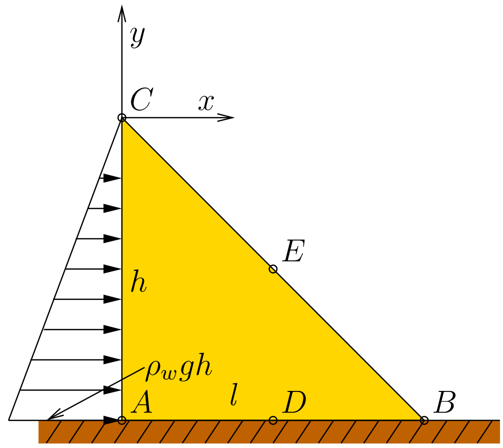
PROBLEMAS TEMA 4: ELASTICIDAD (APLICACIONES) Curso 2006-07



Problema 1.— Se desea estudiar la distribución de tensiones en una presa de gravedad de hormigón, con forma de prisma triangular de gran longitud, altura h y base ℓ. Sobre el paramento vertical AC actúa la presión hidrostática del agua, que se supondrá llega hasta la misma coronación de la presa. El comportamiento de la presa se puede considerar como deformación plana y elástico lineal, con módulos (E, ν).

El estado de tensiones puede caracterizarse mediante una función de tensiones $\phi(x, y)$ de la siguiente manera:

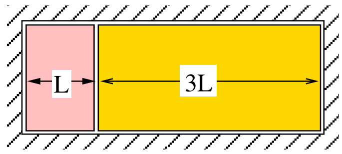
$$\phi(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3\,;$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + V\,, \sigma_{yy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + V\,, \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y}\,,$$

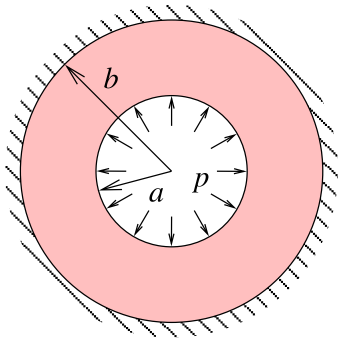
donde (a, b, c, d) son coeficientes a determinar y V es el potencial de las fuerzas másicas aplicadas (por unidad de volumen). Se pide:

1. Comprobar que las tensiones definidas a partir de la función ϕ dada cumplen efectivamente las ecuaciones de equilibrio en el medio continuo.
2. Determinar mediante las condiciones de contorno y las ecuaciones de equilibrio del conjunto los coeficientes (a, b, c, d), y la distribución de tensiones en la presa. Para ello se podrán emplear las siguientes condiciones:
   a) Equilibrio de fuerzas horizontales: la resultante de la acción sobre el paramento vertical AC debe ser equilibrada por la resultante del cortante en la base de la presa;
   b) Equilibrio de fuerzas verticales: el peso de la presa debe ser equilibrado por la resultante de la tensión vertical en la base;
   c) La componente de tensión σ_{xx} en el punto más bajo A del paramento vertical debe igualar a la presión hidrostática aplicada;
   d) Condición de tensiones normales nulas en el punto inferior B del paramento inclinado, que está libre de acciones en este plano.
3. Obtener y dibujar las gráficas de tensiones en los paramentos vertical AC, horizontal AB e inclinado BC (componentes normales en dirección normal y paralela y tangencial a cada paramento en los tres casos).
4. Calcular las deformaciones en los puntos D y E de la figura (ambos situados en los puntos medios de los lados respectivos). Tomar para ello los valores numéricos $E = 30\,\text{GPa}, \nu = 0{,}25$, $\rho_c = 2500\,\text{kg/m}^3$ (hormigón), $\rho_w = 1000\,\text{kg/m}^3$ (agua), $h = \ell = 50\,\text{m}$.
5. Calcular el valor mínimo que debe tomar la relación ℓ/h para que no aparezcan tracciones en ningún punto de la base AB de la presa.

Problema 2.— En una oquedad cilíndrica de longitud axial $4L$ y radio R perfectamente rígida se hallan insertados dos cilindros macizos elásticos de radio R. El primero tiene longitud L, Módulo de Young $E_1 = E_0$, de Poisson $\nu_1 = 0{,}25$ y coeficiente de dilatación $\alpha_1 = 0{,}8\alpha_0$, y el segundo $3L$, $E_2 = 1{,}5E_0$, $\nu_2 = 0{,}35$ y $\alpha_2 = \alpha_0$. Inicialmente entre los cilindros y la oquedad no hay ninguna holgura. Se produce un aumento de temperatura de ambos cilindros $\Delta\theta$. Calcular las tensiones que se producen en los cilindros.



Problema 3.— Sea un tubo cilíndrico grueso de longitud L, de radio interior a y radio exterior b, con deformación impedida en sus dos extremos $\pm L/2$. En la superficie exterior $r = b$ la deformación se halla totalmente impedida, mientras que en la superficie $r = a$ se aplica una presión interior p. Para una sección suficientemente alejada de los extremos, se desea obtener:



1. Presión ejercida en la superficie exterior $r = b$ para restringir completamente el desplazamiento en la misma.
2. Desplazamientos u_r en la superficie interior $r = a$.
3. Distribución de tensiones en la pared del tubo, tanto de forma analítica como de forma gráfica. (considerar para ello los valores numéricos $a = 0{,}1\,\text{m}$, $b = 0{,}2\,\text{m}$, $p = 1\,\text{MPa}$, $E = 1\,\text{GPa}$, $\nu = 1/3$.