ENUNCIADO DEL EJEMPLO 24

Este ejecicio consta de una varilla unida por un extremo al eje ox y por el otro a un disco perpendicular a ella en todo momento. La varilla gira alredor del eje x, el disco gira a su vez con la varilla y puede girar alrededor del eje de la varilla. Obtener las ecuaciones del movimiento.

```
> restart;
```

Cargamos los paquetes de Maple que vamos a emplear, entre ellos el Mecapac3d, para lo cuál es necesario indicar antes la dirección en la que se encuentra dentro del disco duro.

```
> with(linalg):with(plots):with(plottools):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined
```

```
> libname:="C:\",libname:
```

```
> with(mecapac3d):
```

El sistema formado por la varilla y el disco tiene tres grados de libertad, que identificaremos con las coordenadas generalizadas [x, theta, phi], que representan, respectivamente, la coordenada x en la que se encuentra el extremo de la varilla (y el resto de ella también), el ángulo girado por la varilla alrededor del eje x (partiendo de la vertical descendente y en sentido antihorario) y el ángulo girado por el disco alrededor de la dirección de la varilla. Definimos por tanto dichos grados de libertad.

```
> cg:=[x,theta,phi]:
```

Pasamos a continuación a definir los elementos del sistema, comenzando por la varilla, con la posición de su centro de masas y la matriz de rotación entre sus ejes propios y los ejes fijos, que es únicamente la que representa un giro alrededor del eje X de valor theta.

```
> v1:=[varilla,[x,(l/2)*sin(theta),-(l/2)*cos(theta)],rota(theta,1),mv,l]:
```

Definimos ahora el disco, calculando primero su matriz de rotación. Dado que el giro propio se indica de forma relativa a los ejes del disco, se realiza multiplicando por la derecha las matrices de rotación.

```
> r1:=rota(theta,1):r2:=rota(phi,3):
```

```
> rotp:=evalm(r1&*r2):
```

```
> d1:=[disco,[x,l*sin(theta),-l*cos(theta)],rotp,md,r]:
```

Definimos también unos elementos gráficos para representar los ejes.

```
> ejeY:=[vector,[0,0,0],[0,5,0],green]:
```

```
> ejeX:=[vector,[0,0,0],[8,0,0],red]:
```

```
> ejeZ:=[vector,[0,0,0],[0,0,5],blue]:
```

```
> TO := [texto,[0,0,-1],"O"]:
```

```
> TY := [texto,[0,6,1],"Y"]:
```

```
> TZ := [texto,[0,0,6],"Z"]:
```

```
> TX := [texto,[8,0,1],"X"]:
```

```
> radio:=[segmento,[x,l*sin(theta),-l*cos(theta)],[x+r*cos(phi),l*sin(theta)+r*sin(phi)*cos(theta),-l*cos(theta)+r*sin(phi)*sin(theta)],red]:
```

```
> sistema:=[v1,d1,ejeX,ejeY,ejeZ,TO,TY,TX,TZ,radio]:
```

Calculamos ahora la Lagrangiana del sistema, calculando previamente la energía potencial y la cinética.

```
> V:=fV(sistema):
```

```
> T:=simplify(fT(sistema)):
```

```
> L:=simplify(T-V);
```

$$L := \frac{1}{2}\,mv\,x1^2 + \frac{1}{6}\,\theta1^2\,mv\,l^2 + \frac{1}{2}\,md\,x1^2 + \frac{1}{2}\,md\,l^2\,\theta1^2 + \frac{1}{8}\,\theta1^2\,md\,r^2 + \frac{1}{4}\,\phi1^2\,md\,r^2 + \frac{1}{2}\,mv\,g\,l\cos(\theta) + md\,g\,l\cos(\theta)$$

