

Cinemática de medios continuos

19 de Diciembre, 2005

Ignacio Romero. iromero@mecanica.upm.es

Índice

1. Los cuerpos continuos y sus configuraciones	2
2. El campo de deformación de un medio continuo	4
3. El gradiente de deformación	6
3.1. Descomposición polar del gradiente de deformaciones.....	7
4. Medidas locales de deformación	8
5. Transformación de longitud, superficie y volumen	9
5.1. Transformación de longitud y ángulo.....	10
5.2. Transformación de área.....	11
5.3. Transformación de volumen.....	12
6. Deformaciones de sólido rígido	12
7. Deformaciones homogéneas	13
8. Deformaciones infinitesimales	14
8.1. Deformaciones infinitesimales rígidas.....	16
8.2. Cambio de volumen.....	16
8.3. Deformación desviadora y volumétrica.....	17
8.4. Transformación de longitud y ángulo en una deformación infinitesimal.....	17
9. Ecuaciones de compatibilidad	19
10. Movimientos en tiempo. Trayectoria	20
11. Descripción material y espacial	20
12. Velocidad y aceleración	21

Este capítulo trata de la descripción cinemática de las deformaciones y movimientos de los cuerpos continuos. El punto de vista que se adopta en la Mecánica de Medios Continuos es el de estudiar estos movimientos en su mayor generalidad posible, sin las restricciones características de teorías como la elasticidad clásica. El punto de partida para esta descripción es la definición precisa de lo que se entiende por “cuerpo continuo” desde el punto de vista matemático. Este formalismo ha permitido describir de forma unificada una gran cantidad de cuerpos físicos de gran utilidad en ingeniería y se discute en la introducción.

Los conceptos de la cinemática pertenecen fundamentalmente a la geometría, y más concretamente a la geometría diferencial. La metodología y el formalismo presentados en este capítulo permitirán describir de forma cuantitativa no sólo los movimientos de los sólidos deformables sino también sus deformaciones locales. Esta generalidad permitirá, cuando se estudie las leyes de balance y los modelos constitutivos, plantear completamente las ecuaciones que rigen el movimiento de una gran variedad de cuerpos deformables.

1. Los cuerpos continuos y sus configuraciones

La Mecánica de Medios Continuos tiene como objeto último el estudio matemático de problemas mecánicos que involucran cuerpos físicos. Para poder describir matemáticamente dichos cuerpos es necesario definir de forma precisa qué se entiende por “cuerpo” y delimitar cuáles son los cuerpos que pueden ser estudiados en esta disciplina.

Los cuerpos físicos están formados por moléculas y éstas por átomos. Si se observa un cuerpo cualquiera, sólido o líquido, a través de un microscopio potente se aprecia que los átomos se encuentran separados unos de otros. De manera informal se podría decir que, vistos de cerca, los cuerpos físicos se asemejan conjuntos de bolas que se disponen de manera más o menos regular, pero espaciada. En otras palabras, a nivel atómico, la materia es *discontinua*. Sin embargo, si se observa un cuerpo a simple vista, o con un microscopio menos potente, parece sin embargo que la materia que lo conforma es *continua*.

Aunque sabemos que la materia no es continua, podemos suponer, para su estudio, que lo es. Esto es claramente una aproximación, pero si los problemas que interesa analizar involucran cuerpos cuyas dimensiones son mucho mayores que los átomos, la aproximación es muy buena. Esta aproximación es la *hipótesis de partida* de la Mecánica de Medios Continuos. Resulta enormemente útil pues permite resolver (aproximadamente) un gran número de problemas prácticos apoyándose en herramientas de cálculo integral y diferencial. Hay que resaltar otra vez que se trata de una aproximación muy buena para problemas cotidianos pero deja de ser válida a escala atómica.

Matemáticamente un *cuerpo continuo* se define como un conjunto \mathcal{B} de partículas, denominadas P_1, P_2, \dots , con una propiedad especial: existe un conjunto de aplicaciones biyectivas y diferenciables $\mathcal{K} = \{\chi\}$ que transforman \mathcal{B} en conjuntos abiertos de \mathbb{R}^3 . Es decir, para toda partícula $P \in \mathcal{B}$

$$\mathbf{x} = \chi(P) \in \mathbb{R}^3, \quad \chi(\mathcal{B}) = \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^3, \text{abierto}, \quad \text{y} \quad \chi^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{B}, \quad (1)$$

y además, para cualesquiera dos aplicaciones $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{K}$ la composición

$$\varphi_{12} : \chi_1(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \chi_2(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^3, \quad \varphi_{12} = \chi_2 \circ \chi_1^{-1} \quad (2)$$

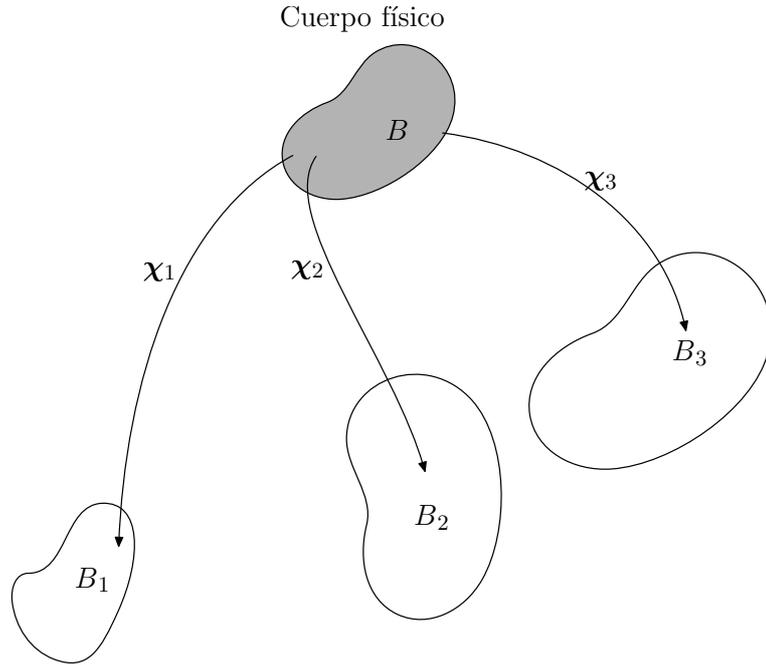


Figura 1: Un cuerpo continuo y algunas de sus posibles configuraciones.

es diferenciable. Cada una de estas infinitas aplicaciones χ se llama una *configuración*.

La definición anterior quiere indicar que cada partícula del cuerpo se puede asociar a un punto de \mathcal{O} , un subconjunto de \mathbb{R}^3 , y viceversa. Como \mathbb{R}^3 no tiene “agujeros” (es continuo), la definición anterior implica la continuidad de la materia que constituye \mathcal{B} , como indica la hipótesis fundamental de la Mecánica de Medios Continuos.

En la definición anterior se indica claramente que existe un número infinito de configuraciones posibles para el cuerpo \mathcal{B} . De entre todas ellas, elegimos una que llamamos χ_{ref} y denominamos *configuración de referencia*. Esta configuración se llama así porque va a permitir referenciar cómodamente cada partícula $P \in \mathcal{B}$ como se indica a continuación: es incómodo denominar P_1, P_2, P_3, \dots a cada partícula del cuerpo \mathcal{B} . Sin embargo, la configuración de referencia define una relación biunívoca entre las partículas del cuerpo y los puntos de un cierto conjunto abierto $B_{ref} := \chi_{ref}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^3$. Por ello, dado un sistema de coordenadas cualquiera para \mathbb{R}^3 , a cada partícula P del cuerpo le corresponde un único trío de coordenadas (X_1, X_2, X_3) , y viceversa. Aunque son cosas distintas, se pueden identificar partículas del cuerpo con puntos de $B_{ref} \in \mathbb{R}^3$. Cada trío (X_1, X_2, X_3) es, en cierto modo, el “nombre” de una partícula P del cuerpo y se denomina coordenadas *materiales* del punto P . Aunque la configuración de referencia puede ser cualquiera, resulta conveniente emplear como tal la correspondiente al cuerpo sin deformar, la llamada *configuración sin deformar*. Hay que subrayar que, en general, son conceptos distintos.

