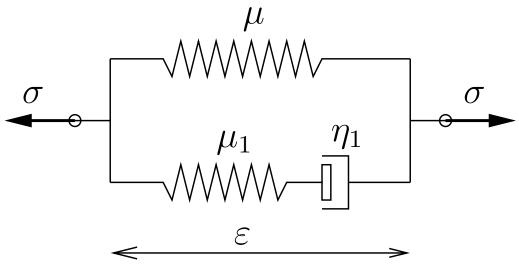
Ingeniería Geológica

MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS

Ejercicio de Viscoelasticidad — Curso 2009-10

José M.ª Goicolea, 5 de mayo de 2010

Se considera un material viscoelástico cuyo comportamiento uniaxial queda definido por un sólido lineal estándar, según el esquema adjunto. La ecuación diferencial que define el comportamiento unidimensional es

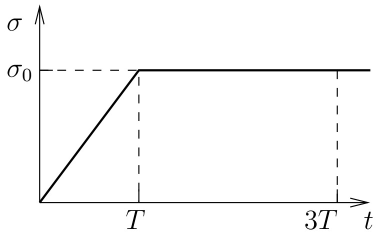


$$\mu(\varepsilon + \tau_\sigma \dot{\varepsilon}) = \sigma + \tau_\varepsilon \dot{\sigma}\,,$$

siendo $\tau_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \eta_1/\mu_1$ y $\tau_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \eta_1(1/\mu + 1/\mu_1)$. Los módulos elásticos instantáneos y a tiempo infinito son respectivamente $\mu_0 = \mu + \mu_1$ y $\mu_\infty = \mu$, pudiéndose expresar $\tau_\sigma = \tau_\varepsilon \mu_0/\mu_\infty$. Las funciones de fluencia y relajación son respectivamente

$$J(t) = \frac{1}{\mu_\infty} + \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_\infty}\right) \mathrm{e}^{-t/\tau_\sigma}\,;$$
$$G(t) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty)\mathrm{e}^{-t/\tau_\varepsilon}\,.$$

Se aplica gradualmente una tensión unidimensional que, partiendo de $\sigma = 0$, mediante una rampa lineal alcanza el valor $\sigma = \sigma_0$ para $t = T$, manteniéndose a partir de entonces constante. Los valores σ_0 y T se supondrán conocidos.



La respuesta $\varepsilon(t)$ del material se puede caracterizar mediante la integral de convolución

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma(0) + \int_0^t J(t-\xi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\sigma(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{1}$$

Se pide, empleando esta integral, calcular la historia de deformaciones $\varepsilon(t)$ entre 0 y $3T$. Comparar estas deformaciones con la respuesta instantánea que se obtendría para un material elástico con módulo μ_0. Para los cálculos se considerará $\tau_\sigma = T$, $\mu_0 = 2\mu_\infty$.

⋆

Para simplificar la escritura denominaremos $\mu^* = (\mu + \mu_1)\mu/\mu_1$ de forma que $1/\mu^* = 1/\mu_\infty - 1/\mu_0$. Para resolver el ejercicio simplemente debemos resolver la integral de convolución (1). Debemos tener en cuenta los dos tramos de tiempo:

1. $0 \le t \le T$, donde vale $\sigma' = \mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\xi = \sigma_0/T$. Calculando la integral,

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \int_0^t \frac{\sigma_0}{T}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu^*}\mathrm{e}^{-(t-\xi)/\tau_\sigma}\right)\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{\sigma_0}{T}\left[\frac{1}{\mu}\xi - \frac{1}{\mu^*}\tau_\sigma \mathrm{e}^{-(t-\xi)/\tau_\sigma}\right]_0^t \\ &= \sigma_0\left[\frac{1}{\mu}\frac{t}{T} - \frac{1}{\mu^*}\frac{\tau_\sigma}{T}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_\sigma})\right] \end{aligned} \tag{2}$$

2. $t > T$, en cuyo caso vale $\sigma' = \sigma_0/T$ para $0 \leq \xi \leq T$ y $\sigma' = 0$ para $T < \xi$. La integral se divide en dos tramos,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(t) &= \int_0^T J(t-\xi)\sigma' \, \mathrm{d}\xi + \cancelto{0}{\int_T^t J(t-\xi)\sigma' \, \mathrm{d}\xi} \\
&= \int_0^T \frac{\sigma_0}{T} \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu^*} \mathrm{e}^{-(t-\xi)/\tau_\sigma} \right) \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{\sigma_0}{T} \left[\frac{1}{\mu}\xi - \frac{1}{\mu^*} \tau_\sigma \mathrm{e}^{-(t-\xi)/\tau_\sigma} \right]_0^T \\
&= \sigma_0 \left[\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu^*} \frac{\tau_\sigma}{T} (\mathrm{e}^{-(t-T)/\tau_\sigma} - \mathrm{e}^{-t/\tau_\sigma}) \right]
\end{aligned}
\tag{3}
$$

La gráfica de la deformación obtenida es la siguiente: