ENUNCIADO DEL EJEMPLO 19

Un semiaro homogéneo de masa n y radio r gira con velocidad no constante alrededor del eje Z vertical, estando obligado a permanecer en todo momento en un plano vertical. Una particula pesada de masa m puede moverse sin rozamiento ensartada en el semiaro y unida a la vez a un muelle de constante k, cuyo otro extremo se encuentra en el extremo inferior del diámetro vertical. Obtener las ecuaciones del movimiento.

```
> restart :
```

Cargamos los paquetes de Maple que vamos a emplear, entre ellos el Mecapac3d, para lo cuál es necesario indicar previamente donde se encuentra la librería dentro del disco duro.

```
> with(linalg) : with(plots) : with(plottools):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined
```

```
> libname:="C:\",libname:
```

```
> with(mecapac3d) :
```

El sistema tiene dos grados de libertad, por lo que lo definiremos con dos coordenadas generalizadas, alpha y theta que representan el ángulo girado por el semiaro alrededor de la vertical y el ángulo que forma el radio que une la partícula con el centro, con la horizontal, respectivamente. Definimos dichas coordenadas generalizadas.

```
> cg := [alpha,theta] :
```

Definimos las coordenadas del centro de gravedad del semiaro y la matriz de rotación del mismo. Como los giros son absolutos, el producto de las matrices lo realizamos por la izquierda.

```
> xgvar := [r*cos(alpha),r*sin(alpha),r*(1-2/Pi)] :
```

```
> rot1 := rota(-Pi/2,1):
```

```
> rot2 := rota(alpha,3):
```

```
> rtot := evalm(rot2&*rot1):
```

Definimos el semiaro.

```
> d1 := [semiaro,xgvar,rtot,n,r]:
```

Definimos la partícula.

```
> m1 := [punto, r*(1+cos(theta))*cos(alpha), r*(1+cos(theta))*sin(alpha),
  r*(1-sin(theta)),m]           :
```

Definimos el muelle.

```
> c1:= [muelle,[0,0,r],[r*(1+cos(theta))*cos(alpha),
  r*(1+cos(theta))*sin(alpha), r*(1-sin(theta))],k,lo]:
```

Definimos elementos gráficos para representar los ejes.

```
> ejeY:=[vector,[0,0,0],[0,1,0],green]:
> ejeX:=[vector,[0,0,0],[1,0,0],red]:
> ejeZ:=[vector,[0,0,0],[0,0,1],blue]:
> TO := [texto,[0,0,-1],"O"]:
> TY := [texto,[0,1,1],"Y"]:
> TZ := [texto,[0,0,1.5],"Z"]:
> TX := [texto,[1.5,0,0],"X"]:
```

Definimos el sistema.

```
> sistema := [d1,m1,c1,ejeX,ejeY,ejeZ,TO,TX,TY,TZ];
```

$$sistema = \left[\left[semiaro, \left[r\cos(\alpha), r\sin(\alpha), r\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\right], rtot, n, r\right],\right.$$
$$[punto, r\,(1+\cos(\theta))\cos(\alpha), r\,(1+\cos(\theta))\sin(\alpha), r\,(1-\sin(\theta)), m],$$
$$[muelle, [0, 0, r], [r\,(1+\cos(\theta))\cos(\alpha), r\,(1+\cos(\theta))\sin(\alpha), r\,(1-\sin(\theta))], k, lo],$$
$$[vector, [0, 0, 0], [1, 0, 0], red], [vector, [0, 0, 0], [0, 1, 0], green], [vector, [0, 0, 0], [0, 0, 1], blue],$$
$$[texto, [0, 0, -1], \text{"O"}], [texto, [1.5, 0, 0], \text{"X"}], [texto, [0, 1, 1], \text{"Y"}],$$
$$\left.[texto, [0, 0, 1.5], \text{"Z"}]\right]$$

Calculamos la energía cinética y potencial del sistema, así como la Lagrangiana.

```
> T:=fT(sistema):
>
> V:=fV(sistema):
```