El problema básico de la Mecánica de Medios Continuos consiste en estudiar las causas y los efectos que hacen que un cuerpo cuya configuración de referencia es χ_{ref} se transforme

hasta situarse en una configuración deformada χ_{def} . Por ejemplo, una cuerda sujeta entre dos puntos tiene una configuración de referencia tal que $B_{ref} = \chi_{ref}(\mathcal{B})$ que coincide con una recta entre los dos puntos que la sujetan y una configuración deformada tal que $B_{def} = \chi_{def}(\mathcal{B})$ es una cicloide que pasa por dicho puntos.

Para concluir esta sección indicamos que es corriente utilizar la expresión “configuración” para referirse al conjunto imagen de una de ellas, es decir, $\chi(\mathcal{B})$. Siendo conscientes de ello, su uso está tan extendido que no se considera incorrecto.

2. El campo de deformación de un medio continuo

Las configuraciones de referencia y deformada definen una aplicación entre B_{ref} y B_{def} que se denomina *deformación*:

$$\varphi : B_{ref} \rightarrow B_{def} , \quad \varphi := \chi_{def} \circ \chi_{ref}^{-1} . \quad (3)$$

La deformación es una función que opera entre conjuntos de \mathbb{R}^3 y es muy útil, pues hace innecesario referirse constantemente al cuerpo físico \mathcal{B} . De hecho, aunque hayamos definido previamente el concepto de cuerpo y de configuraciones, la deformación es el concepto más importante para el tratamiento matemático de la cinemática de medios continuos. A partir de ahora no volveremos a emplear configuraciones ni conjuntos abstractos de puntos sino subconjuntos de \mathbb{R}^3 y aplicaciones entre ellos, es decir, deformaciones. Es sobre estas últimas sobre las que podemos aplicar el cálculo diferencial e integral usual, pues es simplemente el cálculo en \mathbb{R}^3 .

Se supondrá a partir de ahora que se tiene un sistema de coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^3 de forma que cada punto $x \in \mathbb{R}^3$ con coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) se puede identificar con su vector de posición \mathbf{x}

$$x \mapsto \mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 . \quad (4)$$

Es importante recalcar que esta identificación sólo es posible con las coordenadas cartesianas. Por ello la deformación φ definida en (3) se puede considerar como una función vectorial de variable vectorial. Si indicamos con letras mayúsculas a las posiciones iniciales de los puntos materiales y con letras minúsculas a sus posiciones en la configuración deformada, podremos escribir

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}) , \quad \mathbf{X} \in B_{ref} \quad (5)$$

o empleando notación indicial y coordenadas cartesianas

$$x_i = \varphi_i(X_1, X_2, X_3) , \quad i = 1, 2, 3 . \quad (6)$$

La deformación es el objeto cinemático fundamental pues proporciona la posición de cada partícula de cuerpo (identificada con su posición en B_{ref}). En la mayoría de los problemas mecánicos esta función no se conoce y la resolución de dicho problema consiste en hallar dicha función a partir de las fuerzas exteriores aplicadas. En este capítulo, sin embargo, supondremos que φ es conocida y deduciremos a partir de ella otras cantidades cinemáticas de interés.

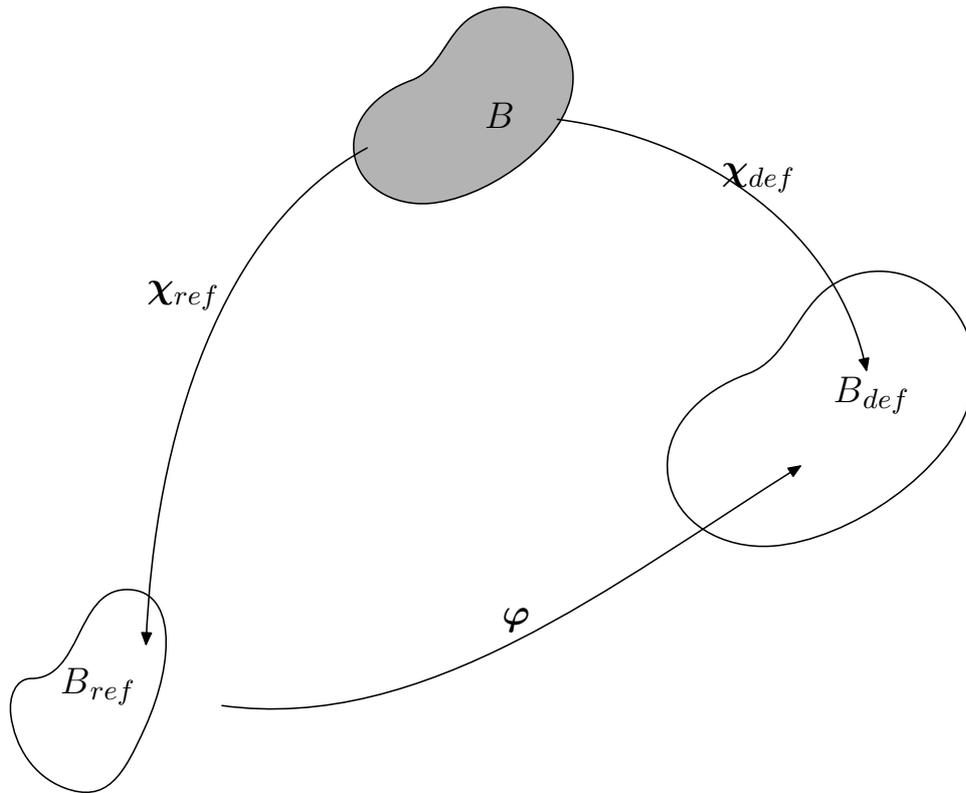


Figura 2: El campo de deformación de un medio continuo.

Las funciones φ que definen los campos de deformación de los medios continuos pueden ser muy variadas pero existen varias restricciones que han de cumplir. En primer lugar, como composición de dos configuraciones, han de ser funciones diferenciables. En segundo lugar han de ser *inyectivas*. Esto quiere decir que si \mathbf{X} e \mathbf{Y} son dos puntos distintos de la configuración de referencia entonces $\varphi(\mathbf{X}) \neq \varphi(\mathbf{Y})$. Lo que indica esta condición es que dos puntos no pueden deformarse de forma que acaben en la misma posición pues la materia es siempre impenetrable.

Resulta útil referirse también al campo de *desplazamientos*, especialmente para la teoría de deformaciones infinitesimales. Este campo se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) := \varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{X} . \quad (7)$$

La interpretación geométrica de este campo es que representa el vector que une las posiciones sin deformar y deformada de cada partícula.

