Mecánica de Medios Continuos

EXAMEN PARCIAL (26 de enero de 2008)

Apellidos *Nombre* *N.º*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Se considera un cuerpo elástico bidimensional, en tensión plana. En un punto dado se sabe que la tensión normal sobre un plano horizontal es de compresión y magnitud 300 kPa. Por otra parte, la máxima tensión normal de compresión se produce sobre un plano que forma 30° ($\curvearrowleft$) con el anterior y su magnitud es 400 kPa. Las constantes elásticas son $E = 100$ MPa, $\nu = 1/3$. Se pide:

1. Matriz completa de componentes del tensor de tensiones. Tensiones principales y sus direcciones.
2. Matriz de componentes del tensor de deformaciones. Deformaciones principales y sus direcciones.
3. Energía elástica de deformación total y energía elástica que corresponde a la deformación volumétrica.

$\star$

1.— Al tratarse de tensión plana, las únicas componentes de tensión no nulas son tres: $\sigma_{xx}, \sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{yy}$. El dato de la tensión normal sobre el plano horizontal define una de ellas, $\sigma_{yy} = -300$. La afirmación de que en el plano a 30° se produce la máxima tensión indica que esta tensión es principal, la denominaremos σ_2. En definitiva, este dato define otras dos condiciones, la tensión normal en el plano indicado ($\sigma_2 = -400$) y la tensión tangencial que será nula al ser dirección principal. Teniendo en cuenta el vector normal a la dirección indicada $\{\boldsymbol{n}\} = (-1/2, \sqrt{3}/2)^{\mathrm{T}}$, escribimos las ecuaciones que corresponden a estas condiciones:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \sigma_2 \boldsymbol{n} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & -300 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} = -400 \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} ; \tag{1}$$

desarrollando las dos componentes del vector tensión,

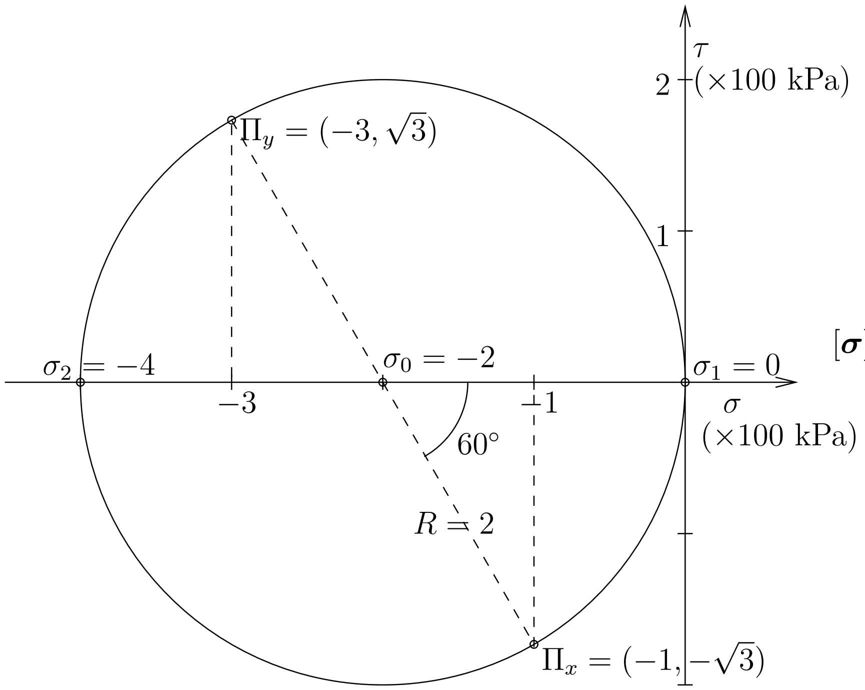
$$\left.\begin{aligned} -\sigma_{xx} + \sqrt{3}\sigma_{xy} &= 400 \\ -\sigma_{xy} - 300\sqrt{3} &= -400\sqrt{3} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{xx} = -100, \ \sigma_{xy} = 100\sqrt{3}\,. \tag{2}$$

Por tanto, la matriz de componentes de tensiones es

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 100\,\mathrm{kPa}\,. \tag{3}$$

Las tensiones y direcciones principales las podemos obtener mediante el círculo de Mohr, detallado en el dibujo que se muestra abajo. (Igualmente podríamos obtenerlas mediante la ecuación característica de autovalores.) En este dibujo y en los cálculos geométricos que siguen para simplificar tomamos como unidad 100 kPa. Para dibujar el círculo consideramos los puntos (σ, τ) correspondientes a los dos planos de las direcciones cartesianas: $\Pi_x = (\sigma_{xx}, -\sigma_{xy}) = (-1, -\sqrt{3})$, $\Pi_y = (\sigma_{yy}, \sigma_{xy}) = (-3, \sqrt{3})$. El centro del círculo es por tanto $\sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) =$

-2, y el radio $R = \sqrt{1+3} = 2$. Por tanto las tensiones principales valen $\sigma_1 = \sigma_0 + R = 0, \sigma_2 = \sigma_0 - R = -4$. La dirección de σ_1 está a $30^\circ \curvearrowleft$ desde el eje horizontal x, y la de σ_2 el mismo ángulo desde el eje y. (El valor de σ_2 y su dirección ya lo conocíamos por el enunciado, este resultado nos sirve como comprobación.) Obviamente, la tercera tensión principal será en la dirección normal al plano, $\sigma_3 = \sigma_{zz} = 0$. (Al obtenerse dos tensiones principales iguales, se trata de un tensor cilíndrico y de hecho cualquier dirección perperndicular a la de σ_2 será también principal.)



$$[\boldsymbol{\sigma}]_{\text{prin}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 100\,\text{kPa}$$

2.— Las deformaciones las obtenemos mediante las ecuaciones de la elasticidad: en forma indicial, $\varepsilon_{ij} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{pp}\delta_{ij}$. Desarrollando componentes:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = 0 \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{zz} + \sigma_{xx}) = -\frac{8}{3} \cdot 10^{-3} \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 10^{-3} \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}\sigma_{zz} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{4}{3} \cdot 10^{-3} \\
\varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{yz} = 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow [\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}\,. \tag{4}$$

Las deformaciones principales se producen según las mismas direcciones que las tensiones principales. Sus valores los calculamos mediante las ecuaciones de la elasticidad en las componentes principales:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{4}{3} \cdot 10^{-3} \\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}(\sigma_3 + \sigma_1) = -4 \cdot 10^{-3} \\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\sigma_3 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{4}{3} \cdot 10^{-3}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow [\boldsymbol{\varepsilon}]_{\text{prin}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}\,. \tag{5}$$

3.— La expresión de la energía elástica por unidad de volumen es

$$W = \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_v^2 + \frac{1}{2}2\mu\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\varepsilon}\,. \tag{6}$$

Desarrollando las componentes de esta expresión,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{3}{4}E\,; \quad 2\mu = \frac{E}{(1+\nu)} = \frac{3}{4}E\,; \tag{7}$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{pp} = -\frac{4}{3}\cdot 10^{-3}\,; \quad \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{:}\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{pq}\varepsilon_{pq} = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = \frac{176}{9}\cdot 10^{-6}\,. \tag{8}$$

El valor de la energía elástica resulta

$$W = 800\,\mathrm{J/m^3}\,. \tag{9}$$

La energía elástica de deformación volumétrica es

$$W_v = \frac{1}{2}K\varepsilon_v^2\,, \tag{10}$$

siendo $K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = E$. Resulta finalmente

$$W_v = \frac{800}{9}\,\mathrm{J/m^3}\,. \tag{11}$$