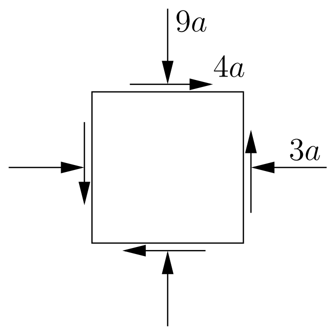
Mecánica de Medios Continuos

EXAMEN FINAL (5 de diciembre de 2006)

Apellidos *Nombre* *N.º*

Ejercicio 3.º (puntuación: 20/45) Tiempo: 90 min.

Parte I (10 ptos.).— Se considera un material elástico lineal e isótropo sometido a deformación plana, con las tensiones esquematizadas en la figura adjunta. Las constantes elásticas son $E = 2000a$, $\nu = 1/3$. Se pide:



1. Expresar las componentes del tensor de tensiones. Obtener la tensión hidrostática y las componentes de la tensión desviadora.
2. Calcular las tensiones principales y sus direcciones. Para estas direcciones calcular de nuevo la tensión hidrostática y desviadora.
3. Calcular las deformaciones principales y sus direcciones.

Parte II (10 ptos.).—

1. Suponiendo que el material obedece un criterio de plasticidad de Mohr-Coulomb, definido por una cohesión $c = 100$ kPa y ángulo de rozamiento $\phi = 30°$, calcular el valor de a para el que se alcanzará la condición plástica.
2. Suponiendo que el material se ve sometido a un estado de compresión uniaxial a_1 (en deformación plana), obtener este valor para que se alcance la plasticidad.
3. Misma cuestión si el material se ve sometido a un estado de corte puro, de valor a_2 e igualmente en deformación plana.

Nota: Criterio de Mohr-Coulomb: $F_0(\boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3)\operatorname{sen}\phi - 2c\cos\phi = 0$.

⋆

Parte I

I.1.— Las componentes de tensiones definidas la figura del enunciado son $\sigma_{11} = -3a$, $\sigma_{22} = -9a$, $\sigma_{12} = 4a$. Conocemos todas las componentes salvo la tensión σ_{33} perpendicular al plano de la figura. Esta se calcula mediante las ecuaciones de la elasticidad y la condición de deformación plana:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}; \qquad \varepsilon_{33} = 0 \ \Rightarrow \ \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\,. \tag{1}$$

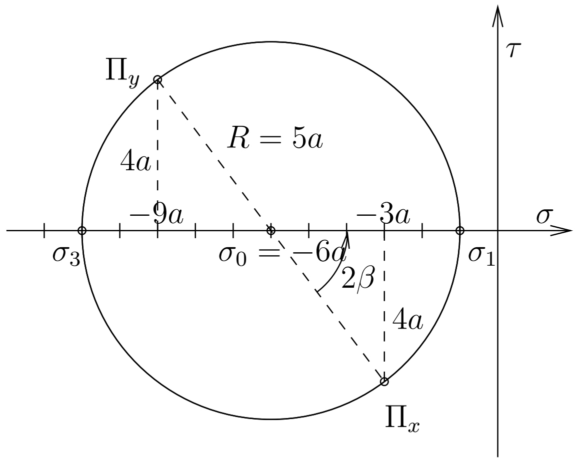
Con los datos del problema resulta $\sigma_{33} = (1/3)(-3a - 9a) = -4a$ y por tanto

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} -3a & 4a & 0 \\ 4a & -9a & 0 \\ 0 & 0 & -4a \end{pmatrix}. \tag{2}$$

La tensión hidrostática es $\sigma_m = \frac{1}{3}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = -(16/3)a$. La tensión desviadora es

$$[\boldsymbol{\sigma}'] = [\boldsymbol{\sigma}] - \sigma_m[\mathbf{1}] = \begin{pmatrix} \frac{7}{3}a & 4a & 0 \\ 4a & -\frac{11}{3}a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}a \end{pmatrix} . \qquad (3)$$

I.2.— La forma más sencilla de calcular las tensiones principales es a través del círculo de Mohr. Las componentes de Mohr para el plano Π_x (normal al eje $1 \equiv x$) son $(\sigma, \tau) = (-3a, -4a)$, y las de Π_y son $(-9a, 4a)$. Por tanto se deduce inmediatamente que el centro se halla en $\sigma_0 = -6a$, el radio es $R = 5a$, y las tensiones principales dentro del plano son $\sigma_1 = -a$ y $\sigma_3 = -11a$. La tensión perpendicular al plano es principal y de valor intermedio entre las dos anteriores, $\sigma_2 = -4a$. El ángulo que hay que girar los planos coordenados para obtener las direcciones principales es la mitad del indicado en el círculo de Mohr, es decir $\operatorname{sen} 2\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{4}{5}$, en sentido antihorario desde x para obtener la dirección principal de σ_1.



