

# Leyes de balance y conservación

*Abril 4, 2005*

Ignacio Romero. [iromero@mecanica.upm.es](mailto:iromero@mecanica.upm.es)

## Índice

1. Introducción . . . . .	2
2. Curvas, superficies y volúmenes materiales . . . . .	2
3. Curvas, superficies y volúmenes de control . . . . .	5
4. Balance de masa . . . . .	6
5. Balance de cantidad de movimiento . . . . .	9
6. Balance de momento cinético . . . . .	12
7. Balance de energía . . . . .	15
8. La segunda ley de la termodinámica . . . . .	20

# 1. Introducción

Los cuerpos continuos, sin excepción, se comportan verificando unas leyes de balance o conservación. La Mecánica de Medios Continuos postula estas leyes, pues no son demostrables a partir de otros principios y constituyen, junto con la cinemática y los modelos constitutivos los tres pilares de esta disciplina.

Estas leyes de conservación, a saber, de la masa, de la cantidad de movimiento, del momento cinético y de la energía, son idénticas para todos los cuerpos: sólidos, fluidos y gases de todo tipo.

Estos principios de conservación subrayan el poder unificador de la Mecánica de Medios Continuos y su enunciado completo sólo es posible empleando el formalismo del cálculo y álgebra vectorial y tensorial explicado hasta el momento.

En este capítulo examinaremos estas relaciones de balance e identificaremos diferentes expresiones matemáticas que las expresan de forma precisa, y que se pueden emplear en problemas prácticos.

# 2. Curvas, superficies y volúmenes materiales

Para comenzar a explicar estos conceptos considérese el cuerpo  $\mathcal{B}_o$  sin deformar y una superficie cualquiera  $\mathcal{S}_o$  que intersecta al cuerpo. La expresión matemática de los puntos del cuerpo que están sobre esta superficie es una ecuación escalar de la forma

$$\mathbf{X} \in \mathcal{B}_o : \mathcal{S}_o(\mathbf{X}) = 0 . \quad (1)$$

Una *superficie material* es un conjunto de puntos que corresponden, en cada instante, a las posiciones que ocupan las partículas que constituían, en el instante inicial, la intersección de  $\mathcal{S}_o$  con el cuerpo. Esta “superficie material” se deforma a la par del cuerpo continuo, como una lámina de material insertada dentro del mismo. La expresión (1) es la “descripción material” de esta superficie, y la descripción espacial es por lo tanto

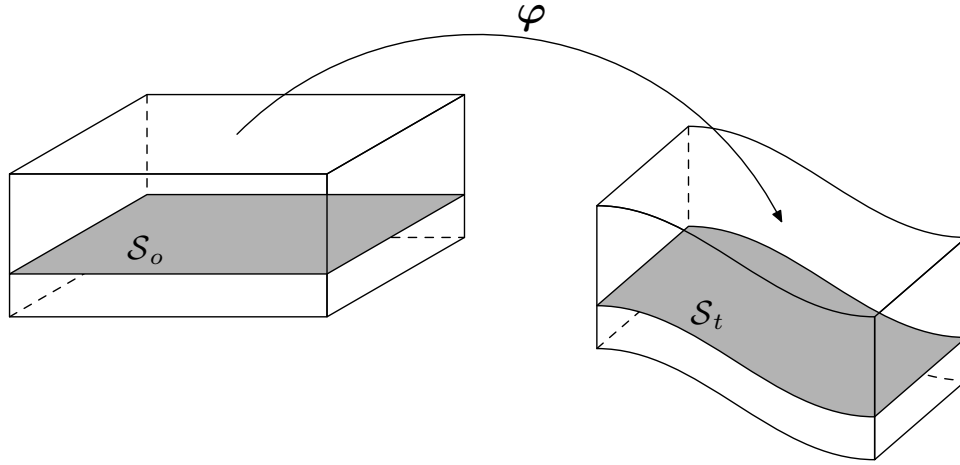
$$\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t : \mathcal{S}_t(\mathbf{x}, t) = 0 , \quad \text{donde} \quad \mathcal{S}_t = \mathcal{S}_o \circ \varphi_t^{-1} . \quad (2)$$

Se consideran ahora dos superficies materiales  $\mathcal{S}_o, \mathcal{T}_o$  con una intersección  $\mathcal{C}_o = \mathcal{S}_o \cup \mathcal{T}_o$ . Las partículas que en la configuración de referencia se encuentran sobre la curva  $\mathcal{C}_o$  forman una “curva material” que, al igual que la superficie material, se deforma acompañando al medio continuo donde se inscribe, como un hilo insertado en el mismo. La expresión matemática de esta superficie material puede hacerse, como siempre, mediante una expresión material o bien mediante una espacial. La “descripción material” de una curva material viene dada por dos ecuaciones escalares, las de las superficies cuya intersección la determina:

$$\mathbf{X} \in \mathcal{B}_o : \mathcal{S}_o(\mathbf{X}) = \mathcal{T}_o(\mathbf{X}) = 0 . \quad (3)$$

Similarmente, la descripción espacial resulta de la descripción espacial de las misma dos superficies

$$\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t : \mathcal{S}_t(\mathbf{x}, t) = \mathcal{T}_t(\mathbf{x}, t) = 0 , \quad \text{donde} \quad \mathcal{S}_t = \mathcal{S}_o \circ \varphi_t^{-1} , \quad \mathcal{T}_t = \mathcal{T}_o \circ \varphi_t^{-1} \quad (4)$$



**Figura 1:** Superficie material

Finalmente, un volumen material es el conjunto de posiciones ocupadas, en todo instante, por las partículas que en el instante inicial se encuentran dentro de una región del cuerpo sin deformar  $\mathcal{B}_o$ . Otra forma de definir un volumen de control es a partir de las partículas que se encuentran “dentro” de una superficie de control cerrada. En cualquier caso, indicaremos como  $\mathcal{P}_o$  la descripción material de un volumen material y  $\mathcal{P}_t$  su descripción espacial.