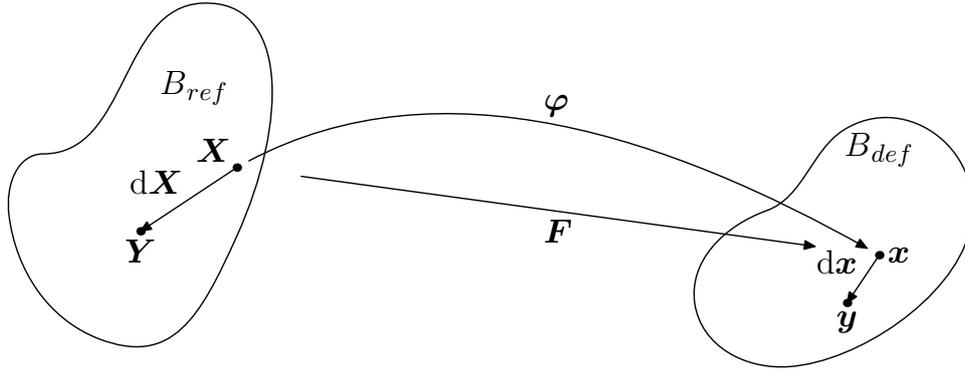


Figura 3: Definición geométrica del gradiente de deformación

3. El gradiente de deformación

El primer objeto derivado de la deformación es el *gradiente de deformación*, un tensor de segundo orden definido como

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j . \quad (8)$$

Este objeto es el segundo objeto más importante de la cinemática de medios continuos pues define la relación entre elementos diferenciales de la configuración sin deformar y los de la deformada. Más concretamente, si $d\mathbf{X}$ es un vector diferencial situado en el punto \mathbf{X} de la configuración de referencia y $d\mathbf{x}$ es el vector que resulta de la deformación de $d\mathbf{X}$ se cumple que

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} . \quad (9)$$

Para demostrarlo, considérense dos puntos \mathbf{X} y \mathbf{Y} muy próximos en la configuración de referencia tal que $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + d\mathbf{X}$. Después de la deformación $\boldsymbol{\varphi}$, estos dos puntos ocupan las posiciones $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})$ e $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{Y})$. Si llamamos $d\mathbf{x}$ al vector $d\mathbf{X}$ deformado que va de \mathbf{x} a \mathbf{y} se tiene que, utilizando un desarrollo en serie

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \mathbf{y} - \mathbf{x} \\ &= \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{Y}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) \\ &= \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) \\ &= \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} + \mathcal{O}(\|d\mathbf{X}\|^2) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} . \end{aligned} \quad (10)$$

En algunas aplicaciones también se emplea el gradiente del desplazamiento \mathbf{u} . Este se define como

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) - \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) - \mathbf{1} . \quad (11)$$

Ejemplo 1: Considérese la deformación de un cuerpo sólido que ocupa, en su configuración de referencia, el cubo $(0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1)$. El cuerpo se encuentra deformado con una función de deformación:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) = (X_1 + \gamma X_2)\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3 . \quad (12)$$

El campo de deformaciones asociado es $\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \gamma X_2\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$. La matriz asociada al gradiente de deformación es:

$$[\mathbf{F}(\mathbf{X})] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (13)$$

La matrix asociada al gradiente del desplazamiento se puede calcular de dos maneras, bien mediante su definición $\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$ o utilizando la relación $\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{1}$. En cualquier caso se tiene que:

$$[\mathbf{H}(\mathbf{X})] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (14)$$

□

3.1. Descomposición polar del gradiente de deformaciones

Más tarde veremos que el gradiente de deformación siempre posee determinante positivo. Tomando por el momento este resultado como válido se sigue del teorema de la descomposición polar que el tensor \mathbf{F} siempre se puede descomponer como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{R}(\mathbf{X})\mathbf{U}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}(\mathbf{X})\mathbf{R}(\mathbf{X}) , \quad (15)$$

siendo \mathbf{R} un tensor ortogonal propio y \mathbf{U}, \mathbf{V} dos tensores simétricos, definidos positivos. El tensor \mathbf{R} se denomina *tensor de rotación* y los tensores \mathbf{U}, \mathbf{V} , los *tensores de alargamiento derecho e izquierdo*, respectivamente.

La acción del tensor \mathbf{R} sobre un vector diferencial consiste en rotarlo, sin modificar su magnitud. Por contra, tanto \mathbf{U} como \mathbf{V} actúan sobre vectores diferenciales deformándolos. De la expresión (15) se sigue que, en general, el gradiente de deformación \mathbf{F} consta de una deformación \mathbf{U} y una rotación posterior \mathbf{R} , o equivalentemente, de una rotación \mathbf{R} y una deformación posterior \mathbf{V} .

Como los tensores de alargamiento son simétricos tienen siempre tres autovalores reales que se denominan los *alargamientos principales* y los denotaremos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Como además estos tensores son definidos positivos, los tres autovalores serán siempre positivos.

Ejemplo 2: Para hallar los alargamientos principales correspondientes a la deformación (12) se calculan los autovalores λ_i^2 del tensor

$$[\mathbf{C}(\mathbf{X})] = [\mathbf{F}(\mathbf{X})]^T[\mathbf{F}(\mathbf{X})] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

que son:

$$\lambda_1^2 = 1, \quad \lambda_2^2 = \frac{1}{2}(2 + \gamma^2 - \gamma\sqrt{4 + \gamma^2}), \quad \lambda_3^2 = \frac{1}{2}(2 + \gamma^2 + \gamma\sqrt{4 + \gamma^2}). \quad (17)$$

Los alargamientos principales son sencillamente las raíces cuadradas positivas de los autovalores (17). \square

4. Medidas locales de deformación

Además del gradiente de deformación y de los tensores de alargamiento existen otras muchas medidas locales de deformación que se emplean en Mecánica de Medios Continuos. Aunque como ya se ha explicado el gradiente de deformación contiene toda la información sobre la deformación local de un cuerpo hay ocasiones en las que otras medidas proporcionan información específica más conveniente o necesaria. Ya hemos visto, por ejemplo, como los tensores de alargamiento sirven para identificar los alargamientos principales, que contienen información muy interesante, como ya se verá. Existen además tensores de deformación, como el tensor de Green-Lagrange, que se emplean comúnmente para la definición de modelos constitutivos como se explicará en el capítulo correspondiente.

El tensor *derecho de Cauchy-Green* es un tensor de segundo orden definido como

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X})^T \mathbf{F}(\mathbf{X}). \quad (18)$$

De su definición se sigue que es un tensor simétrico, definido positivo. Más aún, empleando la descomposición polar del gradiente de deformaciones es inmediato verificar que

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \mathbf{U}(\mathbf{X})^2. \quad (19)$$

La descomposición espectral del tensor (derecho) de Cauchy-Green se puede obtener inmediatamente a partir de la del tensor (derecho) de alargamiento \mathbf{U} . Si los alargamientos principales se denotan como $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y las direcciones principales de \mathbf{U} como $\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \boldsymbol{\nu}_3$ entonces

$$\mathbf{C} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a^2 \boldsymbol{\nu}_a \otimes \boldsymbol{\nu}_a. \quad (20)$$

El tensor *izquierdo de Cauchy-Green* está definido como

$$\mathbf{b}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \mathbf{F}(\mathbf{X})^T. \quad (21)$$

El tensor derecho de Cauchy-Green se emplean can mucha frecuencia para estudiar aspectos locales de la deformación, como se verá en la sección 5. Un tensor de deformación que se emplea a menudo para la construcción de modelos constitutivos es el *tensor de Green-Lagrange*:

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C}(\mathbf{X}) - \mathbf{1}), \quad (22)$$

cuya descomposición espectral se puede encontrar fácilmente:

$$\mathbf{E} = \sum_{a=1}^3 \frac{1}{2}(\lambda_a^2 - 1) \boldsymbol{\nu}_a \otimes \boldsymbol{\nu}_a. \quad (23)$$

En general, empleando el concepto de descomposición espectral de un tensor se pueden definir infinitas medidas de deformación. Para ello basta con definir funciones escalares $f(\lambda)$ y construir el tensor de deformación correspondiente de la siguiente manera:

$$\mathbf{E} = \sum_{a=1}^3 f(\lambda_a) \boldsymbol{\nu}_a \otimes \boldsymbol{\nu}_a . \quad (24)$$

Evidentemente, existen algunas restricciones para las funciones $f(\lambda)$ que son:

- i) Han de estar definidas para $\lambda \in (0, \infty)$,
- ii) han de ser monótonicamente crecientes ($f'(\lambda) > 0$),
- iii) han de anularse cuando el cuerpo no está deformado, es decir, $f(1) = 0$, y
- iv) deben de cumplir que $f'(1) = 1$.