Lagrangiana

```
> L := simplify(T-V) ;
```

$$L := -\frac{1}{4\pi}\Big(4\,m\,g\,r\,\pi + 2\,k\,\pi\,lo^2 - 4\,m\,g\,r\,\pi\sin(\theta) + 4\,k\,\pi\,r^2 + 4\,k\,\pi\,r^2\cos(\theta) - 3\,\alpha 1^2\,n\,r^2\,\pi - 8\,n\,g\,r$$
$$+ 4\,n\,g\,r\,\pi - 2\,m\,r^2\,\pi\,\alpha 1^2 - 4\,m\,r^2\,\pi\,\alpha 1^2\cos(\theta) - 2\,m\,r^2\,\pi\,\alpha 1^2\cos(\theta)^2 - 2\,m\,r^2\,\pi\,\theta 1^2$$
$$- 4\,k\,\pi\sqrt{2}\sqrt{r^2\,(1+\cos(\theta))}\,lo\Big)$$

Ecuaciones del movimiento

```
> ecua := ec_lag() ;
```

$$ecua := \Big[$$

$$-\frac{1}{4\pi}\left(-6\left(\frac{d^2}{dt^2}\alpha(t)\right) n r^2 \pi - 4 m r^2 \pi \left(\frac{d^2}{dt^2}\alpha(t)\right) - 8 m r^2 \pi \left(\frac{d^2}{dt^2}\alpha(t)\right) \cos(\theta(t))\right.$$

$$+ 8 m r^2 \pi \left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) - 4 m r^2 \pi \left(\frac{d^2}{dt^2}\alpha(t)\right) \cos(\theta(t))^2$$

$$\left. + 8 m r^2 \pi \left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) \cos(\theta(t)) \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)\right),$$

$$m r^2 \left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)$$

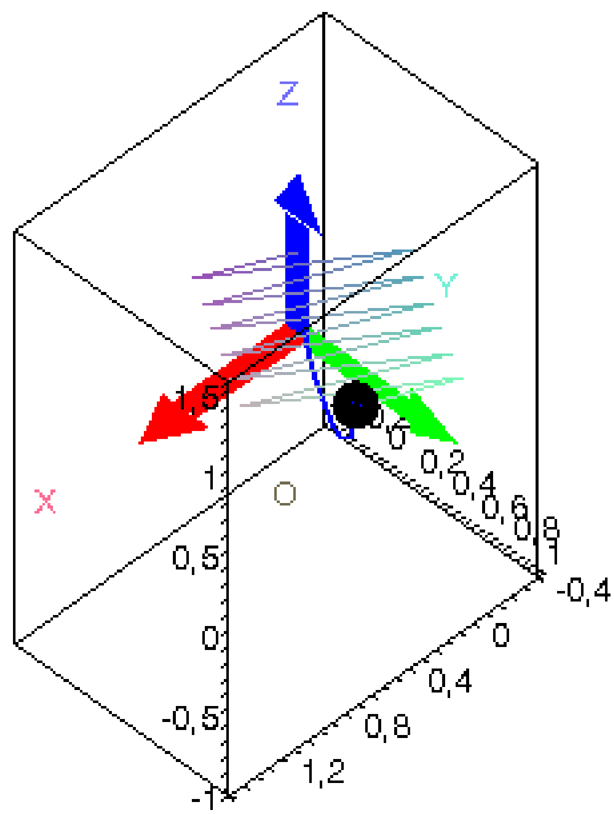
$$+ \frac{1}{4\pi}\left(-4 m g r \pi \cos(\theta(t)) - 4 k \pi r^2 \sin(\theta(t)) + 4 m r^2 \pi \left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)^2 \sin(\theta(t))\right.$$

$$\left.\left. + 4 m r^2 \pi \left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)^2 \cos(\theta(t)) \sin(\theta(t)) + \frac{2 k \pi \sqrt{2}\, lo\, r^2 \sin(\theta(t))}{\sqrt{r^2 (1 + \cos(\theta(t)))}}\right)\right]$$

Damos valores a los parámetros para poder representar el sistema en una situación determinada y poder realizar después la integración numérica.

```
> n:= 10 : g:=9.8 : m:= 50 : r:= 0.5 :k:=500:lo:=1:
```

```
> fG([evalf(Pi/3),0]) ;
```