En cualquiera de los tres casos considerados, si  $\Omega_o$  es el conjunto de partículas del conjunto material que consideramos, su posición en cualquier instante viene dada por la deformación del medio continuo, es decir,

$$\Omega_t = \varphi(\Omega_o, t) . \quad (5)$$

### Derivadas de integrales sobre conjuntos materiales

En varias ocasiones, durante el transcurso de este capítulo, será necesario calcular la derivada de cantidades integrales definidas sobre conjuntos materiales. Por ejemplo, sea  $I$  una cantidad definida a través de una integral sobre un volumen material

$$I = \int_{\mathcal{P}_t} \psi(\mathbf{x}, t) dv , \quad (6)$$

donde  $\mathcal{P}_t = \varphi_t(\mathcal{P}_o)$  y  $\psi(\mathbf{x}, t)$  es una función escalar cualquiera definida sobre puntos del espacio. Si se desea calcular la derivada temporal de  $I$ , habrá que tener en cuenta que no sólo el integrando, sino también el dominio de integración, dependen del tiempo. Para realizar esta derivada basta con realizar un cambio de variable en el dominio de integración, expresándolo en un dominio de integración fijo, tomar las derivadas necesarias y deshacer el

cambio de variable. El procedimiento, de forma detallada, es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\dot{I} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \psi(\mathbf{x}, t) dv \\
&= \frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(\mathcal{P}_o)} \psi(\mathbf{x}, t) dv \\
&= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_o} \psi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) dV \\
&= \int_{\mathcal{P}_o} (\dot{\psi}(\varphi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) + \psi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \dot{J}(\mathbf{X}, t)) dV \\
&= \int_{\mathcal{P}_o} (\dot{\psi}(\varphi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) + \psi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) (\operatorname{div} \mathbf{v})(\mathbf{X}, t)) dV \\
&= \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\psi}(\mathbf{x}, t) + \psi(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) dv .
\end{aligned} \tag{7}$$

Se ha empleado que la derivada temporal del jacobiano es  $\dot{J} = J \operatorname{div} \mathbf{v}$ .

Esta forma de calcular derivadas de cantidades materiales es válida también, con las modificaciones pertinentes, para derivar cantidades integrales sobre curvas y superficies materiales. La idea, como en el caso desarrollado, consiste siempre en transformar el dominio de integración en un dominio fijo que permita derivar sin problema dentro de la integral. Una vez realizadas estas derivadas, el cambio de variable ha de deshacerse.

### Teorema del transporte de Reynolds

La derivada temporal de una cantidad integral  $I$  definida sobre un volumen material  $\mathcal{P}_t = \varphi_t(\mathcal{P}_o)$  se ha calculado en la expresión (7). Esta cantidad admite una expresión alternativa que es objeto del siguiente teorema:

**Teorema 1:** *Sea  $\psi(\mathbf{x}, t)$  un campo escalar espacial. Para toda región material  $\mathcal{P}_t = \varphi_t(\mathcal{P}_o)$  con contorno  $\partial\mathcal{P}_t$  y normal exterior  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ , la derivada de la integral  $I$  definida en (6) viene dada por*

$$\boxed{\dot{I} = \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \psi(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) da .} \tag{8}$$

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, observamos la relación elemental:

$$\dot{\psi} + \psi \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi \mathbf{v}) . \tag{9}$$

A partir del desarrollo (7) y empleando el teorema de la divergencia se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{I} &= \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\psi}(\mathbf{x}, t) + \psi(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \, dv \\
 &= \int_{\mathcal{P}_t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi \mathbf{v}) \right) \, dv \\
 &= \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\partial \psi}{\partial t} \, dv + \int_{\partial \mathcal{P}_t} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da .
 \end{aligned} \tag{10}$$

■

El teorema de Reynolds indica que el cambio en la integral  $I$  tiene dos componentes: la primera se debe a la variación temporal de la función  $\psi$ , ignorando el cambio del dominio sobre el que se integra. La segunda contribución se debe al flujo saliente de la cantidad  $\psi$  a través de la superficie que delimita el volumen material  $\mathcal{P}_t$ .

### 3. Curvas, superficies y volúmenes de control

Además de los conjuntos tratados en la sección anterior existe otro tipo que también son de utilidad en la Mecánica de Medios Continuos, y en la teoría de campos en general. Bajo el nombre de *conjuntos de control* se hace referencia simplemente a conjuntos fijos en el espacio. Por ejemplo, una superficie de control podría ser un plano fijo en el espacio. A diferencia de las superficies materiales, las superficies de control pueden coincidir con la posición de partículas del medio continuo *que cambian con el tiempo*. Si el medio continuo se está deformando, es obvio que su intersección con una superficie fija (respectivamente, curva o volumen) corresponda a partículas distintas.

Las superficies y volúmenes de control son especialmente útiles en Mecánica de Fluidos, donde la posición en cada instante de las partículas del fluido suele ser irrelevante. En cambio, la interacción (de fuerza, calor, trabajo, etc) con un dominio fijo suele ser de interés. Por ejemplo considérese el flujo de agua a través de una tubería. El volumen de control que puede considerarse es el que queda delimitado por la superficie de la tubería y dos secciones transversales. Este dominio es fijo, y puede ser necesario conocer el comportamiento del agua que lo ocupa en un cierto instante. Un instante posterior, las partículas contenidas en dicha región habrán cambiado, aunque esta siga igual.

#### Flujo a través de una superficie de control

Sea  $\psi$  un campo escalar que indica la concentración en un medio continuo de una cierta cantidad por unidad de volumen. Por ejemplo, la salinidad en un fluido, la cantidad de contaminante en el mismo, etc. Considérese también una superficie de control  $\mathcal{S}$  con normal exterior  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ . Si se desea calcular el flujo de dicha cantidad a través de la superficie de control éste se puede calcular integrando los diferenciales de flujo  $\phi$ :

$$d\phi = \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da . \tag{11}$$

Esta integral es pues

$$\phi = \int_{\mathcal{S}} d\phi = \int_{\mathcal{S}} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da , \quad (12)$$

y sus unidades son las de la cantidad  $\psi$ , por unidad de tiempo.

## 4. Balance de masa

La masa de un medio continuo es una cantidad constante, al menos en los medios que consideramos en este curso. A partir de este postulado podemos obtener relaciones matemáticas que indican cómo se redistribuye la masa en un cuerpo. Existen varias maneras de expresar este postulado, todas ellas equivalentes, y en esta sección se presentan tres de ellas.

