Mecánica de Medios Continuos

EXAMEN PARCIAL (31 de enero de 2006)

Apellidos *Nombre* *N.º*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

En un punto de un suelo que podemos considerar como un sólido elástico lineal se conoce la deformación volumétrica $\varepsilon_v = -2 \cdot 10^{-3}$, la deformación tangencial $\varepsilon_{xy} = -\sqrt{3} \cdot 10^{-3}$ y la deformación horizontal que es nula $\varepsilon_{xx} = 0$. El suelo está sometido a un estado de deformación plana en el plano xy. Se pide:

1. Componentes cartesianas del tensor de deformaciones. Obtener las deformaciones principales y la orientación de las mismas, definiendo el ángulo que forman con los ejes (x, y, z).
2. Suponiendo que las constantes elásticas son $E = 50$ MPa, $\nu = 1/4$, obtener las componentes del tensor de tensiones. Obtener asimismo las direcciones en las que las tensiones normales y tangenciales son máximas o mínimas y sus valores.
3. Obtener la densidad de energía elástica de deformación por unidad de volumen

⋆

1.— Denominando $x \equiv 1, y \equiv 2, z \equiv 3$ y considerando que el cuerpo está bajo deformación plana, los datos del problema indican

$$\varepsilon_v = -2 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_{12} = -\sqrt{3} \cdot 10^{-3}, \varepsilon_{11} = 0, \varepsilon_{i3} = 0.$$

Se deduce inmediatamente que

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{22} = -2 \cdot 10^{-3},$$

por lo que la matriz de componentes de deformaciones es

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} . \tag{1}$$

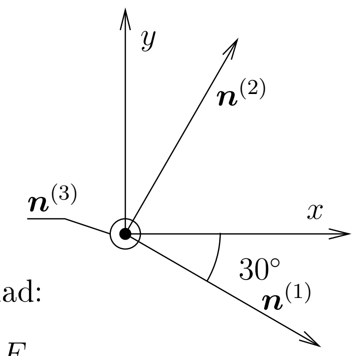
Las deformaciones principales se pueden obtener mediante la ecuación característica, que desarrollamos únicamente en las direcciones (x_1, x_2) dentro del plano:

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \begin{cases} +1 & (\varepsilon_1) \\ -3 & (\varepsilon_2) \end{cases}$$

La otra deformación principal corresponde a la dirección normal al plano y vale $\varepsilon_3 = 0$. La dirección de la deformación principal ε_1 se obtiene como núcleo de la matriz característica asociada

$$\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -2-1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^{(1)} \\ n_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \{\boldsymbol{n}^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} n_1^{(1)} \\ n_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{Bmatrix} . \tag{2}$$

Esta dirección forma un ángulo $\pi/6$ con el eje x en sentido horario. La otra dirección principal en el plano es normal a la anterior en sentido dextrógiro,



$$\{\boldsymbol{n}^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} n_1^{(2)} \\ n_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{Bmatrix} . \qquad (3)$$

2.— Obtenemos las tensiones aplicando las ecuaciones de la elasticidad:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_v \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad \text{con } \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 20\,\text{MPa}\,, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = 20\,\text{MPa}\,. \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 20 \cdot (-2) + 40 \cdot 0 = -40\,\text{kPa}, \\ \sigma_{22} &= 20 \cdot (-2) + 40 \cdot (-2) = -120\,\text{kPa}, \\ \sigma_{12} &= 40 \cdot (-\sqrt{3}) = -40\sqrt{3}\,\text{kPa}, \\ \sigma_{33} &= 20 \cdot (-2) + 40 \cdot 0 = -40\,\text{kPa}. \end{aligned} \qquad (5)$$

La matriz de componentes es

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} -40 & -40\sqrt{3} & 0 \\ -40\sqrt{3} & -120 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{pmatrix} \text{kPa}\,. \qquad (6)$$

Las tensiones máximas son precisamente las principales, que al coincidir sus direcciones con las de las deformaciones principales, podemos obtenerlas mediante las ecuaciones de la elasticidad en estas direcciones:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 20 \cdot (-2) + 40 \cdot 1 = 0, \\ \sigma_2 &= 20 \cdot (-2) + 40 \cdot (-3) = -160\,\text{kPa}, \\ \sigma_3 &= 20 \cdot (-2) + 40 \cdot 0 = -40\,\text{kPa}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Por otra parte, la tensión tangencial máxima se produce según la dirección bisectriz de las direcciones de las tensiones máxima (σ_1) y mínima (σ_2) y vale

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3| = 80\,\text{kPa}\,. \qquad (8)$$

3.— La energía elástica se puede obtener mediante la expresión

$$W = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\sigma_{pq}\varepsilon_{pq} = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3) = 240\,\text{J/m}^3\,. \qquad (9)$$

Las componentes volumétrica y desviadora son

$$W_{\text{vol}} = \frac{1}{2}\sigma_m\varepsilon_v = \frac{200}{3}\,\text{J/m}^3\,, \quad W_{\text{des}} = W - W_{\text{vol}} = \frac{520}{3}\,\text{J/m}^3\,. \qquad (10)$$