Mecánica de Medios Continuos

EXAMEN PARCIAL (12 de junio de 2008)

Apellidos *Nombre* *N.º*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Se considera una pieza cilíndrica de bronce insertada en una oquedad, en la cual tiene un huelgo en dirección longitudinal de la milésima parte de la altura y en dirección transversal de dos milésimas partes del diámetro. Las propiedades elásticas del material son $E = 100$ GPa, $\nu = 1/3$, y el coeficiente de dilatación térmica $\alpha = 10^{-5}\,^{\circ}\mathrm{C}^{-1}$. Se calienta la pieza de forma que se produce un incremento de temperatura homogéneo.

1. Calcular el incremento de temperatura mínimo para que al expandirse la pieza llegue a cerrar el hueco transversal. (3 puntos)
2. Suponiendo que el incremento de temperatura es de 150 °C, calcular las tensiones y las deformaciones en la pieza (todas las componentes). (5 puntos)
3. Si el material responde al criterio de plasticidad de von Mises, con tensión de fluencia $\sigma_y = 200$ MPa, comprobar si en el caso anterior se alcanza la plasticidad. (2 puntos)

NOTA: El criterio de von Mises puede expresarse como $F_0(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma'_{pq}\sigma'_{pq}} - \sigma_y = 0$

⋆

1.— Denominamos 1 la dirección longitudinal y $2, 3$ las direcciones transversales del cilindro. Por la simetría existente no se producen deformaciones ni tensiones tangenciales, estas direcciones son principales. Asimismo, en las dos direcciones transversales las tensiones y deformaciones serán siempre iguales entre sí.

Al expandirse la pieza, debido a que la holgura longitudinal es menor, contactará primero en esta dirección. En este momento será $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 10^{-3}$ y todas las tensiones nulas. Al continuar calentándose se desarrolla una compresión σ_{11} en dirección longitudinal y la deformación correspondiente ε_{11} se mantiene constante, mientras que las deformaciones transversales crecen hasta agotar la holgura transversal. En este preciso momento las deformaciones transversales valdrán $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 2 \cdot 10^{-3}$, siendo la tensión nula ($\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$).

Emplearemos las ecuaciones de la termoelasticidad en la forma

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{pp}\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} + \alpha\Delta\theta\delta_{ij}\,. \tag{1}$$

Aplicando las ecuaciones para las direcciones longitudinal y transversal,

$$\varepsilon_{11} = 10^{-3} = -\frac{\nu}{E}2\cancelto{0}{\sigma_{22}} + \frac{1}{E}\sigma_{11} + \alpha\Delta\theta\,, \tag{2}$$

$$\varepsilon_{22} = 2 \cdot 10^{-3} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \cancelto{0}{\sigma_{22}}) + \frac{1}{E}\cancelto{0}{\sigma_{22}} + \alpha\Delta\theta\,. \tag{3}$$

Sustituyendo los valores de las constantes elásticas en estas dos ecuaciones se resuelven los valores de las dos incógnitas σ_{11} y $\Delta\theta$:

$$\sigma_{11} = -75\,\mathrm{MPa}\,, \quad \Delta\theta = 175^{\circ}\mathrm{C}\,. \tag{4}$$

2.— Al ser el incremento de temperatura menor que el calculado en el apartado anterior sabemos que la tensión transversal será nula y las deformaciones correspondientes menores que la holgura $2 \cdot 10^{-3}$. Aplicamos de nuevo la ecuación (2) en dirección longitudinal, con el valor dado $\Delta\theta = 150$, resulta

$$10^{-3} = \frac{1}{E}\sigma_{11} + \alpha\Delta\theta \quad \Rightarrow \quad \sigma_{11} = -50\,\mathrm{MPa}\,. \tag{5}$$

En la dirección transversal es

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \alpha\Delta\theta = \frac{4}{3}10^{-3}\,. \tag{6}$$

Las componentes completas de tensiones y deformaciones son

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} -50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{MPa}\,, \quad [\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}\,. \tag{7}$$

3.— Al tratarse de una tensión uniaxial, la tensión de von Mises es igual al valor de la misma, como se comprueba fácilmente:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [\boldsymbol{\sigma}'] = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{\mathrm{mis}} = \sqrt{\frac{2}{3}\left(\left(\frac{2\sigma}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{\sigma}{3}\right)^2\right)} = \sigma\,,$$

por lo cual en este caso es

$$\sigma_{\mathrm{mis}} = 50\,\mathrm{MPa} < \sigma_y = 200\,\mathrm{MPa}\,,$$

es decir, el material no alcanza el límite plástico.