Antes de obtener las expresiones matemáticas del principio de conservación de masa definimos el concepto de densidad. Esta cantidad, que denominamos  $\rho$ , es la masa específica de un cuerpo y puede depender del punto y del instante en el que se calcule. Para definirla, se considera una región  $\Omega(\mathbf{x})$  que contiene al punto  $\mathbf{x}$ , de volumen  $v(\mathbf{x})$  y con masa  $m(\Omega(\mathbf{x}), t)$ . Entonces se define

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \lim_{v(\mathbf{x}) \rightarrow 0} \frac{m(\Omega(\mathbf{x}), t)}{v(\mathbf{x})} . \quad (13)$$

A partir de la definición se observa que la densidad  $\rho$  es un campo escalar espacial. A la densidad en el instante  $t = 0$  se la denomina densidad de referencia y se escribe

$$\rho_o = \rho_o(\mathbf{X}) = \rho(\mathbf{X}, 0) . \quad (14)$$

La densidad de referencia es un campo escalar que no depende del tiempo.

### Expresión integral de la conservación de masa

El principio de conservación de masa se puede expresar matemáticamente indicando que la masa de cualquier volumen material del cuerpo continuo es la misma en todo instante:

$$\boxed{\int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) dV = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) dv ,} \quad (15)$$

siendo, como siempre,  $\mathcal{P}_t = \varphi_t(\mathcal{P}_o)$ .

### Expresión diferencial Lagrangiana del principio de conservación de masa

La relación integral (15) expresa de forma muy clara el principio de conservación de masa pero no muy útil a la hora de resolver problemas. La expresión equivalente que ahora deducimos sí que se emplea con más facilidad.

A partir de la fórmula integral (15), y mediante un cambio de variable de la integral del lado derecho se obtiene la relación:

$$\int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) dV = \int_{\mathcal{P}_o} \rho(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \mathbf{J}(\mathbf{X}, t) dV . \quad (16)$$

Puesto que las dos integrales son iguales, y dicha igualdad es válida para cualquier región  $\mathcal{P}_o$ , los integrando han de ser iguales en todo punto, es decir

$$\boxed{\rho_o(\mathbf{X}) = \rho(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \mathbf{J}(\mathbf{X}, t) .} \quad (17)$$

Como todas las cantidades en esta igualdad dependen de las coordenadas materiales del punto (y del tiempo), se dice que es la expresión Lagrangiana de la conservación de masa. A veces, por un cierto abuso de notación, se escribe simplemente  $\rho_o = J\rho$ , aunque ha de quedar claro cuáles son los argumentos de cada uno de los campos involucrados.

### Expresión diferencial Euleriana. Ecuación de continuidad

El principio de conservación de la masa expresa que la masa de una región material cualquiera  $\mathcal{P}_o$  en un medio continuo, calculada mediante (15) es una cantidad fija y por lo tanto su derivada temporal es nula. Si llamamos  $m(\mathcal{P}_o)$  a la masa total de dicha región material, mediante la fórmula (7) se tiene que

$$\dot{m}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) dv . \quad (18)$$

Puesto que esta relación ha de ser válida para cualquier región material, el integrando debe de anularse. Se deduce que la expresión diferencial de la ley de conservación de masa se puede expresar también como:

$$\boxed{\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 .} \quad (19)$$

Los campos que aparecen en esta última expresión depende de las coordenadas espaciales  $\mathbf{x}$  y del tiempo, y por lo tanto es una relación *Euleriana*. Nótese que la derivada temporal de la densidad que aparece en la expresión anterior es la derivada temporal material, es decir, cuando la derivada parcial respecto al tiempo cuando la partícula  $\mathbf{X}$  permanece constante. Mediante las fórmulas estudiadas en el capítulo de cinemática la expresión (19) se puede desarrollar de la siguiente manera:

$$0 = \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{grad} \rho(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) , \quad (20)$$

o de forma más compacta:

$$\boxed{\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0 .} \quad (21)$$

Esta última expresión diferencial se conoce como la ecuación de continuidad.

### Balance de masa en un volumen de control

Sea  $\mathcal{P}$  un volumen *de control* cualquiera, con contorno  $\partial\mathcal{P}$  de normal exterior  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ . El cambio de la masa total de dicho volumen se puede calcular, empleando la ecuación de continuidad y el teorema de la divergencia, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{m}(\mathcal{P}) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dv \\ &= - \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div}(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) dv = - \int_{\partial\mathcal{P}} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) da . \end{aligned} \quad (22)$$

Esta expresión indica que el cambio de la masa contenida en la región de control es debido al flujo saliente de masa.

**Ejercicio 1:** Sea  $\psi(\mathbf{x}, t)$  un campo espacial escalar, vectorial o tensorial y  $\mathcal{P}_t$  una región material de un cuerpo continuo. Demostrar que la siguiente identidad:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\psi}(\mathbf{x}, t) dv . \quad (23)$$

Para demostrar la identidad basta con emplear el mismo proceso que en la sección 2, transformando la integral a un dominio constante:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) dv &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_o} \rho(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \psi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) dV \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) \psi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) dV \\ &= \int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) \dot{\psi}(\varphi(\mathbf{X}, t), t) dV \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\psi}(\mathbf{x}, t) dv \end{aligned} \quad (24)$$

□



## Incompresibilidad

Se dice que una deformación es isocórica cuando el volumen de toda región material permanece constante durante la misma. Para ello es imprescindible que el jacobiano de la deformación  $J = \det \mathbf{F}$ , que expresa el cambio de volumen diferencial, sea constante y de valor unidad. Un cuerpo continuo es incompresible si únicamente admite deformaciones isocóricas.

Otras expresiones equivalentes de la condición de incompresibilidad se pueden obtener a partir de las ecuaciones del balance de masa (17) y (19):

$$\boxed{J(\mathbf{X}, t) = 1 \Leftrightarrow \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_o(\mathbf{X}) \Leftrightarrow \dot{\rho}(\mathbf{x}, t) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0} \quad (25)$$

**Ejemplo 1:** Demostrar que un flujo cuyo campo de velocidad espacial es:

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{3x_2}{x_1^2 + x_2^2} \mathbf{e}_1 - \frac{3x_1}{x_1^2 + x_2^2} \mathbf{e}_2, \quad (26)$$

es incompresible.

