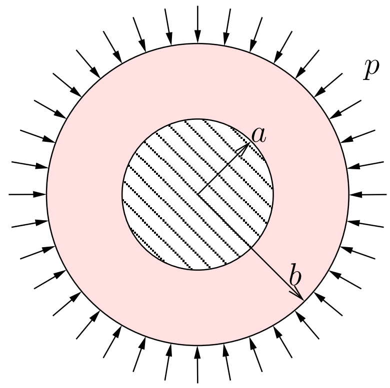
Mecánica de Medios Continuos

EXAMEN PARCIAL (14 de junio de 2007)

Apellidos *Nombre* *N.º*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Problema 3. Sea un tubo cilíndrico grueso de longitud L, radio interior a y radio exterior b, con deformación impedida en sus dos extremos $\pm L/2$. En la superficie interior $r = a$ la deformación se halla totalmente impedida, mientras que en la superficie $r = b$ se aplica una presión exterior p. Para una sección suficientemente alejada de los extremos, se desea obtener:



1. Presión ejercida en la superficie interior $r = a$ para restringir completamente el desplazamiento en la misma.

2. Desplazamientos en la superficie exterior $r = b$.

3. Distribución de tensiones en la pared del tubo. (considerar para ello los valores numéricos $a = 0{,}1$ m, $b = 0{,}2$ m, $p = 1$ MPa, $E = 1$ GPa, $\nu = 1/3$).

Nota: Considerar que el campo de desplazamientos es $u_r = Br + C/r$, siendo B y C constantes. Asimismo, las componentes de la deformación en polares son $\varepsilon_{rr} = u_{r,r}$ y $\varepsilon_{\theta\theta} = u_r/r$.

⋆

1.— Dadas las restricciones a la deformación en los extremos se trata de un problema en deformación plana, $\varepsilon_{zz} = 0$. Para obtener las constantes (B, C) del campo de desplazamientos bastará aplicar las dos condiciones de contorno en el plano: desplazamiento radial impedido ($u_r = 0$) en $r = a$, y la presión exterior $\sigma_{rr} = -p$ en $r = b$.

El desplazamiento impedido en $r = a$ conduce a

$$u_r|_{r=a} = Ba + \frac{C}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -Ba^2 \,. \tag{1}$$

Para evaluar la condición de presión en $r = b$ aplicamos la ecuación de elasticidad en dirección radial,

$$\sigma_{rr} = \lambda\varepsilon_v + 2\mu\varepsilon_{rr} \,, \tag{2}$$

siendo

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r} = B - \frac{C}{r^2} \,, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} = B + \frac{C}{r^2} \,, \quad \varepsilon_v = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} = 2B \,. \tag{3}$$

Sustituyendo los valores de (3) y (1) en (2), aplicada en $r = b$, se llega a

$$-p = 2B\left[\lambda + \mu(1 + a^2/b^2)\right] \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{p}{2}\frac{1}{\lambda + \mu(1 + a^2/b^2)\,.} \tag{4}$$

Con este resultado podemos sustituir en la expresión de la tensión (2) para obtener la expresión genérica de la tensión radial,

$$\sigma_{rr} = 2B\lambda + 2B\mu(1 + a^2/r^2) = -p\frac{\lambda + \mu(1 + a^2/r^2)}{\lambda + \mu(1 + a^2/b^2)} \,. \tag{5}$$

Particularizando esta expresión en $r = b$ se obtiene la presión ejercida en la superficie interior:

$$\boxed{p_a = -\left.\sigma_{rr}\right|_{r=a} = p\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu(1 + a^2/b^2)}\,.} \tag{6}$$

2.— La expresión del campo de desplazamientos radiales, teniendo en cuenta los valores de las constantes C y B obtenidas en las ecuaciones (1) y (4) respectivamente, es

$$u_r = -\frac{p/2}{\lambda + \mu(1 + a^2/b^2)} r(1 - a^2/r^2)\,. \tag{7}$$

Particularizando para $r = b$ se obtiene

$$\boxed{u_b = \left.u_r\right|_{r=b} = -\frac{p/2}{\lambda + \mu(1 + a^2/b^2)} b(1 - a^2/b^2)\,.} \tag{8}$$

3.— Las tensiones radiales se han obtenido ya en (5). Las tensiones circunferenciales vienen dadas por

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda\varepsilon_v + 2\mu\varepsilon_{\theta\theta}\,, \tag{9}$$

y teniendo en cuenta la expresión de $\varepsilon_{\theta\theta}$ en (3) y los valores de las constantes B y C,

$$\boxed{\sigma_{\theta\theta}(r) = -p\frac{\lambda + \mu(1 - a^2/r^2)}{\lambda + \mu(1 + a^2/b^2)}\,.} \tag{10}$$

Sustituyendo los valores numéricos del enunciado resulta $\lambda = 3E/4$, $\mu = 3E/8$, y operando

$$\boxed{p_a = \frac{16}{13}p = 1{,}2308\,\mathrm{MPa}\,; \quad u_b = -\frac{0{,}8}{13}10^{-3}\,\mathrm{mm} = -0{,}061538 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mm}\,.} \tag{11}$$