

# ESTIMACIÓN DE ERROR EN PROBLEMAS NO LINEALES MEDIANTE ELEMENTOS DE DEFORMACIONES SUPUESTAS

FELIPE GABALDÓN Y JOSÉ MARÍA GOICOLEA

E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad Politécnica de Madrid  
C/ Profesor Aranguren s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid, España  
Tfno: 91 – 3366696, Fax: 91 – 3366702  
e-mail: felipe@mecanica.upm.es, goicolea@mecanica.upm.es

## Resumen

En este artículo se describe una metodología para la estimación de error mediante elementos con formulación de deformaciones mejoradas supuestas, y su aplicación a problemas de elasticidad lineal, de elasticidad no lineal con deformaciones finitas y de plasticidad infinitesimal.

La relación entre los modos mejorados de deformación y la calidad de la solución de elementos finitos se analiza en el contexto de la estimación de error, cuantificándola mediante la norma energética. A partir de este análisis se propone una metodología para la estimación de error con las siguientes ventajas: a) la formulación del estimador es local, b) el cálculo del error se realiza elemento a elemento, y c) tiene una interpretación práctica simple.

En primer lugar se describe la formulación general del estimador de error. A continuación esta formulación se particulariza para los modelos de elasticidad lineal y no lineal, y para modelos de plasticidad con pequeñas deformaciones. En este contexto se presentan diversas simulaciones computacionales representativas de problemas de elasticidad en 2D y 3D, y para plasticidad de Von Mises. En ellos se analiza tanto la distribución local del error como la tasa de convergencia global.

ERROR ESTIMATION IN NON LINEAR PROBLEMS BASED ON ASSUMED STRAIN ELEMENTS

## Summary

This paper describes a methodology for error estimation with enhanced assumed strain elements applied to linear elasticity, finite strain elasticity and elastic-plastic solid mechanics problems.

The relation between the enhanced strain modes and the quality of the finite element solution is explored. The analysis is developed in the context of error estimation. The contribution of the enhanced strain modes is quantified with an energy norm. The methodology proposed for error estimation has the advantages of a) being a local formulation, b) computing the error in an element-by-element way, and c) having a simple interpretation from a practical point of view.

Firstly the general formulation of the error estimator is described. Following, this formulation is applied to linear and non-linear elasticity and plasticity problems. Representative numerical simulations are presented for 3D linear and non linear elasticity and Von Mises plasticity, with emphasis on the distribution of the local error and the global rate of convergence.

## INTRODUCCIÓN

Actualmente el método de elementos finitos es una herramienta computacional que se utiliza de forma rutinaria en ingeniería, dentro del contexto de diseño y verificación de estructuras. No sólo se requiere conocer el valor aproximado de la solución de elementos finitos sino que también se necesita acotar con precisión el error de discretización en los resultados obtenidos y saber que zonas de la malla se deben refinar para disminuir dicho error.

Precisamente, el interés de los estimadores de error "a posteriori" se basa en su aplicabilidad directa a las técnicas de remallaje adaptativo. El desarrollo de estos estimadores comenzó en los años setenta con los trabajos pioneros de Babuška y coautores [3]. Desde esa época hasta la actualidad se han propuesto numerosos estimadores de error para análisis lineal, cuya efectividad se ha probado en una amplia gama de problemas.

Sin embargo el desarrollo de estimadores de error para problemas no lineales ha comenzado hace poco tiempo, permaneciendo actualmente un amplio número de líneas de investigación abiertas. La estimación de error aplicada a esta clase de problemas tiene limitaciones que son inherentes a la propia naturaleza del comportamiento no lineal. Por ejemplo, los problemas de unicidad cuando la solución depende del camino de carga; el desarrollo de bandas de localización de deformaciones que dan lugar a que el problema de contorno esté mal formulado; los puntos de bifurcación en problemas de pandeo y fisuración; son situaciones que con frecuencia se presentan en los modelos de elementos finitos no lineales.