Basta con calcular la divergencia del campo de velocidades:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t) = -6x_1x_2 \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 6x_1x_2 \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = 0. \quad (27)$$

□

**Ejemplo 2:** Un sólido sufre una deformación de valor

$$\varphi(\mathbf{X}, t) = e^{-t} X_1 \mathbf{e}_1 + e^{-t} X_2 \mathbf{e}_2 + e^{2t} X_3 \mathbf{e}_3. \quad (28)$$

Demostrar que la deformación es incompresible.

Si se calcula el gradiente de la deformación  $\mathbf{F}$  y su determinante:

$$[\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)] = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}, \quad J(\mathbf{X}, t) = \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = 1, \quad (29)$$

se comprueba que éste último es constante y tiene valor unidad, con lo que se verifica la incompresibilidad de la deformación. □

## 5. Balance de cantidad de movimiento

La segunda ley de Newton, que establece la proporcionalidad entre las fuerzas aplicadas sobre un sistema de partículas y el cambio en su cantidad de movimiento, es válida también en el contexto de los medios continuos. Para este tipo de cuerpos se establecen a continuación las expresiones integrales y diferenciales de esta ley.

En primer lugar definimos el concepto de *cantidad de movimiento*  $\mathbf{L}$  de una región material cualquiera  $\mathcal{P}_t = \varphi_t(\mathcal{P}_o)$  de un cuerpo continuo. Esta cantidad viene dada por la suma (integral) de la cantidad de movimiento de cada una de las partículas que lo conforman, es decir,

$$\mathbf{L}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) dV = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv . \quad (30)$$

En la expresión anterior se presentan la forma Lagrangiana y Euleriana de la cantidad de movimiento de la región  $\mathcal{P}_t$ .

La región  $\mathcal{P}_t$  puede estar sometida a fuerzas exteriores de origen másico o de contacto sobre su contorno  $\partial\mathcal{P}_t$ . Las fuerzas exteriores aplicadas sobre un cuerpo continuo por unidad de masa en la configuración deformada están descritas por el campo vectorial  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ . Las fuerzas sobre el contorno, definidas por unidad de superficie en la configuración deformada, se indicarán como  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ .

Para los desarrollos que siguen definimos el campo de fuerzas por unidad de masa en la configuración de referencia  $\mathbf{B}$  y el campo de fuerzas de superficie por unidad de área en la configuración de referencia  $\mathbf{T}$  mediante las fórmulas:

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}, t) = (\mathbf{b} \circ \varphi)(\mathbf{X}, t) , \quad \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) dA = (\mathbf{t} \circ \varphi)(\mathbf{X}, t) da . \quad (31)$$

La resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la región material  $\mathcal{P}_t$  se puede expresar de las dos maneras siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ext}(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) dV + \int_{\partial\mathcal{P}_o} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) dA \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{X}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) da . \end{aligned} \quad (32)$$

### Expresión integral del balance de cantidad de movimiento

La ley de balance de la cantidad de movimiento establece (no es demostrable) la validez de la segunda ley de Newton en sistemas continuos, es decir, que para toda región material  $\mathcal{P}_t = \varphi_t(\mathcal{P}_o)$

$$\mathbf{F}_{ext}(\mathcal{P}_t) = \dot{\mathbf{L}}(\mathcal{P}_t) . \quad (33)$$

Empleando el resultado (23) y las definiciones (5) y 30, obtenemos la expresión integral del balance de la cantidad de movimiento

$$\boxed{\int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{X}, t) dV = \int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) dV + \int_{\partial\mathcal{P}_o} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) dA ,} \quad (34)$$

en su forma Lagrangiana, siendo  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{X}, t)$ . De forma similar, la forma Euleriana de esta ley de balance es:

$$\boxed{\int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{X}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) da ,} \quad (35)$$

donde la  $\mathbf{a} = \mathbf{A} \circ \boldsymbol{\varphi}_t^{-1} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$  es la aceleración espacial.

### Expresión diferencial Euleriana del balance de cantidad de movimiento

De la misma manera que la ley de conservación de masa, la ley de balance de la cantidad de movimiento se puede formular para volúmenes diferenciales sin más que emplear alguna relación del cálculo integral de tensores. Para obtener la expresión Euleriana diferencial, recordamos del tema 2 que la fuerza por unidad de superficie que se ejerce sobre una parte cualquiera de un medio continuo es

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}) , \quad (36)$$

siendo  $\boldsymbol{\sigma}$  el tensor de tensiones de Cauchy. Empleando esta última expresión y el teorema de la divergencia podemos transformar la integral de superficie de las fuerzas externas sobre  $\mathcal{P}_t$  en una integral de volumen:

$$\int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) da = \int_{\partial\mathcal{P}_t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}) da = \int_{\mathcal{P}_t} \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) dv . \quad (37)$$

Por lo tanto, para cualquier parte material  $\mathcal{P}_t$  del medio continuo, la expresión Euleriana integral del balance de cantidad de movimiento se puede expresar como:

$$\int_{\mathcal{P}_t} (\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) - \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)) dv = 0 . \quad (38)$$

Como esta última expresión se anula para cualquier región material, el integrando ha de ser cero y concluimos

$$\boxed{\text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) .} \quad (39)$$

### Expresión diferencial Lagrangiana del balance de cantidad de movimiento

En numerosas ocasiones, fundamentalmente relacionadas con el tratamiento y formulación de problemas relacionados con cuerpos sólidos, resulta práctico emplear una formulación Lagrangiana de la ley de balance de cantidad de movimiento. Esta formulación, que se presenta a continuación, permite expresar la relación de equilibrio en función de cantidades, tensoriales y vectoriales, que dependen de las coordenadas materiales  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_o$  y que tienen una interpretación “geométrica” relacionada con la configuración de referencia del sólido.