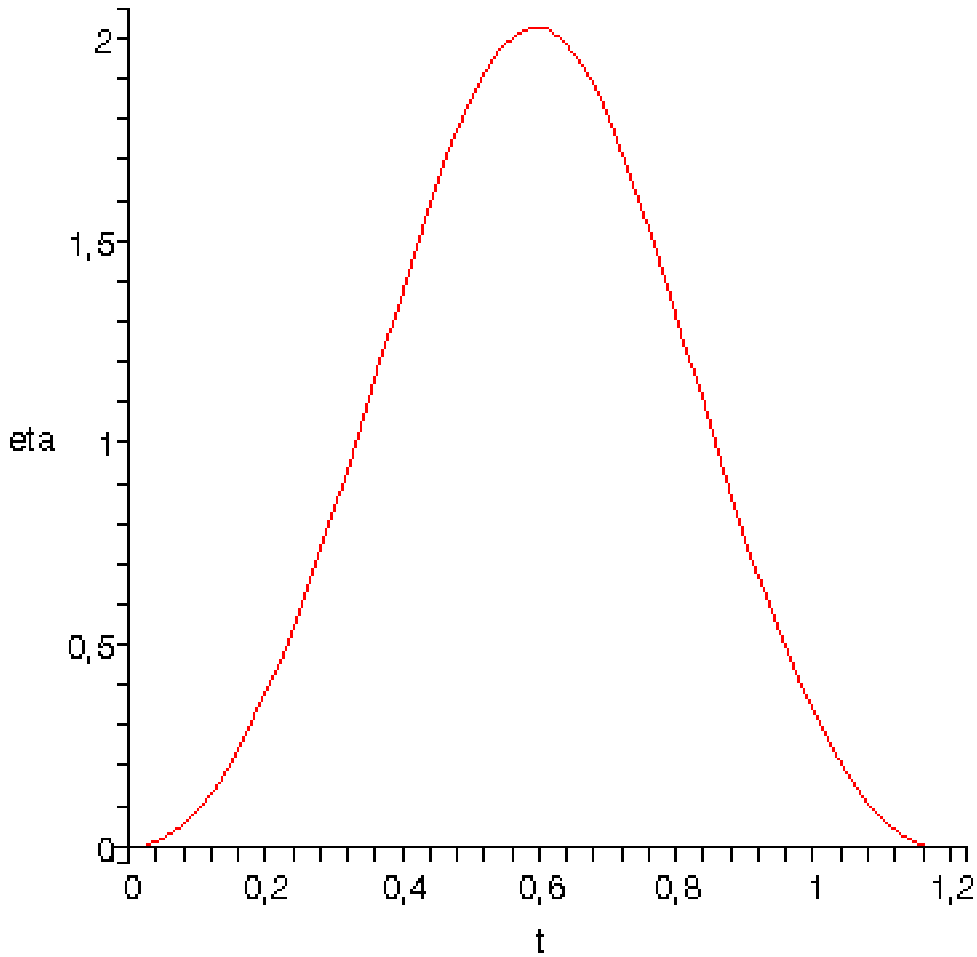
Realizamos la integración numérica indicando los valores iniciales de las coordenadas generalizadas y sus velocidades.

```
> res := fint([0.0,1.0,0.0,0]) ;
```

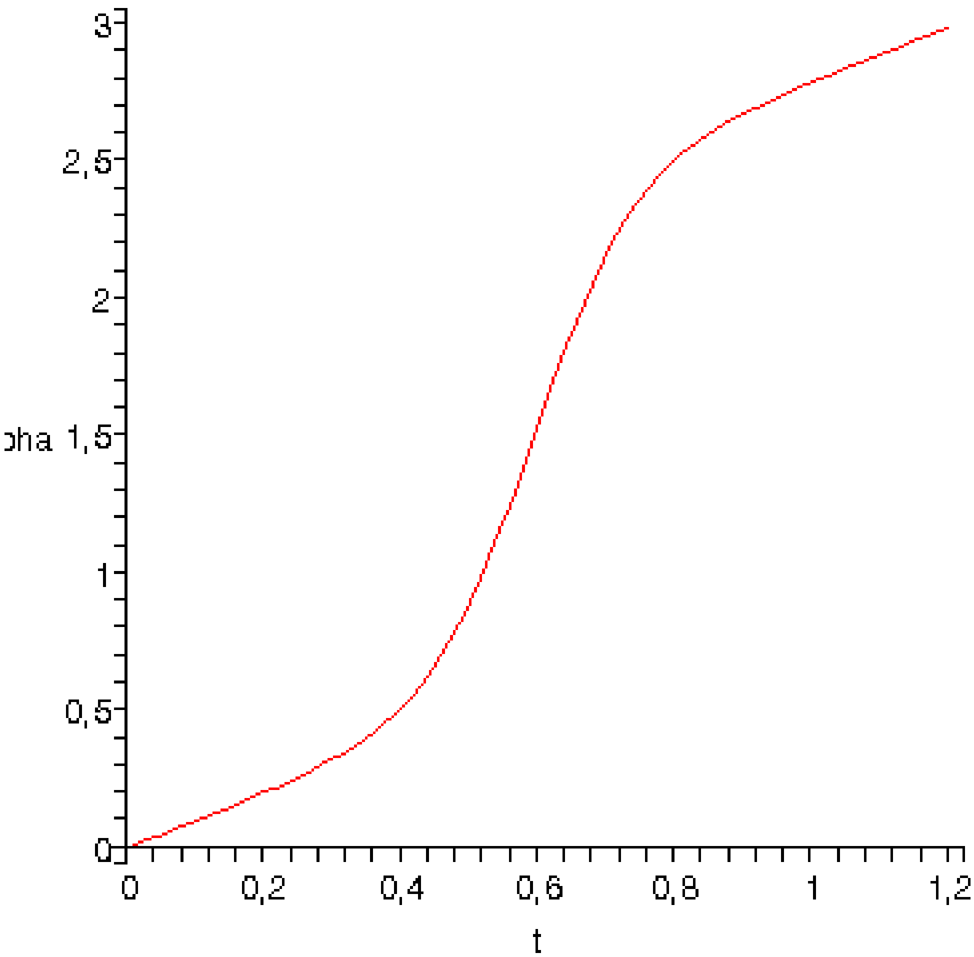
$$res := \textbf{proc}(x\_rkf45) \; \ldots \; \textbf{end proc}$$