En el contexto de la estimación de error para problemas no lineales consideramos que son reseñables las aportaciones de Ortiz y Quigley [9] en localización, los trabajos de Johnson [8] en el contexto del modelo elastoplástico de Hencky, el estimador de error de Barthold y coautores [4] aplicable a los modelos de Hencky y Prandtl-Reuss. Finalmente es de destacar el trabajo de Radovitzky y Ortiz [11] en estimación de error para problemas altamente no lineales incluyendo deformaciones finitas en modelos hiperelásticos y viscoplásticos, y problemas dinámicos.

En este artículo se describe una metodología para la estimación de error que proporciona una cota del error de discretización asociado a la solución de elementos finitos con formulación estándar en desplazamientos, aplicable

a problemas lineales y no lineales. El error se calcula a partir de la solución obtenida mediante elementos con formulación de deformaciones mejoradas supuestas [13, 15].

## FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS CON DEFORMACIONES MEJORADAS SUPUESTAS

La formulación de elementos finitos con deformaciones mejoradas supuestas o formulación EAS (del acrónimo Enhanced Assumed Strain), propuesta por Simó y coautores [2, 13, 14, 15], está basada en las ecuaciones variacionales discretas que se obtienen a partir del funcional de Hu-Washizu [17]. Con esta formulación el campo de deformaciones se enriquece añadiendo modos de deformación adicionales a los que se obtienen con la parte simétrica del gradiente de desplazamientos.

En lo sucesivo se supondrá la existencia de una función de densidad de energía interna  $W$ . Esta función se expresa en términos del tensor lineal de deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , o del tensor gradiente de deformación  $\boldsymbol{F}$  si el problema es geoméricamente no lineal.

En el caso de deformaciones infinitesimales [15], la idea clave de la formulación EAS es la descomposición aditiva del campo de deformaciones en una parte compatible con el campo de desplazamientos y en una parte mejorada:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\nabla^s \boldsymbol{u}}_{\text{compatible}} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\text{mejorada}} \quad (1)$$

donde  $\nabla^s \boldsymbol{u}$  (componente simétrica del gradiente de desplazamientos) es la parte *compatible* del campo de deformaciones y  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  es la parte *mejorada* (o incompatible). Esta denominación está motivada por la *mejora* que la parte incompatible introduce en la solución numérica, y que está asociada a mallas discretas (para la solución exacta de la mecánica del medio continuo el campo  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  es nulo). Asimismo, no existen requisitos de continuidad del campo de deformaciones mejoradas  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  entre los elementos de la malla.

En problemas con deformaciones finitas [13], la formulación EAS se expresa en términos del campo de desplazamientos y del gradiente de deformaciones, el cual se parametriza mediante la descomposición aditiva:

$$\boldsymbol{F} = \underbrace{\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{\varphi}}_{\text{compatible}} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{F}}}_{\text{mejorada}} \quad (2)$$

siendo  $\nabla_{\boldsymbol{x}}$  el operador gradiente aplicado en la configuración material y  $\boldsymbol{\varphi}$  la función de deformación. La formulación detallada de estos elementos está recogida en las referencias anteriores, y la implementación utilizada en este trabajo se ha descrito en [6].

# ESTIMACIÓN DE ERROR MEDIANTE NORMAS DE ENERGÍA

## Estructura variacional del problema de contorno

Se considera el problema de contorno correspondiente al equilibrio de un medio continuo sólido. La formulación fuerte se expresa en términos del campo de desplazamientos, que es la incógnita básica, mediante un operador diferencial  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  definido en el dominio  $\Omega \cup \partial\Omega$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \equiv \begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} & \text{en } \Omega; \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{en } \partial_g \Omega; \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} & \text{en } \partial_t \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

Este problema de contorno tiene estructura variacional, siendo equivalente la solución de (3) a la minimización del funcional de la energía potencial total:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} W \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma \quad (4)$$

donde  $W = W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$  es la función de densidad de energía interna,  $\mathbf{b}$  es el vector de fuerzas volumétricas y  $\bar{\mathbf{t}}$  son las tensiones aplicadas en el contorno.