El primer objeto que se define es el llamado “primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff” y se representa con la letra  $\mathbf{P}$ . Este es un tensor de segundo orden, no necesariamente simétrico, y definido como

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}, t) = J(\mathbf{X}, t) (\boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\varphi}_t)(\mathbf{X}, t) \mathbf{F}^{-T}(\mathbf{X}, t) . \quad (40)$$

El origen de este tensor es el siguiente. La fuerza que se aplica sobre un diferencial del contorno de un cuerpo desde el exterior es  $\mathbf{t} da$ . La relación que existe entre elementos de

área en la configuración de referencia y la configuración deformada es  $\mathbf{n} da = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N} dA$ , siendo  $\mathbf{N}$  el vector normal al contorno del cuerpo en su configuración de referencia, y  $dA$  su superficie. Por lo tanto, tenemos que

$$\mathbf{t} da = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} da = \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N} dA = \mathbf{P}\mathbf{N} dA = \mathbf{T} dA . \quad (41)$$

Para obtener la expresión diferencial Lagrangiana del balance de cantidad de movimiento transformamos las integrales que aparecen en

$$\int_{\partial\mathcal{P}_o} \mathbf{T} dA = \int_{\partial\mathcal{P}_o} \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)\mathbf{N}(\mathbf{X}) dA = \int_{\mathcal{P}_o} \text{DIV } \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) dV . \quad (42)$$

$$\int_{\mathcal{P}_o} (\rho_o(\mathbf{X})\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) - \text{DIV } \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) - \rho_o(\mathbf{X})\mathbf{B}(\mathbf{X}, t)) dV = 0 . \quad (43)$$

Puesto que la integral se anula para cualquier región material, el integrando ha de anularse también y se puede concluir

$$\boxed{\text{DIV } \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) + \rho_o(\mathbf{X})\mathbf{B}(\mathbf{X}, t) = \rho_o(\mathbf{X})\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)} \quad (44)$$

Las expresiones del balance de cantidad de movimiento se vieron, en una versión simplificada, en el capítulo sobre análisis de tensiones. La única diferencia es que en la sección actual hemos incluido el efecto de las fuerzas de inercia obteniendo la expresión más general posible del balance de fuerzas.

## 6. Balance de momento cinético

La ley de balance del momento cinético, propuesta por Euler, expresa que en un sistema mecánico el momento de las fuerzas externas es igual al cambio del momento cinético del mismo. En esta sección estudiamos las consecuencias de aplicar este principio a la dinámica de los medios continuos.

En primer lugar escribimos el momento cinético de un medio continuo como la suma (integral) del momento cinético de cada diferencial de volumen que lo forma. De esta manera, para cualquier región material  $\mathcal{P}_t = \varphi(\mathcal{P}_o)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \wedge \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) \varphi(\mathbf{X}, t) \wedge \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) dV . \end{aligned} \quad (45)$$

El momento de las fuerzas exteriores sobre la región  $\mathcal{P}_t$ , que llamaremos  $\mathbf{M}_{ext}$ , también se puede expresar de forma euleriana o lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ext}(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \wedge \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \wedge \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) da \\ &= \int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}, t) \varphi(\mathbf{X}, t) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) dV + \int_{\partial\mathcal{P}_o} \varphi(\mathbf{X}, t) \wedge \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) dA . \end{aligned} \quad (46)$$

**Ejercicio 2:** Demostrar que las expresiones lagrangianas y eulerianas del momento cinético y del momento de las fuerzas exteriores son equivalentes.  $\square$

### Expresión integral del balance de la cantidad de movimiento

La ley del balance de la cantidad de movimiento establece, como se indicó anteriormente, que la tasa de variación del momento cinético es igual al momento de las fuerzas exteriores aplicadas. Empleando la notación definida, esta ley se escribe de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{J}}(\mathcal{P}_t) = \mathbf{M}_{ext}(\mathcal{P}_t) . \quad (47)$$

El término de la derivada temporal  $\dot{\mathbf{J}}$  se puede desarrollar utilizando la expresión (45) y la propiedad (23)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{J}}(\mathcal{P}_t) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \wedge \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{d}{dt} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) (\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)) dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{x} \wedge \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)) dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \wedge \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dv . \end{aligned} \quad (48)$$

Por tanto, la expresión integral euleriana del balance del momento cinético queda:

$$\int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \wedge \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \wedge \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{x} \wedge \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) da . \quad (49)$$

La expresión integral lagrangiana del balance de momento cinético se obtiene fácilmente a partir de la última expresión y resulta:

$$\int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) \varphi(\mathbf{X}, t) \wedge \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) dV = \int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) \varphi(\mathbf{X}, t) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) dV + \int_{\partial \mathcal{P}_o} \varphi(\mathbf{X}, t) \wedge \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) dA . \quad (50)$$

**Ejercicio 3:** Demostrar que las expresiones (49) y (50) son equivalentes.  $\square$

## Expresión diferencial del balance de momento cinético

Al igual que en el caso de las dos leyes de balance estudiadas anteriormente, la expresión integral del balance de momento cinético es fácil de obtener pero de utilidad limitada para la resolución de problemas. A continuación buscamos una expresión diferencial de (49) que, como veremos, es mucho más compacta, y de gran utilidad.

La consecuencia final del balance de momento cinético es la simetría del tensor de tensiones de Cauchy. Este resultado ya había sido obtenido en el capítulo de análisis de tensiones y ahora su validez quedará patente incluso en el caso de situaciones dinámicas.

Para poder encontrar la expresión diferencial de (49) se necesita demostrar dos resultados preliminares. Por simplicidad, en estas demostraciones ignoramos la dependencia de los campos vectoriales y tensoriales sobre las variables  $(\mathbf{x}, t)$ . El primero es:

$$\int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \wedge \mathbf{t} \, da = \int_{\mathcal{P}_t} (\epsilon_{ijk} \sigma_{kl} \mathbf{e}_j + \mathbf{x} \wedge \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \, dv . \quad (51)$$

Para demostrar este resultado se emplea el tensor hemisimétrico  $\widehat{\mathbf{x}}$ , definido por la relación  $\widehat{\mathbf{x}}\mathbf{a} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{a}$ , para cualquier vector  $\mathbf{a}$ . La integral en el lado izquierdo de (51) se puede transformar mediante el teorema de la divergencia de la siguiente manera:

$$\int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \wedge \mathbf{t} \, da = \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \wedge (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) \, da = \int_{\partial\mathcal{P}_t} \widehat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{P}_t} \operatorname{div} (\widehat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\sigma}) \, dv . \quad (52)$$

Los términos dentro de la integral de volumen se operan, empleando notación indicial, como sigue:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\widehat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\sigma}) &= \operatorname{div} (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l) \\ &= \epsilon_{ijk} (x_{j,l} \sigma_{kl} + x_j \sigma_{kl,l}) \mathbf{e}_i \\ &= \epsilon_{ijk} (\delta_{jl} \sigma_{kl} + x_j \sigma_{kl,l}) \mathbf{e}_i \\ &= \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} + \mathbf{x} \wedge \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} . \end{aligned} \quad (53)$$

Sustituyendo esta última identidad en la integral (52) se demuestra el primer resultado.