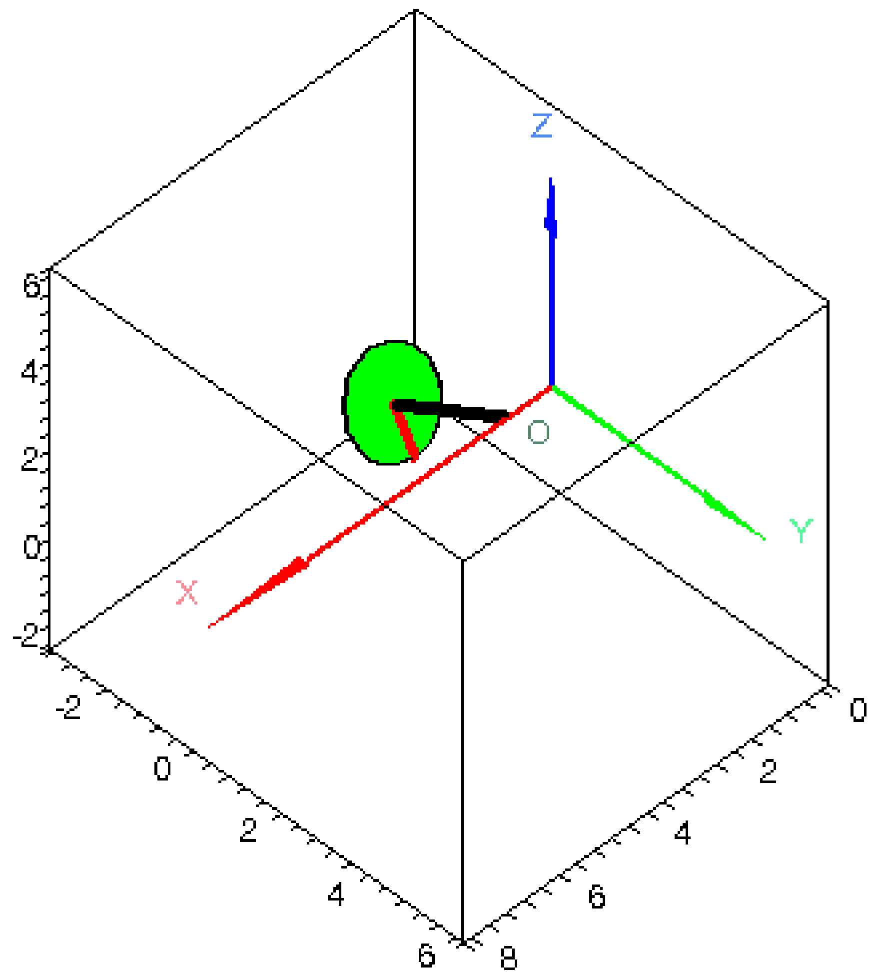
Obtenemos ahora las tres ecuaciones del movimiento.

```
> ecua:=map(simplify,ec_lag());
```

$$ecua := \left[\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right)(md+mv),\ \frac{1}{3}\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)mv\,l^2 + md\,l^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)md\,r^2 + \frac{1}{2}\,mv\,g\,l\sin(\theta(t)) + md\,g\,l\sin(\theta(t)),\ \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dt^2}\phi(t)\right)md\,r^2\right]$$

Damos ahora unos valores a los parámetros que antes dejamos como constantes sin valor para poder obtener una representación del sistema para unos valores determinados de las coordenadas generalizadas, y para poder llevar a cabo la integración numérica.

```
> mv:=1:md:=2:l:=3:r:=1:g:=9.8:
> fG([1,evalf(5*Pi/3),evalf(Pi/2)]);
```