La justificación de la última condición se entiende en el contexto de las deformaciones infinitesimales, explicadas más adelante en este capítulo. El tensor de Green-Lagrange es de la forma (24), siendo $f(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$. Resulta útil generalizar este tipo de medidas de deformación de la siguiente manera:

$$\mathbf{E}^{(m)} = \sum_{a=1}^3 f^{(m)}(\lambda_a) \boldsymbol{\nu}_a \otimes \boldsymbol{\nu}_a , \quad \text{con} \quad f^{(m)}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{m}(\lambda^m - 1) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \log \lambda & \text{si } \lambda = 0 \end{cases} . \quad (25)$$

Se puede verificar de forma inmediata que las funciones $f^{(m)}$ cumplen las cuatro condiciones identificadas anteriormente.

Ejemplo 3: Considérese la estiramiento uniforme de una barra recta empotrada en un extremo y de longitud L en su configuración de referencia. La barra se estira debido a la aplicación de una fuerza en su extremo libre de forma que su longitud deformada sea ℓ con lo que el campo de deformación para este problema unidimensional es $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) = \ell/L\mathbf{X}$.

- i) El gradiente de deformación es $\mathbf{F} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \ell/L$.
- ii) El tensor de Cauchy-Green es simplemente $\mathbf{C} = \ell^2/L^2$.
- iii) El tensor de Green-Lagrange toma el valor $\mathbf{E} = \frac{\ell^2 - L^2}{2L^2}$.
- iv) El tensor de deformación $\mathbf{E}^{(o)}$ se simplifica a $\mathbf{E}^{(o)} = \log \frac{\ell}{L}$. □

5. Transformación de longitud, superficie y volumen

La cinemática de medios continuos intenta describir la deformación global y local de los cuerpos. En particular, resulta muy interesante poder calcular, a partir del campo de deformaciones, cómo se transforman los arcos, las superficies y los volúmenes. La forma de abordar esta cuestión es estudiando estas transformaciones a nivel diferencial e integrando los resultados así obtenidos. Como veremos en esta sección toda esta información se puede obtener a partir del gradiente de deformación.

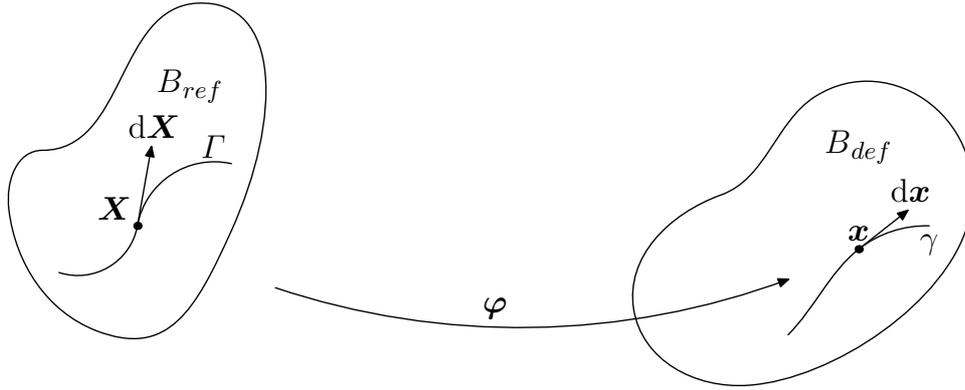


Figura 4: Transformación de una curva material Γ .

5.1. Transformación de longitud y ángulo

Ya se explicó en la sección 2 que el gradiente de deformación \mathbf{F} transforma los vectores diferenciales desde la configuración de referencia a la deformada. Suponemos ahora que un vector diferencial $d\mathbf{X}$ en la configuración de referencia tiene dirección $\boldsymbol{\eta}_o$ y longitud dS , es decir, $d\mathbf{X} = \boldsymbol{\eta}_o dS$. Una vez transformado debido a la deformación del medio continuo, este vector se transforma en $d\mathbf{x}$ que tiene dirección $\boldsymbol{\eta}$ y longitud ds . La definición matemática de estas dos longitudes (que son magnitudes escalares) es:

$$dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} , \quad ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} . \quad (26)$$

A partir de la expresión (9) que relaciona los vectores diferenciales sin deformar y deformado obtenemos:

$$ds^2 = (\mathbf{F} d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F} d\mathbf{X}) = (\boldsymbol{\eta}_o dS) \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} (\boldsymbol{\eta}_o dS) = dS^2 \boldsymbol{\eta}_o \cdot \mathbf{C} \boldsymbol{\eta}_o . \quad (27)$$

Concluimos pues, que dado un vector diferencial $d\mathbf{X} = \boldsymbol{\eta}_o dS$, con $\|\boldsymbol{\eta}_o\| = 1$ y origen en el punto \mathbf{X} de la configuración de referencia, éste se transforma en otro vector diferencial $d\mathbf{x}$, con origen en $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})$ y de longitud ds , dada por la expresión (27). El alargamiento por unidad de longitud de la curva Γ en el punto \mathbf{X} verifica pues:

$$\lambda = \frac{d ds}{d dS} = \sqrt{\boldsymbol{\eta}_o \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X}) \boldsymbol{\eta}_o} . \quad (28)$$

Siguiendo un proceso análogo al anterior se puede demostrar que también se verifica que

$$\frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) = \boldsymbol{\eta}_o \cdot \mathbf{E}(\mathbf{X}) \boldsymbol{\eta}_o . \quad (29)$$

Como se mostraba en el Ejemplo 4, la cantidad $\frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$ es una medida de deformación unidimensional que, además, tiene la ventaja de anularse cuando el cuerpo no está distorsionado.

Consideremos ahora el caso más complejo de una curva material Γ definida en la configuración de referencia. Esta curva está “pegada” a las partículas materiales que se

encuentran “bajo” ella. Cuando estas partículas se deforman debido a la deformación $\boldsymbol{\varphi}$, la curva también se deforma y ocupa una posición $\gamma = \boldsymbol{\varphi}(\Gamma)$ de la configuración deformada. La longitud de las dos curvas se puede calcular como

$$\begin{aligned} L &= \int_{\Gamma} dS , \\ \ell &= \int_{\gamma} ds = \int_{\Gamma} \sqrt{\boldsymbol{\eta}_o(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X})\boldsymbol{\eta}_o(\mathbf{X})} dS , \quad \boldsymbol{\eta}_o(\mathbf{X}) = \frac{\Gamma'(\mathbf{X})}{\|\Gamma'(\mathbf{X})\|} . \end{aligned} \quad (30)$$

Se puede considerar ahora el cambio del ángulo que forman entre sí dos vectores diferenciales $d\mathbf{X}_1 = \boldsymbol{\eta}_1 dS_1$ y $d\mathbf{X}_2 = \boldsymbol{\eta}_2 dS_2$ con origen en el punto $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_o$ al deformarse el cuerpo. El ángulo θ_o que estos dos vectores forman en la configuración de referencia se puede calcular empleando las propiedades del producto escalar:

$$\cos \Theta = \frac{d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2}{\|d\mathbf{X}_1\| \|d\mathbf{X}_2\|} = \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_2 . \quad (31)$$

De la misma manera, después de deformarse, los correspondientes vectores diferenciales forman un ángulo θ en la configuración deformada cuya magnitud viene dada por

$$\cos \theta = \frac{d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2}{\|d\mathbf{x}_1\| \|d\mathbf{x}_2\|} , \quad (32)$$

que se puede expresar como:

$$\cos \theta = \frac{\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X})\boldsymbol{\eta}_2}{\sqrt{\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X})\boldsymbol{\eta}_1} \sqrt{\boldsymbol{\eta}_2 \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X})\boldsymbol{\eta}_2}} \quad (33)$$