El segundo resultado afirma que la identidad  $\epsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0$  es cierta si y sólo si el tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  es simétrico. Para verificarla basta con fijar el valor del índice  $i$ , por ejemplo  $i = 1$ . Entonces, desarrollando la suma en los índices repetidos se obtiene

$$0 = \epsilon_{1jk} \sigma_{kj} = \epsilon_{123} \sigma_{32} + \epsilon_{132} \sigma_{23} = \sigma_{32} - \sigma_{23} , \quad (54)$$

lo cual implica que  $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ . Repitiendo el mismo argumento con  $i = 2, 3$  se obtiene que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

Finalmente obtenemos la expresión diferencial del balance de momento cinético. La expresión euleriana de esta ley, descrita por la ecuación (49) se puede reescribir como:

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \wedge (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)) \, dv = \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \wedge \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \, da . \quad (55)$$

El lado de la izquierda se puede transformar empleando la ley del balance de cantidad de

movimiento:

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \wedge (\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)) dv = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \wedge \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) dv . \quad (56)$$

El lado de la derecha de (56) se puede transformar utilizando el resultado (51). Igualando estas dos ecuaciones transformadas se obtiene

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \wedge \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{P}_t} (\epsilon_{ijk}\sigma_{kl}\mathbf{e}_j + \mathbf{x} \wedge \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) dv . \quad (57)$$

Puesto que esta última expresión se cumple para cualquier región material  $\mathcal{P}_t$ , se debe verificar que  $\epsilon_{ijk}\sigma_{kl} = 0$ , y por lo tanto concluimos

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}, t)} . \quad (58)$$

Esta relación obtenida es la expresión euleriana diferencial de la ley de balance del momento cinético. Es inmediato comprobar que a partir de esta expresión y de la definición del tensor de Piola-Kirchhoff, la expresión lagrangiana diferencial de este mismo principio ha de ser:

$$\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)\mathbf{F}^T(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)^T} . \quad (59)$$

**Ejercicio 4:** Demostrar (59). □

## 7. Balance de energía

En este apartado se tratan por primera vez en el curso aspectos de los medios continuos que no son puramente mecánicos. Se abordan, en particular, cuestiones relacionadas con la transformación de la energía mediante procesos mecánicos y térmicos, y su relación con el primer principio de la termodinámica.

Recordamos, en primer lugar, el concepto de potencia, definido de forma genérica como el trabajo realizado por unidad de tiempo. Sus unidades en el sistema internacional son los watios ( $W = Pa/s$ ). En el contexto de los medios continuos consideramos  $\mathcal{P}_t$  una región material cualquiera. Se define la *potencia mecánica*  $P_{ext}$  que se realiza sobre ella como el trabajo por unidad de tiempo que efectúan las fuerzas exteriores, es decir,

$$P_{ext}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) da . \quad (60)$$

### El teorema de las fuerzas vivas

Cuando se aplica un trabajo exterior a un cuerpo continuo, éste se transforma en otras formas de energía. Sin entrar en los detalles sobre las posibles transformaciones termodinámicas, que ya se verán más adelante, se puede realizar un sencillo balance energético simplemente a partir de la ecuación del balance de cantidad de movimiento. En primer lugar definimos la *energía cinética*  $K$  de una región material cualquiera  $\mathcal{P}_t$  a partir de la energía de cada una de sus partes diferenciales:

$$K(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \frac{1}{2} \rho(\mathbf{x}, t) |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|^2 dv, \quad (61)$$

y también definimos un tipo de potencia llamado “potencia tensional” y que tiene la expresión

$$P_{ten}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) dv, \quad (62)$$

siendo  $\mathbf{d} = \text{sim}[\text{grad } \mathbf{v}]$ , la tasa de deformación.

**Teorema 2:** *La potencia exterior que se aplica sobre un volumen material cualquiera  $\mathcal{P}_t$  de un cuerpo continuo se invierte en incrementar su energía cinética y en potencia tensional, es decir,*

$$P_{ext}(\mathcal{P}_t) = \dot{K}(\mathcal{P}_t) + P_{ten}(\mathcal{P}_t). \quad (63)$$

DEMOSTRACIÓN: En esta demostración no aparecen, por simplificar, los argumentos de todas los campos que se utilizan. Para probar el teorema empleamos la siguiente identidad tensorial, que resulta del teorema de la divergencia y del balance de la cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da &= \int_{\partial \mathcal{P}_t} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} da \\ &= \int_{\partial \mathcal{P}_t} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \text{div}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}) dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} (\text{div } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{grad } \mathbf{v}) dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} ((\rho \mathbf{a} - \rho \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d}) dv. \end{aligned} \quad (64)$$

Utilizando esta identidad en la definición de la potencia externa se obtiene:

$$P_{ext}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} (\rho \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d}) dv = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 dv + P_{ten}(\mathcal{P}_t) = \dot{K}(\mathcal{P}_t) + P_{ten}(\mathcal{P}_t). \quad (65)$$

■



### Observaciones 3:

- i. El teorema de las fuerzas vivas no es un resultado termodinámico sino puramente mecánico. De forma simplificada considera que la energía aportada a un cuerpo continuo o bien se transforma en incrementar/disminuir la energía de su movimiento global (la energía cinética) o bien se transforma “en otra cosa”, la potencia tensional. Los efectos termodinámicos aparecen cuando se intenta comprender con más detalle el contenido de la potencia tensional.
- ii. En un cuerpo rígido, la tasa de deformación  $\mathbf{d}$  es nula con lo cual toda la potencia exterior aplicada ha de transformarse en cambiar su energía cinética.  $\square$