Gráfica de las coordenadas generalizadas en función del tiempo

```
> odeplot(res,[t,theta(t)],0..1.2);
```

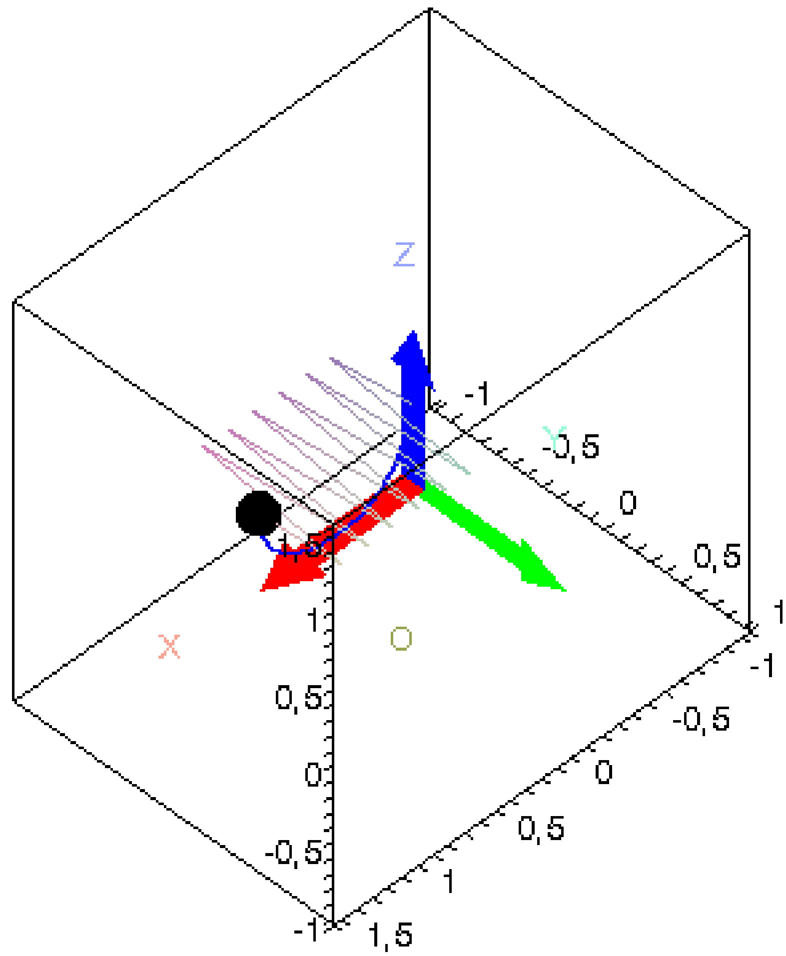


> odeplot(res,[t,alpha(t)],0..1.2) ;



Animación

```
> dibu3(4,60) ;
```



Z
Y
X
O
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5

>