5.2. Transformación de área

De la misma manera que las curvas materiales se deforman cuando el medio sobre el que están definidas se deforma, las superficies también. Para evaluar cuantitativamente el efecto de esta deformación se considera un diferencial de superficie sobre la configuración de referencia. Este diferencial es una cantidad vectorial cuya magnitud dA es el área de un paralelogramo de lados $d\mathbf{X}_1$ y $d\mathbf{X}_2$ y cuya dirección \mathbf{N} viene dada por $d\mathbf{X}_1 \wedge d\mathbf{X}_2$. Es decir,

$$d\mathbf{A} = \mathbf{N} dA = d\mathbf{X}_1 \wedge d\mathbf{X}_2 . \quad (34)$$

Para calcular la superficie y dirección del elemento de área deformado basta con emplear las definiciones $d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_1$, $d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_2$ así como la propiedad elemental $(\mathbf{T}\mathbf{a}) \wedge (\mathbf{T}\mathbf{b}) = \det(\mathbf{T})\mathbf{T}^{-T}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$. De estas expresiones se obtiene que el diferencial de superficie deformada $d\mathbf{a}$ se puede calcular como

$$d\mathbf{a} = d\mathbf{x}_1 \wedge d\mathbf{x}_2 = (\mathbf{F} d\mathbf{X}_1) \wedge (\mathbf{F} d\mathbf{X}_2) = \det(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-T}(d\mathbf{X}_1 \wedge d\mathbf{X}_2) = \det(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A} . \quad (35)$$

5.3. Transformación de volumen

Finalmente, y siguiendo el mismo proceso que en los dos casos anteriores, también podemos calcular el efecto de la deformación sobre el volumen de un cuerpo continuo. Sea un diferencial de volumen material dV en la configuración de referencia. Este volumen se puede considerar como el que contiene un paralelepípedo diferencial cuyos lados son los vectores diferenciales $d\mathbf{X}_1$, $d\mathbf{X}_2$ y $d\mathbf{X}_3$ situados sobre el punto $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_o$. A partir de las propiedades del producto mixto el volumen diferencial se puede calcular como

$$dV = [d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2, d\mathbf{X}_3] . \quad (36)$$

Empleando la propiedad del producto mixto $[\mathbf{T}\mathbf{a}, \mathbf{T}\mathbf{b}, \mathbf{T}\mathbf{c}] = \det(\mathbf{T})[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ resulta de (36) que el diferencial de volumen deformado dv tiene valor

$$dv = [d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2, d\mathbf{x}_3] = [\mathbf{F} d\mathbf{X}_1, \mathbf{F} d\mathbf{X}_2, \mathbf{F} d\mathbf{X}_3] = \det(\mathbf{F})[d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2, d\mathbf{X}_3] = \det(\mathbf{F}) dV . \quad (37)$$

El determinante del gradiente de deformaciones se suele indicar con la letra J , así pues

$$J = \det(\mathbf{F}) = \sqrt{\det(\mathbf{C})} = I_3(\mathbf{F}) . \quad (38)$$

El jacobiano J proporciona, como se ha visto, el cociente entre el volumen deformado y el volumen sin deformar de un paralelepípedo elemental. Como la materia no puede desaparecer, este cociente podrá ser mayor o menor que uno, pero siempre habrá de ser positivo.

Sea Ω_o una región material del cuerpo. Si su volumen es $V = \int_{\Omega_o} dV$ se obtiene fácilmente que el volumen de esta región una vez deformada es

$$v = \text{volumen}(\varphi(\Omega_o)) = \int_{\varphi(\Omega_o)} dv = \int_{\Omega_o} J(\mathbf{X}) dV \quad (39)$$

6. Deformaciones de sólido rígido

En las próximas tres secciones se van a estudiar algunos tipos de deformaciones que merecen especial atención. El primer tipo lo constituyen las deformaciones de sólido rígido. Estos tipos de movimientos son aquellos en los que el cuerpo se mueve sin que cambie la distancia relativa entre puntos del mismo. Es decir, para cualquier pareja de puntos \mathbf{X}, \mathbf{Y} del cuerpo:

$$\|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\| = \|\varphi(\mathbf{Y}) - \varphi(\mathbf{X})\| . \quad (40)$$

Las deformaciones de sólido rígido son siempre de la forma:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{Y}) + \mathbf{Q}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) , \quad (41)$$

donde \mathbf{Y} es un punto cualquiera del cuerpo y \mathbf{Q} es un tensor ortogonal propio. Es sencillo comprobar que los movimiento de tipo (41) preservan las distancias relativas. La demostración de que éstas son las únicas deformaciones con esta propiedad es un poco más compleja: derivando (40) respecto a \mathbf{X} primero y respecto a \mathbf{Y} después se obtiene:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X})^T \mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \mathbf{1} . \quad (42)$$

Eligiendo $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ en esta ecuación deducimos que el gradiente de deformación ha de ser ortogonal y puesto que $\det(\mathbf{F}) > 0$, además propio, es decir una rotación. Volviendo a la ecuación (42) se deduce que $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{Y})$, es decir que el campo de rotaciones es constante $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}$. Una deformación con gradiente de deformación constante e igual a \mathbf{Q} ha de ser de la forma (41).

Las deformaciones de sólido rígido tienen gradiente de deformación $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}$ por lo que el tensor de Cauchy-Green es sencillamente

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{1} . \quad (43)$$

Se deduce pues que, como era de esperar, una deformación de sólido rígida preserva las longitudes, áreas y volúmenes diferenciales. También se puede demostrar que una deformación con $\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \mathbf{1}$ (o, equivalentemente, $\mathbf{E} = 0$) ha de ser de la forma (41).

Dentro de las deformaciones de sólido rígido existen un tipo muy sencillo que son las translaciones rígidas. Estas son de la forma:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{a} + \mathbf{X} . \quad (44)$$

7. Deformaciones homogéneas

El segundo tipo de deformaciones que estudiamos son las llamadas *deformaciones homogéneas*, definidas como aquellas en las que el gradiente de deformación \mathbf{F} es constante para todas las partículas del cuerpo.

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F} . \quad (45)$$

La forma más general de una deformación homogénea es pues

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{a} + \mathbf{F} \mathbf{X} , \quad (46)$$

siendo \mathbf{a} un vector cualquiera.

Este tipo de deformación es sencillo pues todas las medidas de deformación (que siempre se derivan del gradiente de deformación) son iguales para todos los puntos del cuerpo. Esto además implica que las relaciones derivadas para la transformación de vectores infinitesimales, áreas y volúmenes son en este caso válidas para vectores, áreas y volúmenes de tamaño *finito*.

Un caso particular sencillo pero importante de deformación homogénea es el *alargamiento*. Se dice que una deformación es un *alargamiento* o *estiramiento* si es de la forma:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{Y} + \mathbf{U}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) , \quad (47)$$

siendo \mathbf{Y} un punto fijo y \mathbf{U} un tensor simétrico y definido positivo. Se puede comprobar inmediatamente que un alargamiento es una deformación homogénea con gradiente de deformación $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{U}$. Empleando el teorema de la descomposición polar al gradiente de deformación concluimos que ésta no incluye ninguna rotación. Nótese que una deformación de alargamiento puede “acortar” las dimensiones del cuerpo continuo.