Alternativamente podríamos haber calculado las tensiones principales a través del polinomio característico del problema de autovalores:

$$0 = \det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda\mathbf{1}) = \begin{vmatrix} -3a-\lambda & 4a & 0 \\ 4a & -9a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -4a-\lambda \end{vmatrix} = -(4a+\lambda)\left[(3a+\lambda)(9a+\lambda) - 16a^2\right] , \qquad (4)$$

cuyas soluciones son

$$\lambda = -4a; \quad \lambda^2 + 12a\lambda + 11a^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -a\,; \\ \lambda = -11a\,. \end{cases} \qquad (5)$$

Estos valores coinciden con los obtenidos antes por el círculo de Mohr. Para obtener las direcciones se calcularían los vectores propios asociados a cada autovalor.

La tensión hidrostática en las direcciones principales sigue valiendo $-(16/3)a$ (es un invariante), mientras que la desviadora en estos ejes vale

$$[\boldsymbol{\sigma}'] = [\boldsymbol{\sigma}] - \sigma_m[\mathbf{1}] = \begin{pmatrix} \sigma_1' & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3' & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3}a & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{17}{3}a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}a \end{pmatrix} . \qquad (6)$$

(Téngase en cuenta que se ha mantenido la componente fuera del plano en el tercer índice de la matriz a pesar de que la llamáramos σ_2.)

I.3.— Emplearemos el resultado conocido de que las direcciones de las deformaciones principales coinciden con las de tensiones principales en la elasticidad isótropa. Por tanto la forma más fácil de obtenerlas es emplear las ecuaciones de la elasticidad en estas componentes principales:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}(\sigma_2+\sigma_3) = \frac{4a}{E} = 2\cdot 10^{-3}\,,\\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}(\sigma_3+\sigma_1) = 0\,,\\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\sigma_3 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2) = -\frac{28a}{3E} = -\frac{14}{3}\cdot 10^{-3}\,.
\end{aligned} \tag{7}$$

La deformación volumétrica vale $\varepsilon_v = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = -\frac{8}{3}\cdot 10^{-3}$. Coincide con lo que podríamos haber calculado a través del módulo volumétrico, $K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = E = 2\cdot 10^3 a$,

$$\varepsilon_v = \frac{1}{K}\sigma_m = -\frac{1}{2\cdot 10^3 a}\frac{16}{3}a = -\frac{8}{3}\cdot 10^{-3}\,. \tag{8}$$

Parte II

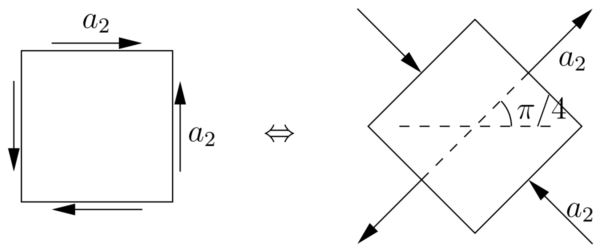
II.1.— Basta sustituir en la expresión del criterio de Mohr Coulomb los valores calculados antes de tensiones principales ($\sigma_1 = -a, \sigma_2 = -4a, \sigma_3 = -11a$), resultando:

$$a = \frac{c\cos\phi}{5-6\,\mathrm{sen}\,\phi} = 25\sqrt{3} = 43{,}30\,\mathrm{kPa}\,. \tag{9}$$

II.2.— En este caso las tensiones principales dentro del plano son $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -a_1/3$, $\sigma_3 = -a_1$. De la expresión del criterio de plasticidad resulta:

$$a_1 = \frac{2c\cos\phi}{1-\mathrm{sen}\,\phi} = 200\sqrt{3} = 346{,}41\,\mathrm{kPa}\,. \tag{10}$$

II.3.— El estado de corte puro a_2 en el plano es equivalente a unas tensiones principales $\pm a_2$ giradas $\pi/4$:



La tensión normal al plano es nula:

$$\sigma_{33} = \nu(a_2 - a_2) = 0\,,$$

por lo que las tensiones principales valen ($\sigma_1 = a_2, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -a_2$). Aplicando la expresión del criterio de fluencia resulta

$$a_2 = c\cos\phi = 50\sqrt{3} = 86{,}60\,\mathrm{kPa}\,.$$