La forma de Dirichlet  $a(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}]$  asociada a la función de densidad de energía de deformación se define en términos de la segunda variación del funcional  $\Pi$ . Definiendo el tensor tangente de módulos elásticos  $\mathbf{D} = \partial^2 W / \partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ , la expresión de la forma de Dirichlet es:

$$a(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}] = \int_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} \delta\mathbf{u} \cdot (\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nabla} \delta\mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} D_{ijkl} \delta u_{i,j} \delta u_{k,l} \, d\Omega \quad (5)$$

con suma en los índices repetidos. Los términos  $\delta\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  son variaciones admisibles pertenecientes al espacio de funciones de energía finita, y que se anulan en los puntos del contorno  $\partial_g \Omega$  con condiciones de tipo Dirichlet.

En el caso particular de la elasticidad lineal el tensor  $\mathbf{D}$  es constante por lo que al aplicar (5) al campo de desplazamientos se obtiene un valor igual al doble de la energía de deformación,  $a[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega = 2 \int_{\Omega} W \, d\Omega$ . Asimismo, se define la norma de la energía de un campo  $\mathbf{v}$  como

$$\|\mathbf{v}\|_E \stackrel{\text{def}}{=} (a(\mathbf{u})[\mathbf{v}, \mathbf{v}])^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

La forma  $a(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}]$  es *regular* si 1) las componentes de  $\mathbf{D} \equiv D_{ijkl}$  están acotadas en  $\Omega$ , y 2) existe una constante  $C \in \mathbb{R}^+$  tal que  $(a(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}])^{\frac{1}{2}} > C \|\delta\mathbf{u}\|_1$ , donde  $\|\delta\mathbf{u}\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} [\sum_{\alpha=0}^1 \int_{\Omega} (D^\alpha \delta\mathbf{u})^2 \, d\Omega]^{\frac{1}{2}}$  es la norma de Sobolev de

grado 1. En tal caso el funcional  $\Pi(\mathbf{u})$  es convexo y tiene un mínimo local único. Ello implica que la solución  $\mathbf{u}$  del problema de contorno cumple:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \Pi(\mathbf{v}). \quad (7)$$

La ecuación variacional asociada al funcional  $\Pi(\mathbf{u})$  es:

$$G(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}] = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{V}. \quad (8)$$

donde  $G(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}]$  es la forma débil asociada al problema de contorno (3). Su expresión es:

$$G(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}] = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla(\delta\mathbf{u}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Gamma \quad (9)$$

Restringiendo la expresión (8) a variaciones  $\delta\mathbf{u}_h$  pertenecientes al subespacio de dimensión finita  $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ :

$$G(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}_h] = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h; \quad (10)$$

y por otra parte, particularizando (8) a funciones  $\mathbf{u}_h$  y variaciones  $\delta\mathbf{u}_h$  pertenecientes a subespacios de dimensión finita:

$$G(\mathbf{u}_h)[\delta\mathbf{u}_h] = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h. \quad (11)$$

Restando estas dos ecuaciones, y teniendo en cuenta la linealidad de  $G(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}]$ , se obtiene:

$$a(\mathbf{u})[\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \delta\mathbf{u}_h] = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h \quad (12)$$

La ecuación (12) indica que la solución de elementos finitos minimiza el valor de la norma energética  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E$ , denominándose *propiedad de aproximación óptima* del método de elementos finitos:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E = \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_E. \quad (13)$$

### Estimación local del error

La solución de elementos finitos se obtiene en el dominio  $\Omega^h$ , que se construye mediante la discretización del dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  en elementos  $\Omega^e$ ,  $e = 1, \dots, n_{\text{elm}}$ .