El siguiente teorema caracteriza todas las deformaciones homogéneas como composición de otras más sencillas:

Teorema 1: *Toda deformación homogénea φ se puede escribir como la composición de una translación, una rotación pura y un alargamiento:*

$$\varphi(\mathbf{X}) = (\varphi_{tr} \circ \varphi_{rot} \circ \varphi_{est})(\mathbf{X}) . \quad (48)$$

DEMOSTRACIÓN: Para demostrar este teorema basta definir las tres deformaciones como:

$$\begin{aligned} \varphi_{tr} &= \varphi(\mathbf{Y}) + \mathbf{X} - \mathbf{Y} , \\ \varphi_{rot} &= \mathbf{Y} + \mathbf{R}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) , \\ \varphi_{est} &= \mathbf{Y} + \mathbf{U}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) . \end{aligned} \quad (49)$$

■

8. Deformaciones infinitesimales

Quizás las deformaciones “sencillas” más importantes que existen son las llamadas “deformaciones infinitesimales” y que estudiamos en esta sección. Este tipo de deformaciones son las que se estudiaban antes casi exclusivamente en asignaturas como “Elasticidad y Resistencia de Materiales”, pues permiten resolver un gran número de problemas prácticos y además son mucho más sencillas que las deformaciones generalizadas que se han presentado en este capítulo. Aunque nos ceñiremos en esta sección a su descripción cinemática, este tipo de deformaciones simplifica también, como veremos más adelante en el curso, las ecuaciones de equilibrio y los modelos constitutivos.

Para medir el tamaño de una deformación definimos el parámetro adimensional

$$h(\mathbf{X}) = \|\mathbf{H}(\mathbf{X})\| , \quad (50)$$

donde $\mathbf{H} = \text{GRAD } \mathbf{u}$. Este parámetro permite definir de manera rigurosa el concepto de deformación infinitesimal:

Definición 2: *Se dice que una deformación es infinitesimal si, para todo punto $\mathbf{X} \in B_{ref}$, el parámetro $h(\mathbf{X})$ es muy pequeño, es decir,*

$$h(\mathbf{X}) \ll 1 . \quad (51)$$

Las deformaciones infinitesimales son un subconjunto de las deformaciones posibles de un cuerpo. La propiedad (51) que las caracteriza tiene implicaciones de muy largo alcance, la mayoría de las cuales simplifica enormemente el tratamiento matemático de dichas deformaciones. La primera simplificación del cálculo tensorial es que no resulta necesario distinguir entre derivadas con respecto a coordenadas materiales y espaciales. Así por ejemplo

$$\text{grad } \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \text{GRAD } \mathbf{u} \mathbf{F}^{-1} = \text{GRAD } \mathbf{u} (\mathbf{1} + \mathbf{H})^{-1} = \text{GRAD } \mathbf{u} + \mathcal{O}(h) . \quad (52)$$

Por ello, cuando se estudien deformaciones infinitesimales, no se utilizará la notación GRAD o grad sino únicamente ∇ . De la misma manera, en vez de DIV o div emplearemos $\nabla \cdot$, y en vez de ROT y rot, simplemente $\nabla \wedge$.

Existen dos tensores de deformación que se emplean comúnmente en problemas de deformaciones infinitesimales:

Definición 3: En una deformación infinitesimal con función de desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ se define el tensor de deformación infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X})$ como el tensor de segundo orden simétrico

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{X})) , \quad (53)$$

o en componentes

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = u_{(i,j)} . \quad (54)$$

Además se define el tensor de rotación infinitesimal $\mathbf{W}(\mathbf{X})$ como el tensor de segundo orden hemisimétrico

$$\mathbf{W}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}) - \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{X})) , \quad (55)$$

o en componentes

$$W_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) = u_{[i,j]} . \quad (56)$$

Existen varias maneras de motivar la definición del tensor de deformaciones infinitesimales. El siguiente teorema muestra que dicho tensor es una aproximación del tensor de deformación de Green-Lagrange. En realidad, dicha justificación se podría generalizar a cualquier medida de deformación del tipo (24).

Teorema 4: El tensor de deformaciones infinitesimales $\boldsymbol{\varepsilon}$ es una aproximación de orden $\mathcal{O}(h^2)$ del tensor de deformación de Green-Lagrange \mathbf{E} .

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{2}((\mathbf{1} + \mathbf{H})^T (\mathbf{1} + \mathbf{H}) - \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \\ &= \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \\ &= \boldsymbol{\varepsilon} + \mathcal{O}(h^2) . \end{aligned} \quad (57)$$

■

En una deformación infinitesimal el tensor de deformación (de Green-Lagrange, por ejemplo) es igual, salvo un error de tamaño $\mathcal{O}(h^2)$, al tensor infinitesimal de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$. Por ello, si se ignoran estos pequeños errores, el tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ es la medida de deformación que caracteriza este tipo de deformaciones.

La teoría de deformaciones infinitesimales, o pequeñas deformaciones, parte de la hipótesis de que dichos errores se pueden ignorar y por lo tanto $\boldsymbol{\varepsilon}$ es la única medida de deformación. Hay que resaltar que esto es una aproximación que sólo es buena cuando $h(\mathbf{X})$

es muy pequeño, pues ε no es una verdadera medida de deformación para deformaciones grandes.

Una propiedad fundamental de las deformaciones infinitesimales es que la medida de deformación ε es una función *lineal*, al contrario que \mathbf{E} y otras medidas de deformación discutidas en la sección 5. Esta es una característica que modifica de manera radical la forma de enfocar la teoría de medios deformables y eventualmente posibilitará que las ecuaciones del problema elástico con deformaciones infinitesimales definan un problema lineal. Esto a su vez posibilitará el principio de superposición que puede ser empleado para resolver problemas de forma sistemática y simplificada.

8.1. Deformaciones infinitesimales rígidas

El tensor de deformación infinitesimal mide el grado de deformación local en una deformación infinitesimal. Por ello se dice que una deformación es infinitesimalmente rígida si dicho tensor de deformación se anula, es decir

$$\varepsilon(\mathbf{X}) = 0, \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in \mathcal{B} \quad (58)$$

En las deformaciones infinitesimales rígidas el gradiente de desplazamiento \mathbf{H} ha de ser hemisimétrico y coincide con el tensor de rotación infinitesimal \mathbf{W} :

$$\mathbf{H} = \text{sim}(\mathbf{H}) + \text{hem}(\mathbf{H}) = \varepsilon + \mathbf{W} = \mathbf{W} . \quad (59)$$

Este tipo de deformaciones ha de tener una función de desplazamiento que sólo puede ser de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}(\mathbf{Y}) + \mathbf{W}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) , \quad (60)$$

donde \mathbf{Y} es cualquier punto del cuerpo. Recalcamos que una deformación infinitesimalmente rígida no es una deformación rígida, tal y como éstas se definieron en la sección 6.

8.2. Cambio de volumen

En la sección 5.3 estudiamos cómo se puede calcular el cambio de volumen en una deformación cualquiera. En el caso de una deformación infinitesimal dicho cálculo se simplifica, si estamos dispuestos a despreciar los términos de orden $\mathcal{O}(h^2)$ o más pequeños.

Definición 5: *La deformación volumétrica infinitesimal $\theta(\mathbf{X})$ es la función escalar*

$$\theta(\mathbf{X}) = \text{traza}(\varepsilon(\mathbf{X})) = \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}) . \quad (61)$$

Como en el caso de las medidas de deformación infinitesimal introducidas anteriormente, la función escalar θ es una aproximación a la verdadera deformación volumétrica que ocurre en una deformación cualquiera. La precisión de dicha aproximación depende, como siempre, del tamaño de h , como se demuestra en el siguiente teorema:

Teorema 6: La deformación volumétrica θ es una aproximación de orden h^2 al cambio de volumen relativo

$$\frac{dv - dV}{dV} = J - 1 ,$$

siendo $J = \det(\mathbf{F})$.

