos para plasticidad con grandes deformaciones.
- Universidad Nacional de Cuyo (Mendoza, Argentina), Instituto de Ciencias Básicas, Áreas de Matemática y Física.

Bibliografía

- ABAQUS. *THEORY MANUAL. Version 5.5*. Hibbit, Karlson and Sorensen, Inc, 1994.
- ARMERO, F. y GLASER, S. On the formulation of enhanced strain finite elements in finite deformations. *Engineering Computations*, tomo 14:págs. 759–791, 1997.
- BRIDGMAN, P. The stress distribution at the neck of a tensile specimen. *Transactions of the American Society of Metals*, tomo 32:págs. 553–574, 1944.
- CHEN, W. Necking of a bar. *International Journal of Solids and Structures*, tomo 7:pág. 685, 1971.
- DAVIDENKOV, N. y SPIRIDONOVA, N. Analysis of the state of stress in the neck of a tension test specimen. En *Proceedings of American Society of Testing Materials*, tomo 46, págs. 1147–1158. 1946.
- GABALDÓN, F. *Métodos de elementos finitos mixtos con deformaciones su-puestas en elastoplasticidad*. Tesis Doctoral, E.T.S. Ingenieros de Cami-nos. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, 1999.
- GARCÍA-GARINO, C. *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elas-toplásticos sometidos a grandes deformaciones*. Tesis Doctoral, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Catalunya, Barcelo-na, 1993.
- GARCÍA-GARINO, C., GOICOLEA, J. M. y F.GABALDÓN. Simulación numérica del ensayo de tracción simple. En G. Etse y B. Luccioni, eds., *Mecánica Computacional*, tomo 17, págs. 425–436. 1996.
- GARCÍA-GARINO, C., MIRASSO, A., RAICHMAN, S. y GOICOLEA, J. M. Imperfection sensitivity analysis of necking instability in circular cylin-drical bars. En D. Owen, E. Oñate y E. H. (Eds.), eds., *Computational Plasticity*, págs. 760–764. Cimne, Barcelona, 1997.
- GARCÍA-GARINO, C., MIRASSO, A., RAICHMAN, S. y GOICOLEA, J. M. Análisis de sensibilidad local y unicidad aparente en el problema de es-tricción de barras metálicas. En C. Garcia-Garino, A. Mirasso, J. Barón y J.Ñ. McLeod, eds., *Mecánica Computacional*, págs. 281–288. 1999a.

- GARCÍA-GARINO, C., MIRASSO, A., RAICHMAN, S. y GOICOLEA, J. M. Local and global sensitivity analysis of necking instability in circular cylindrical bars. En E. Croitoro, ed., *First Canadian Conference on Non Linear Solids Mechanics*, págs. 760–764. University of Victoria and Pacific Institute of Mathematics, Victoria, Canada, 1999b.
- GARCÍA-GARINO, C., MIRASSO, A., VERA, V., GABALDÓN, F., GOICOLEA, J. y RAICHMAN, S. Empleo de métodos numéricos y experimentales para determinar ecuaciones constitutivas de metales en régimen de grandes deformaciones, 2002-2004. Proyecto PICT-12-03268. FONCYT. ANPCyT. En curso.
- GIROUD, E. *HEMP - Users Manual*. Lawrence Livermore National Laboratory, University of California, 1973. Technical Report UCRL-51079, Rev.1.
- GOICOLEA, J. *Numerical modelling in large strain plasticity with application to tube collapse analysis*. Tesis Doctoral, University of London, 1985.
- GOICOLEA, J. *THEORY MANUAL. Version 5.5*. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, 1992.
- GOICOLEA, J., GABALDÓN, F. y GARCÍA-GARINO, C. Interpretación de la estricción en el ensayo de tracción empleando modelos hipoeásticos e hiperelásticos. En M. Doblaré, J. Correas, E. Alarcón, L. Gavete y M. Pastor, eds., *Memorias del III Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*. SEMNI, Zaragoza, 1996.
- HALLQUIST, J. *User's Manual for DYNA2D - An explicit two-dimensional hydrodynamic finite element code with interactive rezoning*. Lawrence Livermore National Laboratory, University of California, 1982. Technical Report UCID-18756, Rev.1.
- HILL, R. *The mathematical theory of plasticity*. Clarendon Press, Oxford, 1950.
- NAGTEGAAL, J., PARKS, D. y RICE, J. On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 4:págs. 153–177, 1974.
- NEEDLEMAN, A. A numerical study of necking in circular cylindrical bars. *Journal of Mechanics, Physics and Solids*, tomo 20:págs. 111–127, 1972.
- NORRIS, D., MORAN, B., SCUDDER, J. y QUIÑONES, D. A computer simulation of the tension test. *Journal of Mechanics, Physics and Solids*, tomo 26:págs. 1–19, 1978.

- ORTIZ, M. y POPOV, E. Distorsional hardening rules for metal plasticity. *Journal of Engineering Mechanics*, tomo 109, nº 4:págs. 1042–1057, 1983.
- PONTHOT, J. *Traitment unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par le méthode des éléments finis*. Tesis Doctoral, Universidad de Lieja, Bélgica, 1994.
- SIMÓ, J. A framework for finite strains elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. part i: Continuum formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 66:págs. 199–219, 1988a.
- SIMÓ, J. A framework for finite strains elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. part ii: Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 68:págs. 1–31, 1988b.
- SIMÓ, J. y ARMERO, F. Geometrically nonlinear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 110:págs. 359–386, 1993.
- SIMÓ, J., ARMERO, F. y TAYLOR, R. Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3d finite deformation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 110:págs. 359–386, 1993.
- TIMOSHENKO, S. y GOODIER, J. *Teoría de la elasticidad*. Urmo, 1975.
- VALIENTE, A. On bridgman's stress solution for a tensile neck applied to axisymmetrical blunt notched tension bars. *Journal of Applied Mechanics*, tomo 68:págs. 412–419, 2001.
- WILKINS, M. Third progress report of light armor program. Inf. téc., Lawrence Livermore National Laboratory. University of California, 1968. Rept. UCRL-50460.