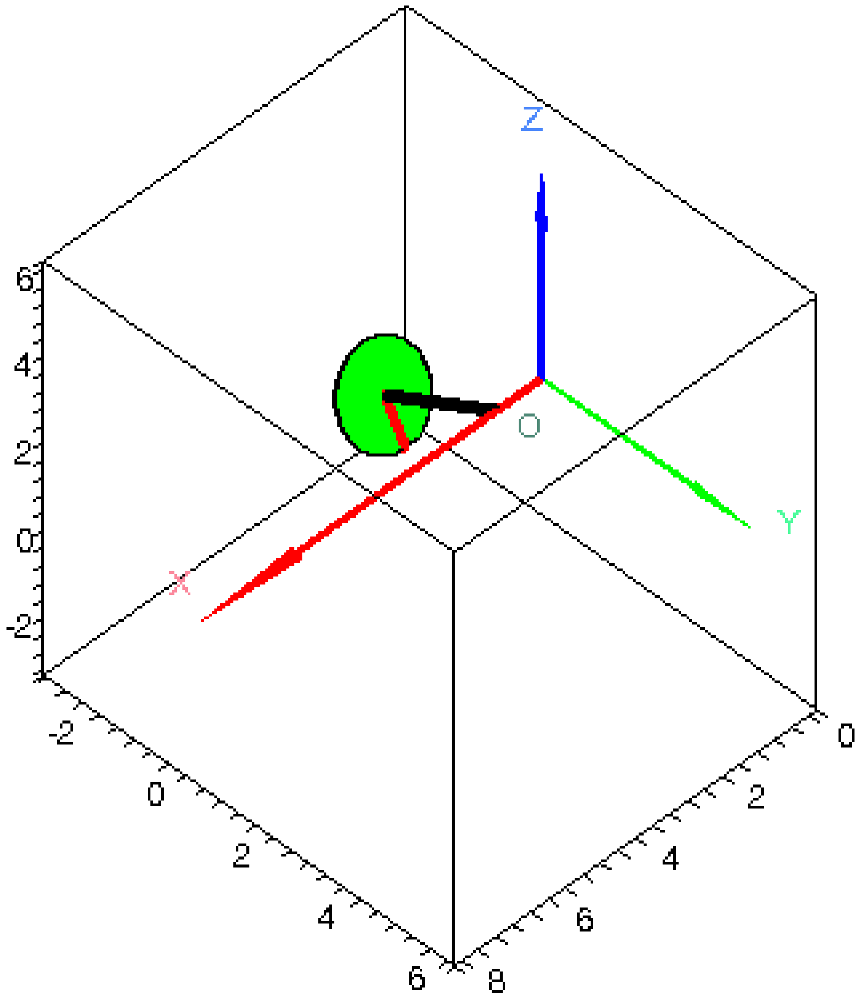


Realizamos ahora la integración numérica, para lo cual es necesario indicar los valores de las coordenadas generalizadas y sus velocidades en el instante inicial.

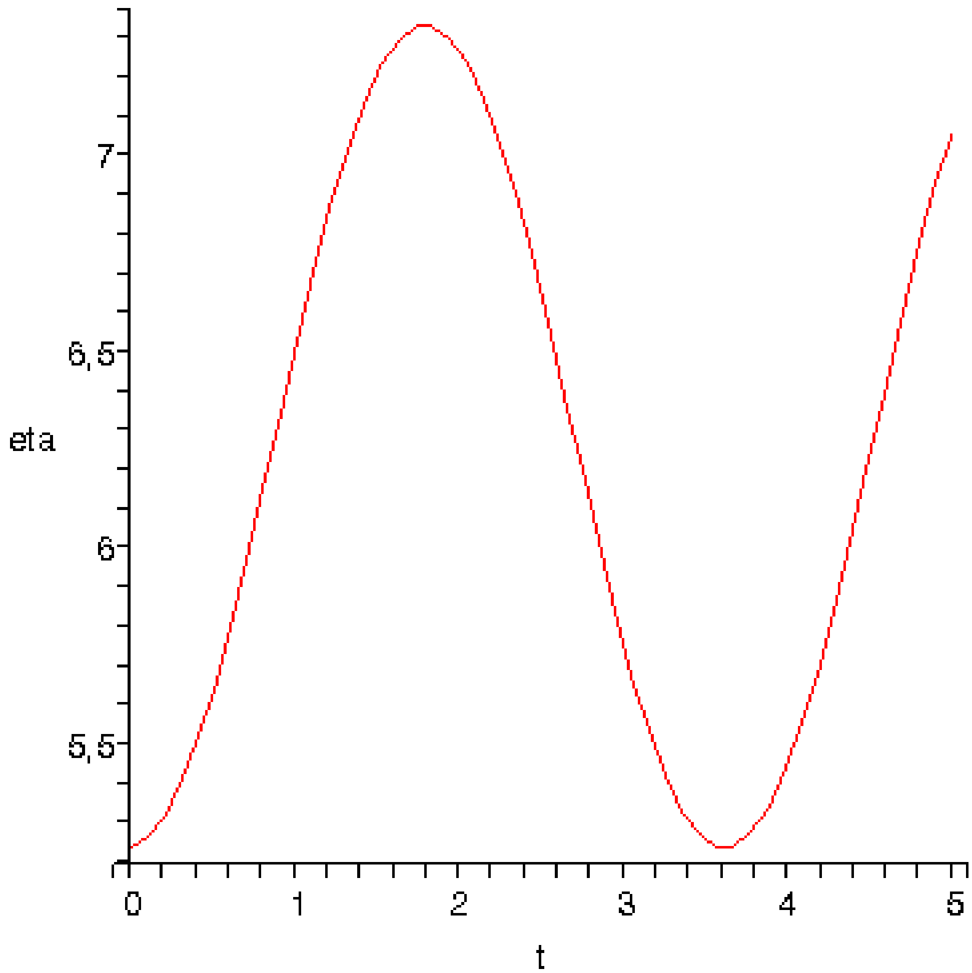
```
> res:=fint([1,0.2,evalf(5*Pi/3),0.1,evalf(Pi/2),0.1]):
```