DEMOSTRACIÓN: Para demostrar este teorema basta con calcular el valor del jacobiano J . Si $\|\mathbf{H}\| = h$, entonces

$$J = \det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{1} + \mathbf{H}) = 1 + H_{11} + H_{22} + H_{33} + \mathcal{O}(h^2) . \quad (62)$$

Observando que la traza del tensor \mathbf{H} ha de ser igual a la de su parte simétrica $\boldsymbol{\varepsilon}$ se sigue que:

$$J - 1 = \text{traza}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mathcal{O}(h^2) , \quad (63)$$

y concluimos que

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} , \quad (64)$$

es una aproximación de orden $\mathcal{O}(h^2)$ al verdadero cambio de volumen relativo. ■

8.3. Deformación desviadora y volumétrica

En numerosas circunstancias será necesario descomponer el tensor de deformación infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon}$ en dos partes independientes: una parte que mida el cambio de volumen que el cuerpo experimenta localmente y otra su cambio de forma, también local. La primera parte se llama la deformación volumétrica y la segunda, la desviadora. A partir de los argumentos de la (61) se deduce que la parte volumétrica del tensor de deformación infinitesimal es:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_v(\mathbf{X}) = \frac{\theta(\mathbf{X})}{3} \mathbf{1} , \quad (65)$$

y la parte desviadora es:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d(\mathbf{X}) = \boldsymbol{e}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varepsilon}_v(\mathbf{X}) . \quad (66)$$

El tensor $\boldsymbol{\varepsilon}_v$ es un tensor de deformación cuya traza es la misma que la traza de $\boldsymbol{\varepsilon}$, es decir, que representa la misma deformación volumétrica. El tensor \boldsymbol{e} sin embargo tiene traza nula, es decir, que no contiene nada de deformación volumétrica.

8.4. Transformación de longitud y ángulo en una deformación infinitesimal

En la sección 5.1 se estudió cómo el tensor (derecho) de Cauchy-Green incluye la información necesaria para obtener el cambio de longitud de vectores diferenciales debido a la deformación y el cambio en el ángulo que forman dos de ellos. En esta sección se estudia los mismos efectos pero en deformaciones infinitesimales y deduciremos que el tensor de deformación infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon}$ también se puede emplear para obtener esta misma información local.

Antes de deformarse

Después de deformarse

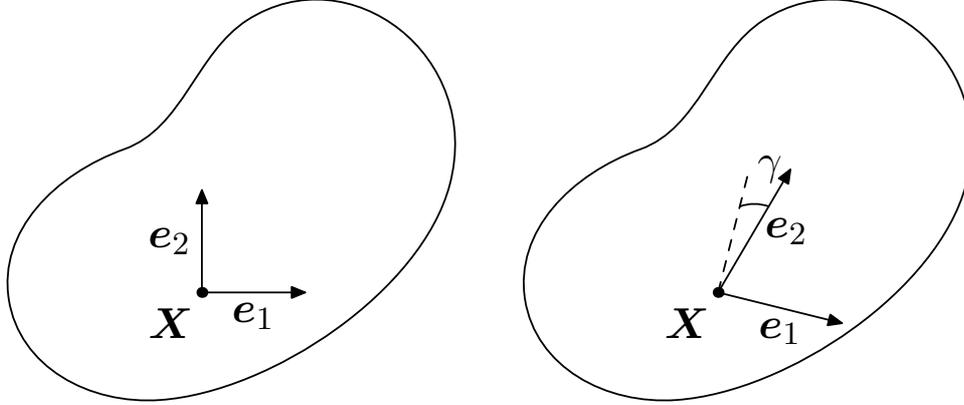


Figura 5: Ángulo γ que determina la deformación por cortante.

De la misma manera que en la sección 5 consideramos un vector $d\mathbf{X}$ en la configuración de referencia, de tamaño $dS = \|d\mathbf{X}\|$ y dirección $\boldsymbol{\eta}$. Si se define $\delta = \lambda - 1$ y se usan las ecuaciones (57) y (28) obtenemos:

$$\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta} \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{X}) + \mathcal{O}(h^2))\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2}\lambda^2 - 1 + \mathcal{O}(h^2) = \delta + \mathcal{O}(h^2). \quad (67)$$

Este resultado establece que el producto $\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\eta}$ sirve para calcular el *incremento de longitud unitario* en la dirección $\boldsymbol{\eta}$, en el punto \mathbf{X} . En particular si escogemos $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{e}_i$, un vector de la base coordenada, obtenemos que ε_{ii} (no hay sumatorio) es el incremento de longitud unitario en la dirección coordinada X_i .

De la misma manera, si ahora consideramos dos vectores diferenciales $d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2$ de tamaños dS_1, dS_2 , direcciones $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$, situados en el punto \mathbf{X} de la configuración de referencia, se tiene que usando la misma notación que en la sección 5.1,

$$\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \mathbf{E}\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \mathbf{C}\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_2) = \frac{1}{2}(\lambda_1\lambda_2 \cos \theta - \cos \Theta). \quad (68)$$

Supongamos ahora que elegimos los dos vectores diferenciales de forma que formen inicialmente un ángulo $\Theta = \pi/2$, y definamos $\delta_1 = \lambda_1 - 1, \delta_2 = \lambda_2 - 1, \gamma = \pi/2 - \theta$. Entonces,

$$\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \mathbf{E}\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1}{2}((1 + \delta_1)(1 + \delta_2) \cos(\pi/2 - \gamma) - 0) = \frac{1}{2}(1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2) \sin \gamma. \quad (69)$$

Si en lugar de emplear el tensor de Green-Lagrange empleamos el tensor de deformaciones infinitesimales se sigue que:

$$\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \mathbf{E}\boldsymbol{\eta}_2 + \mathcal{O}(h^2) = \frac{1}{2}(1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2) \sin \gamma + \mathcal{O}(h^2). \quad (70)$$

En una deformación infinitesimal tanto las cantidades δ como el ángulo γ han de ser de orden

$\mathcal{O}(h)$. Por lo tanto $\sin \gamma \approx \gamma$ y la expresión anterior se puede simplificar a:

$$\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\eta}_2 = \frac{\gamma}{2} + \mathcal{O}(h^2) . \quad (71)$$

Este resultado establece que el producto $\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\eta}_2$ sirve para calcular el *cambio del ángulo*, debido a la deformación, que forman dos vectores infinitesimales que inicialmente formaban un ángulo recto. En particular si escogemos $\boldsymbol{\eta}_i = \mathbf{e}_i$, un vector de la base coordenada, obtenemos que ε_{ij} es la mitad del ángulo que se ha cerrado o abierto entre dos vectores paralelos a \mathbf{e}_i y \mathbf{e}_j y situados en el punto \mathbf{X} . La cantidad γ se llama de deformación por cortante (ingenieril).

A raíz de lo visto en esta sección, podemos expresar la matriz asociada al tensor de deformaciones infinitesimales de la siguiente manera:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{\gamma_{12}}{2} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{21}}{2} & \varepsilon_{22} & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{31}}{2} & \frac{\gamma_{32}}{2} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} , \quad (72)$$

que además ha de ser simétrica.

9. Ecuaciones de compatibilidad

Dada una función de deformación $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})$ se pueden hallar las medidas locales de deformación $\mathbf{C}(\mathbf{X})$, $\mathbf{E}(\mathbf{X})$, etc. Sin embargo, dado un campo de deformación $\mathbf{C}(\mathbf{X})$, ¿existe alguna deformación $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})$ tal que dicho tensor de Cauchy-Green provenga de ella? La respuesta a esta pregunta no es sencilla y desde luego no siempre es afirmativa. Las condiciones que permiten averiguar si un campo de deformaciones \mathbf{C} se deriva de una deformación están más allá de los objetivos docentes de esta asignatura y no se tratarán aquí.