### Expresión Lagrangiana del teorema de las fuerzas vivas

Como en todos los desarrollos anteriores, el teorema de las fuerzas vivas se puede expresar, de forma completamente equivalente, empleando campos Lagrangianos. Para ello, basta con reformular los diversos tipos de energía y potencia que se han definido anteriormente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P_{ext}(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) dV + \int_{\partial\mathcal{P}_o} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) dA , \\ K(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_o} \frac{1}{2} \rho_o(\mathbf{X}, t) |\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)|^2 dV , \\ P_{ten}(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_o} \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \cdot \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) dV . \end{aligned} \tag{66}$$

La equivalencia de las tres formas de potencia se con sus respectivas expresiones Eulerianas se deja como ejercicio.

**Ejercicio 5:** Demostrar que la potencia tensional también se puede expresar de la siguiente manera:

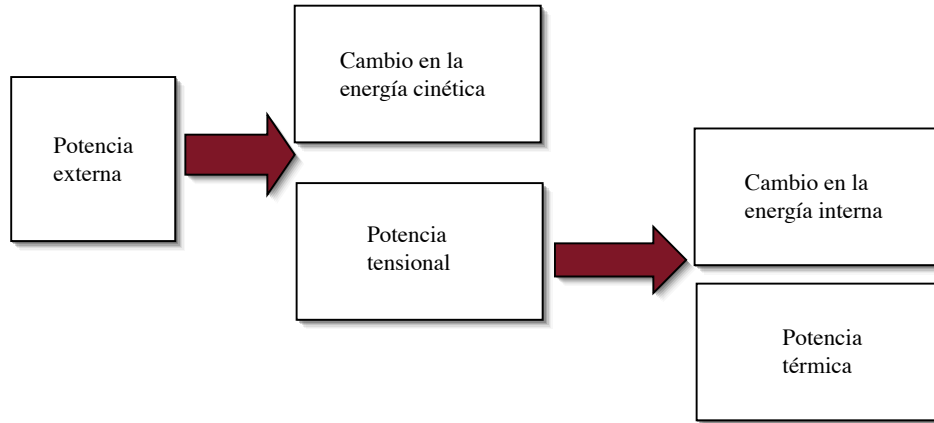
$$P_{ten}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_o} \mathbf{S}(\mathbf{X}, t) \cdot \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X}, t) dV , \tag{67}$$

siendo  $\mathbf{S}$  el segundo tensor de Piola-Kirchhoff y  $\mathbf{E}$  el tensor de deformación de Green-Lagrange.

Para demostrar la identidad basta con notar que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} \cdot \text{sim}[\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}] = \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}} . \tag{68}$$

$\square$



**Figura 2:** Esquema de la transformación de la energía. La flecha de la izquierda es resultado del teorema de las fuerzas vivas. La flecha de la derecha es debida al primer principio de la termodinámica.

### El primer principio de la termodinámica

El primer principio de la termodinámica postula que la energía no se crea ni se destruye, sino que únicamente se transforma. En esta sección estudiamos las posibles transformaciones entre energía mecánica y térmica de los cuerpos continuos.

Antes de estudiar sus posibles transformaciones energéticas definimos la *potencia térmica* o *calorífica* suministrada a una región  $\mathcal{P}_t$  material de un cuerpo continuo como la cantidad:

$$P_{cal}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} h(\mathbf{x}, t) da . \quad (69)$$

En esta expresión,  $r$  es la tasa de calor suministrado o generado por unidad de masa y tiempo en el medio continuo. Este calor puede tener origen químico, radioactivo, etc. De forma similar,  $h$  es la tasa de calor que entra por unidad de área y tiempo, a través de su contorno, en la región material. El vector “flujo de calor”, por unidad de área y tiempo es  $\mathbf{q}$  de forma que

$$h(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) . \quad (70)$$

Usando este último vector, la potencia térmica se puede expresar de forma equivalente como:

$$\begin{aligned} P_{cal}(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) dv - \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) da \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} (\rho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) - \text{div } \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)) dv . \end{aligned} \quad (71)$$

El primer principio de la termodinámica, enunciado cualitativamente anteriormente, se puede expresar ahora de forma más precisa. Para cualquier región material  $\mathcal{P}_t$ , existe una función  $E$  llamada *energía*, que depende únicamente del estado de dicha región, tal que su variación en el tiempo es igual a la suma de la potencia exterior y calorífica suministradas a

dicha región. De forma matemática:

$$\dot{E}(\mathcal{P}_t) = P_{ext}(\mathcal{P}_t) + P_{cal}(\mathcal{P}_t) . \quad (72)$$

El primer principio de la termodinámica también postula la existencia de una cantidad intensiva y de estado, la *energía interna*  $U$  definida a partir de la integral

$$U(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t) dv , \quad (73)$$

tal que la energía total de una región material  $\mathcal{P}_t$  se pueda expresar como la suma de la energía interna y la cinética:

$$E(\mathcal{P}_t) = K(\mathcal{P}_t) + U(\mathcal{P}_t) . \quad (74)$$

Utilizando el teorema de las fuerzas vivas (63) y la expresión (72), la ecuación anterior se puede escribir también de la siguiente manera:

$$\dot{E}(\mathcal{P}_t) = \dot{K}(\mathcal{P}_t) + \dot{U}(\mathcal{P}_t) = \dot{K}(\mathcal{P}_t) + P_{ten}(\mathcal{P}_t) + P_{cal}(\mathcal{P}_t) , \quad (75)$$

y simplificando,

$$\dot{U}(\mathcal{P}_t) = P_{ten}(\mathcal{P}_t) + P_{cal}(\mathcal{P}_t) . \quad (76)$$

Esta última expresión indica que el cambio en energía interna de una región en un cuerpo continuo se debe a la potencia tensional aplicada sobre él y a la potencia térmica suministrada. También se puede entender, por tanto, que la potencia tensional que se aplica a un cuerpo se puede transformar en incrementar la energía interna del mismo o convertirse en energía térmica, que sale del mismo (por ello el signo negativo):

$$P_{ten}(\mathcal{P}_t) = \dot{U}(\mathcal{P}_t) - P_{cal}(\mathcal{P}_t) . \quad (77)$$

La expresión (76) se puede expresar integralmente como:

$$\int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \dot{u}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{P}_t} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) - \text{div } \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)] dv . \quad (78)$$

Como dicha expresión ha de cumplirse para cualquier región  $\mathcal{P}_t$ , también ha de verificarse a nivel diferencial, es decir,

$$\rho(\mathbf{x}, t) \dot{u}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) - \text{div } \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \quad (79)$$

que no es sino la expresión Euleriana del primer principio de termodinámica en medios continuos.