Sea  $\mathbf{u}^e$  la función de energía finita correspondiente al campo exacto de desplazamientos en  $\Omega^e$ . El *polinomio interpolante*  $\mathbf{u}_h^e$  de la solución exacta se define mediante:

$$\mathbf{u}_h^e(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a=1}^{n_{\text{men}}} \mathbf{u}_a N_a(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}_k(\Omega^e) \quad (14)$$

siendo  $n_{\text{nen}}$  el número de nodos del elemento  $e$ , y  $\mathbb{P}_k(\Omega^e)$  el conjunto de polinomios definidos en  $\Omega^e$  que tienen grado menor o igual que  $k$ .

La función de error local se define en cada elemento  $e$  como la diferencia entre el campo exacto de desplazamientos y el campo de desplazamientos obtenido en el cálculo de elementos finitos:

$$\mathbf{E}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^e(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_h^e(\mathbf{x}) \quad (15)$$

Un estimador de error local proporciona una cota superior de la norma de la función (15), pudiéndose expresar como:

$$\|\mathbf{u}^e - \mathbf{u}_h^e\| \leq C(h^e)^\alpha |\mathbf{u}^e| \quad (16)$$

donde  $C > 0$  es una constante,  $h^e$  es el diámetro de  $\Omega^e$ ,  $|\mathbf{u}^e|$  es una seminorma de  $\mathbf{u}^e$  y  $\alpha$  es la tasa de convergencia. La desigualdad (16) se verifica si se cumple la propiedad de aproximación óptima (13) y las condiciones de regularidad de  $a(\mathbf{u})[\cdot, \cdot]$  se mantienen [5].

### Estimación global del error

Dado que la norma  $\|\mathbf{u}\|_E$  está acotada, si las funciones de forma en (14) son conformes, la función de interpolación global  $\mathbf{u}_h = \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \mathbf{u}_h^e$  es también una función de energía finita. En tal caso la cota superior de la función de error global expresada en (16) puede obtenerse sumando las contribuciones de cada elemento. Haciendo dicha suma, y si las condiciones de regularidad se mantienen, la desigualdad (16) resulta:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E \leq C \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \frac{(h^e)^{k+1}}{\rho^e} |\mathbf{u}|_{k+1} \quad (17)$$

donde  $|\mathbf{u}|_{k+1}$  es la seminorma de Sobolev de grado  $(k+1)$ ,  $|\mathbf{u}|_{k+1} = [\int_{\Omega} (D^{k+1}\mathbf{u})^2 d\Omega]^{1/2}$  y  $\rho^e$  es el diámetro de la mayor esfera inscrita en  $\Omega_e$

## ESTIMADOR DE ERROR PROPUESTO

La ecuación (17) tiene el inconveniente, desde el punto de vista práctico, de expresar el error en términos del campo  $\mathbf{u}^e$  que es la propia incógnita del problema, a priori desconocida. Por otro lado no es posible sustituir  $\mathbf{u}^e$  por su aproximación  $\mathbf{u}_h^e$  ya que esta es un polinomio de grado  $k$  y la seminorma empleada es de grado  $k+1$  ( $D^{k+1}\mathbf{u}_h^e = 0$ ).

El estimador de error que se propone para la solución  $\mathbf{u}_h$ , calculada con elementos compatibles, se basa en la solución  $\mathbf{u}_{\text{enh}}$  obtenida con los elementos de deformaciones supuestas descritos anteriormente.

El punto de partida es la desigualdad triangular:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{enh}}\|_E + \|\mathbf{u}_{\text{enh}} - \mathbf{u}_h\|_E \quad (18)$$

y las siguientes expresiones de las tasas de convergencia:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{enh}}\|_E = \mathcal{O}(h^m) \quad (19)$$

$$\|\mathbf{u}_{\text{enh}} - \mathbf{u}_h\|_E = \mathcal{O}(h^p) \quad (20)$$

Se considera como hipótesis de partida que, al menos en régimen asintótico ( $h \rightarrow 0$ ), se verifica:

$$m > p \quad (21)$$

Entonces en la ecuación (18), según se refina la malla el primer sumando de la derecha se hace despreciable en comparación con el segundo sumando, y es posible establecer que:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E \leq C \|\mathbf{u}_{\text{enh}} - \mathbf{u}_h\|_E, \quad C \in \mathbb{R}^+ \quad (22)$$