Obtenemos ahora una representación animada del movimiento y las gráficas de las coordenadas generalizadas en función del tiempo.

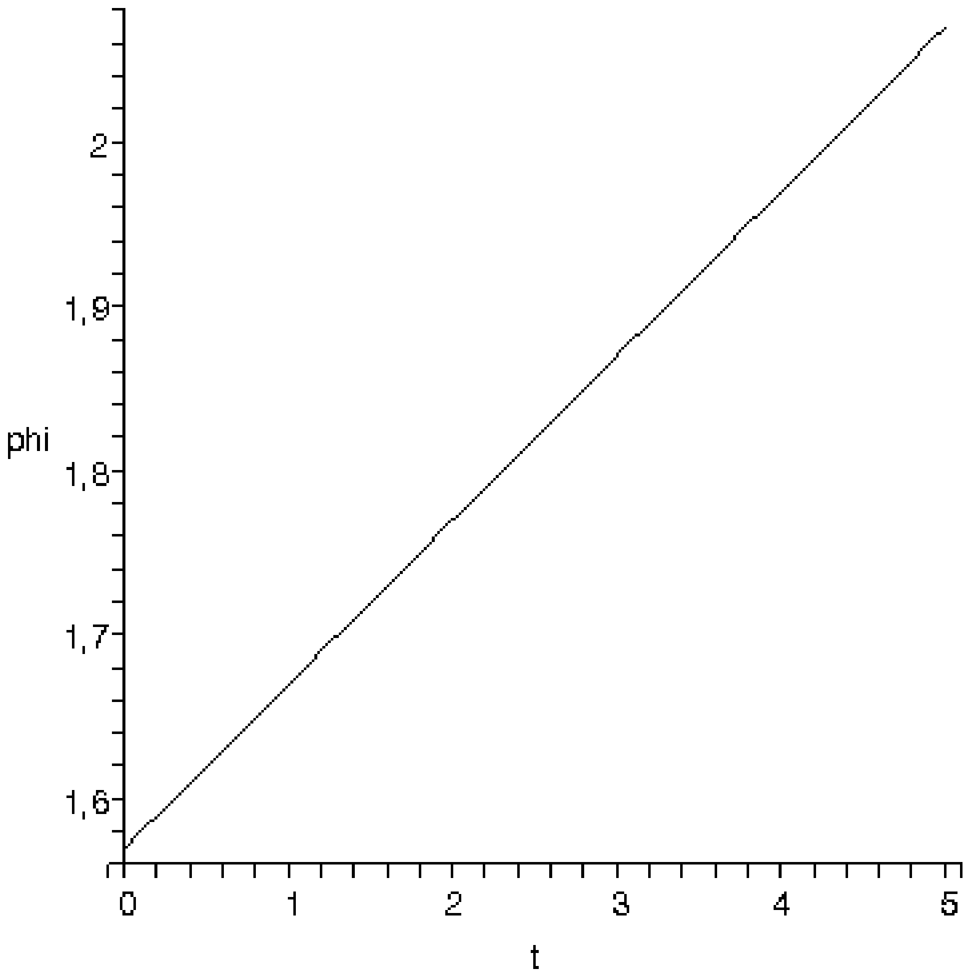
```
> dibu3(7,30);
```



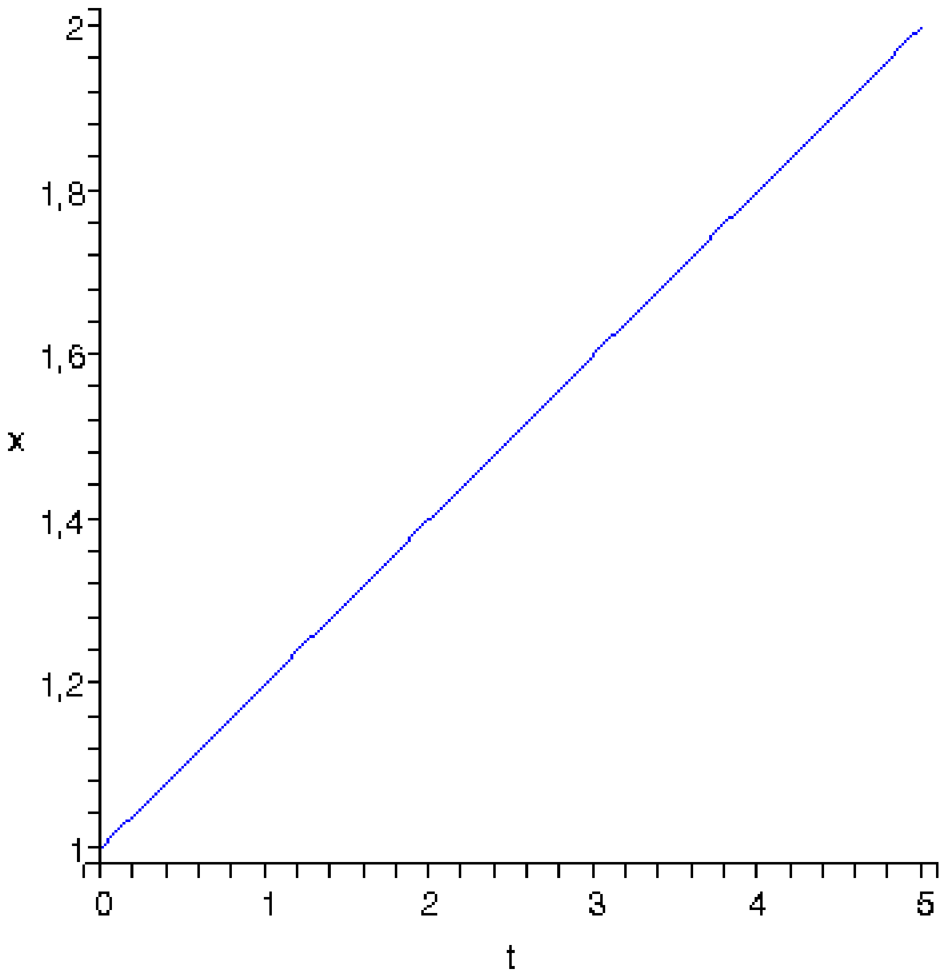

```
> g1:=odeplot(res,[t,theta(t)],0..5,color=red):
> g2:=odeplot(res,[t,phi(t)],0..5,color=black):
> g3:=odeplot(res,[t,x(t)],0..5,color=blue):
> display([g1]);
```



> display([g2]);



> display([g3]);



2
1,8
1,6
x
1,4
1,2
1
0
1
2
3
4
5
t

>