De la misma manera, en una deformación infinitesimal, dado el campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ se puede calcular el tensor de deformación infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X})$. Ahora bien, la pregunta inversa, al igual que en el caso de deformaciones finitas, no es trivial. Para el problema de deformaciones infinitesimales presentamos en forma de un teorema, que no demostramos, las condiciones necesarias y suficientes para que un campo de deformaciones infinitesimales $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X})$ provenga de un campo de desplazamientos.

Teorema 7: *Un campo de deformaciones infinitesimales $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X})$ proviene de un campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ si y sólo si se cumplen las (seis) condiciones:*

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jk,il} \quad (73)$$

En el caso de deformación plana ($u_1 = u_1(X_1, X_2)$, $u_2 = u_2(X_1, X_2)$, $u_3 = 0$) las condiciones (73) se simplifican y sólo una de ellas es independiente

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12} . \quad (74)$$

10. Movimientos en tiempo. Trayectoria

Hasta ahora nos hemos centrado en el estudio de la cinemática de cuerpos deformables centrándonos en las deformaciones que ocurren entre una configuración de referencia y una configuración deformada. En ésta y las próximas secciones se estudian familias de configuraciones deformadas y los objetos cinemáticos que se pueden definir para su estudio.

En primer lugar se define un movimiento como una familia de configuraciones φ_t que depende de un parámetro t (el tiempo) de forma diferenciable. Es decir, si $\mathcal{K}(\mathcal{B})$ es el espacio de configuraciones posibles de un cuerpo continuo \mathcal{B} , entonces φ_t es una curva en $\mathcal{K}(\mathcal{B})$. La notación que se emplea para cada una de estas configuraciones es $\varphi_t(\mathbf{X})$ o $\varphi(\mathbf{X}, t)$.

Se define la configuración inicial como aquella que tiene lugar en el instante $t = 0$, es decir, χ_o . Es muy corriente que cuando se estudia el movimiento de un cuerpo éste se encuentre sin deformar en el instante inicial, es decir $\chi_o \equiv \chi_{ref}$. Aunque los conceptos de configuración inicial, de referencia y sin deformar son distintos en la práctica coinciden prácticamente siempre y los emplearemos indistintamente.

Cuando un cuerpo realiza un movimiento como se ha descrito anteriormente, cada partícula material $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_{ref}$ recorre una curva en el espacio $\mathbf{c}(t)$ que se puede expresar en función del campo de configuraciones como:

$$\mathbf{c}(t) = \varphi(\mathbf{X}, t) . \quad (75)$$

Esta curva se denomina *trayectoria* y determina de forma inequívoca la posición de la partícula \mathbf{X} en cada instante de tiempo. Nótese que en el instante $t = 0$, $\mathbf{c}(0) = \varphi(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$.

11. Descripción material y espacial

El movimiento de un cuerpo continuo se define completamente mediante la familia de configuraciones φ_t . En un instante de tiempo genérico t además estas configuraciones definen una aplicación biyectiva entre \mathcal{B}_o y \mathcal{B}_t . Esto significa que cada partícula material $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_o$ ocupa, en dicho instante, un punto del espacio $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ y que además cada punto de la región $\mathcal{B}_t \in \mathbb{R}^3$ es la imagen de una y solamente una partícula material del cuerpo. Dado una posición $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ podemos encontrar cuál es la partícula que ocupa ese lugar en el instante t mediante la función inversa y obtenemos $\mathbf{X} = \varphi_t^{-1}(\mathbf{x})$.

Considérese ahora un campo escalar, vectorial o tensorial \mathbf{Y} que está definida en todo instante sobre las partículas materiales de la configuración de referencia. La expresión completa de esta función, incluyendo sus argumentos, es $\mathbf{Y}(\mathbf{X}, t)$ y devuelve, para cada instante de tiempo t el valor del campo \mathbf{Y} que corresponde a la partícula \mathbf{X} . Se dice que \mathbf{Y} es un campo *material*.

Empleando la relación biyectiva que la deformación establece podemos expresar el campo \mathbf{Y} en función de la posición \mathbf{x} en lugar de la partícula \mathbf{X} . Para ello sustituimos \mathbf{X} por $\varphi_t^{-1}(\mathbf{x}, t)$ y definimos

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{Y}(\varphi_t^{-1}(\mathbf{x}, t), t) . \quad (76)$$

El campo $\mathbf{y} = \mathbf{Y}_o \boldsymbol{\varphi}_t^{-1}$ depende de la posición y del tiempo y se denomina *espacial*. Los dos campos \mathbf{Y} y \mathbf{y} dan el mismo resultado si se evalúan en el mismo instante de tiempo y si $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X})$. Además, conocido uno de ellos y la función $\boldsymbol{\varphi}_t$ se puede calcular el otro.

En Mecánica de Medios Continuos se usan campos materiales y espaciales, según la conveniencia de cada situación. En la mayoría de las situaciones se emplean letras mayúsculas para indicar los campos materiales y letras minúsculas para los espaciales. Como en el ejemplo anterior, la versión material y espacial de un mismo campo se indican con la misma letra pero en mayúscula y minúscula, respectivamente.

12. Velocidad y aceleración

Las definiciones de velocidad y de aceleración en Mecánica de Medios Continuos coinciden con las definiciones clásicas estudiadas en Mecánica Clásica. Sin embargo merecen un estudio cuidadoso para diferenciar las distintas formas de calcularlas.

Como en la sección 10 se considera la trayectoria $\mathbf{c}(t) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$ de una partícula material \mathbf{X} y se definen su velocidad y aceleración como la primera y segunda derivadas temporales de esta función. Más explícitamente:

Definición 8: *Dado un movimiento $\boldsymbol{\varphi}_t$ de un cuerpo continuo, se definen la velocidad material \mathbf{V} y la aceleración material \mathbf{A} de un partícula $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_o$ como:*

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} , \quad \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \ddot{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} . \quad (77)$$

Por su definición resulta obvio que se trata de dos campos vectoriales materiales. Físicamente representan la velocidad y aceleración, en el sentido clásico, de la partícula que ocupa la posición \mathbf{X} en el instante $t = 0$. Para muchas aplicaciones resulta útil definir la versión espacial de estos dos campos y se emplean las siguientes definiciones

Definición 9: *Dado un movimiento $\boldsymbol{\varphi}_t$ de un cuerpo continuo y la velocidad y aceleración materiales \mathbf{V}, \mathbf{A} se definen la velocidad espacial \mathbf{v} y la aceleración espacial \mathbf{a} como*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\boldsymbol{\varphi}_t^{-1}(\mathbf{x}, t), t) , \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}_t^{-1}(\mathbf{x}, t), t) . \quad (78)$$

Como indican sus definiciones, se trata de dos campos espaciales. Físicamente, representan la velocidad y la aceleración, en sentido clásico, de la partícula que en el instante de tiempo t ocupa la posición \mathbf{x} .

Es importante notar que ni la velocidad espacial ni la aceleración espacial *son la derivada temporal de ninguna función*. Para hacer más patente esta distinción se define el siguiente concepto;

Definición 10: Sea \mathbf{Y} un campo escalar, vectorial o tensorial material. Se define la derivada temporal material como la derivada parcial de dicho campo con respecto al tiempo y se denota

$$\dot{\mathbf{Y}} = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} . \quad (79)$$

La derivada temporal material de \mathbf{y} , un campo escalar, vectorial o tensorial espacial, se define de igual manera, es decir, como la derivada parcial con respecto al tiempo estando \mathbf{X} fija. Para distinguirla de la derivada parcial con respecto al tiempo usual, la derivada temporal material de dicho campo se escribe $\frac{D\mathbf{y}}{Dt}$ y se calcula como

$$\frac{D\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \left. \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{y}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{grad } \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) . \quad (80)$$

Con la notación introducida podemos resaltar que la aceleración espacial $\mathbf{a} \neq \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ sino que se puede calcular como

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{v}) \mathbf{v} . \quad (81)$$