

Mecánica de Medios Continuos

EXAMEN FINAL (15 de septiembre de 2005)

Apellidos

Nombre

N.º

--	--

Ejercicio 3.º (puntuación 15/45)

Tiempo: 75 min.

Un sólido deformable de densidad ρ se mueve con una deformación $\varphi = \varphi(X_1, X_2, t)$ ocupando una región \mathcal{B} en el espacio. A medida que transcurre el tiempo, el material del cuerpo se va quemando de forma que la masa total M del mismo va disminuyendo a una velocidad:

$$\dot{M} = \int_{\mathcal{B}} q(\mathbf{x}, t) dv ,$$

siendo $q(\mathbf{x}, t)$ una función escalar de valor negativo.

i) Se pide demostrar que la ley de balance de masa en este cuerpo es:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = q ,$$

donde $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ es la velocidad espacial del cuerpo.

ii) Demostrar también que la ley del balance de la cantidad de movimiento no es la habitual, sino que debido a la combustión mencionada ésta es:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}} + q \mathbf{v} ,$$

siendo \mathbf{b} las fuerzas másicas sobre el cuerpo y $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones de Cauchy.

iii) Una vez que la combustión ha terminado, se sabe que el movimiento del cuerpo viene dado por la deformación:

$$\varphi(\mathbf{X}, t) = X_1 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 , \quad \tau \text{ constante .}$$

y que el campo de tensiones es homogéneo de valor $\boldsymbol{\sigma} = s \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$. Si la distribución de temperatura en el cuerpo es homogénea (y por lo tanto no hay flujo de calor en el mismo) y toda la potencia generada por la deformación se transforma en calor, ¿qué potencia calorífica se disipa por unidad de volumen y tiempo en el cuerpo?

(Nota: el primer principio de la termodinámica establece la relación $\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} + \rho r - \operatorname{div} \mathbf{q}$, siendo u la energía interna, \mathbf{d} la tasa de deformación $\mathbf{d} = \operatorname{grad}^s \mathbf{v}$, r la potencia calorífica aportada por unidad de masa y \mathbf{q} el vector flujo de calor por unidad de tiempo.