## 8. La segunda ley de la termodinámica

El primer principio de la termodinámica enunciado en la sección anterior explica el balance energético en procesos de cuerpos continuos que incluyen efectos térmicos y dinámicos. Sin embargo este principio no proporciona información alguna sobre la posibilidad de que un determinado proceso ocurra o no. Este dato lo proporciona el segundo principio de la termodinámica.

El segundo principio de la termodinámica postula lo siguiente:

1. Existe una función de estado intensiva  $\theta$ , llamada la temperatura absoluta, cuyo valor es siempre positivo y es únicamente función de la “temperatura empírica”, esto es, la que podemos medir con un termómetro, en una escala cualquiera.
2. Existe otra función de estado, llamada entropía y designada con el símbolo  $S$  con las siguientes propiedades
  - i. Es una función extensiva, es decir, que la entropía  $S$  de una región material  $\mathcal{P}_t = \mathcal{P}_t^1 \cup \mathcal{P}_t^2$ , con  $\mathcal{P}_t^1 \cap \mathcal{P}_t^2 = \emptyset$  es la suma de la entropía de sus partes  $\mathcal{P}_t^1$  y  $\mathcal{P}_t^2$ . A partir de la entropía total se puede definir una entropía específica  $s$ , es decir, por unidad de masa, con lo que se tiene

$$S(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) s(\mathbf{x}, t) dv . \quad (80)$$

- ii. Se define la entropía generada en la región  $\mathcal{P}_t$  por unidad de tiempo como

$$\Gamma(\mathcal{P}_t) = \dot{S}(\mathcal{P}_t) - \int_{\mathcal{P}_t} \rho \frac{r}{\theta} dv + \int_{\partial \mathcal{P}_t} \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da . \quad (81)$$

En todo proceso físico se cumple que la producción de entropía es no negativo, es decir,

$$\Gamma(\mathcal{P}_t) \geq 0 . \quad (82)$$

Cuando en un proceso la producción de entropía es nula, el proceso es reversible. Cuando es positiva, el proceso es irreversible. Un proceso con disminución de entropía no se puede dar.

La desigualdad (82) se llama la desigualdad de Clausius-Duhem y es la forma de la segunda ley de la termodinámica que más se emplea en Mecánica de Medios Continuos. Sin embargo, hay que indicar que no hay unanimidad en este tema y algunos autores no aceptan su validez.

Para establecer una expresión diferencial del segundo principio de la termodinámica transformamos la integral (81) empleando el teorema de la divergencia:

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho \dot{s} dv - \int_{\mathcal{P}_t} \rho \frac{r}{\theta} dv + \int_{\mathcal{P}_t} \operatorname{div} \left[ \frac{\mathbf{q}}{\theta} \right] dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \left[ \rho \dot{s} - \rho \frac{r}{\theta} + \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \right] dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \left[ \rho \dot{s} - \rho \frac{r}{\theta} + \frac{1}{\theta} \operatorname{div} \mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \theta \right] dv . \end{aligned} \quad (83)$$

Para continuar definimos dos tipos de fuentes de entropía. El primero es la producción local de entropía específica  $\gamma_{loc}$  y definida como:

$$\gamma_{loc} = \dot{s} - \frac{r}{\theta} + \frac{\mathbf{q}}{\rho\theta} . \quad (84)$$

La segunda es la producción de entropía específica por conducción térmica  $\gamma_{con}$ :

$$\gamma_{con} = -\frac{1}{\rho\theta^2} \mathbf{q} \cdot \text{grad } \theta . \quad (85)$$

Empleando estas dos definiciones el segundo principio de la termodinámica se pueda expresar como:

$$\Gamma(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \gamma(\mathbf{x}, t) dv \geq 0 , \quad (86)$$

siendo  $\gamma = \gamma_{loc} + \gamma_{con}$  la producción específica de entropía. Como la expresión (86) es válida para cualquier región material  $\mathcal{P}_t$ , su integrando ha de ser no negativo. Por lo tanto, la expresión diferencial euleriana de la desigualdad de Clausius-Duhem obtenida es:

$$\gamma(\mathbf{x}, t) \geq 0 . \quad (87)$$

Existe una formulación alternativa del segundo principio de la termodinámica, conocida como la desigualdad de Clausius-Plank, que establece que tanto  $\gamma_{loc}$  como  $\gamma_{con}$  han de ser no negativas:

$$\gamma_{loc}(\mathbf{x}, t) \geq 0 , \quad \gamma_{con}(\mathbf{x}, t) \geq 0 . \quad (88)$$

Evidentemente, la desigualdad de Clausius-Plank implica la desigualdad de Clausius-Duhem.

Un corolario de la desigualdad de Clausius-Plank es el siguiente. Como la entropía específica producida por conducción ha de ser no negativa se tiene que

$$\gamma_{con} = -\frac{1}{\rho\theta^2} \mathbf{q} \cdot \text{grad } \theta \geq 0 . \quad (89)$$

Puesto que la densidad y la temperatura absoluta son cantidades estrictamente positivas de la anterior ecuación se deduce que

$$-\mathbf{q} \cdot \text{grad } \theta \geq 0 , \quad (90)$$

es decir, que el flujo de calor *siempre ha de ser en la dirección opuesta al gradiente de temperatura*. En particular, si se acepta la ley de Fourier que establece  $\mathbf{q} = -\kappa \text{grad } \theta$ , entonces se deduce que la conductividad  $\kappa$  ha de ser positiva.