Las hipótesis (19, 20, 21) se pueden interpretar en los siguientes términos: la solución obtenida con elementos mejorados  $\mathbf{u}_{\text{enh}}$  y la solución obtenida con elementos en desplazamientos  $\mathbf{u}_h$  convergen a la solución exacta de modo que se verifica:

1. su diferencia, medida con la norma de la energía  $\|\mathbf{u}_{\text{enh}} - \mathbf{u}_h\|_E$ , disminuye según se refina la malla.
2. la solución obtenida con los elementos mejorados es una aproximación mejor a la solución exacta que la solución con elementos estándar a la obtenida con elementos mejorados.

El estimador de error propuesto es la norma energética de la diferencia entre los campos de desplazamientos mejorado y compatible:

$$(E^e) = \|\mathbf{u}_{\text{enh}}^e - \mathbf{u}_h^e\|_E \quad (23)$$

Como se ha señalado anteriormente, el error global se puede obtener mediante la suma de los errores locales:

$$E^2 = \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} (E^e)^2 \quad (24)$$

En resumen, para calcular el estimador (23), el error asociado a la solución de elementos compatibles se cuantifica mediante la norma energética asociada a los modos mejorados de la solución con elementos de deformaciones supuestas.

Cada sumando en (24) es una medida local, por tanto el estimador de error propuesto tiene la ventaja, importante desde el punto de vista práctico, de evaluarse elemento por elemento sin necesidad de aplicar técnicas de suavizado global ni soluciones en subdominios.

## ESTIMACIÓN DE ERROR EN PROBLEMAS DE ELASTICIDAD CON DEFORMACIONES FINITAS

El estimador de error propuesto anteriormente se puede generalizar para problemas de elasticidad finita con modelos hiperelásticos. En este caso el campo incógnita es la función deformación  $\varphi : \Omega \ni \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x} \in \Omega_t$ , siendo  $\Omega = \Omega_0$  la configuración de referencia y  $\Omega_t$  la configuración deformada en el instante  $t$ . Las bases de su formulación son similares a las descritas para deformaciones infinitesimales, sustituyendo el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$  por la función deformación  $\varphi$ , y el tensor de deformaciones infinitesimales por el gradiente de deformación  $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \varphi$ .

Con el mismo procedimiento que el seguido para obtener la ecuación (12), en este caso resulta:

$$G(\varphi)[\delta\varphi_h] - G(\varphi_h)[\delta\varphi_h] = 0 \quad \forall \delta\varphi_h \in \mathcal{V}_h \quad (25)$$

No obstante, en este caso no es posible agrupar los dos términos de (25) obteniendo una expresión similar a (12), porque en elasticidad finita la forma débil  $G(\varphi)[\delta\varphi]$  es no lineal en  $\varphi$ . Sin embargo, considerando el régimen asintótico ( $h \rightarrow 0$ ), cuando la solución de elementos finitos  $\varphi_h$  se aproxima a la solución exacta de manera que  $(\varphi - \varphi_h) \rightarrow \mathbf{0}$ , la ecuación (25) se puede linealizar resultando:

$$G(\varphi)[\delta\varphi_h] - G(\varphi_h)[\delta\varphi_h] \approx a(\varphi)[\varphi - \varphi_h, \delta\varphi_h] = 0 \quad \forall \delta\varphi_h \in \mathcal{V}_h, \quad h \rightarrow 0 \quad (26)$$

Esta ecuación establece la *propiedad de aproximación óptima* del método de elementos finitos para elasticidad con grandes deformaciones, en régimen asintótico:

$$\|\varphi - \varphi_h\|_E = \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h} \|\varphi - \mathbf{v}_h\|_E \quad h \rightarrow 0 \quad (27)$$

Para el caso de deformaciones finitas, las hipótesis equivalentes a (19,20,21) se expresan en términos de la función deformación  $\varphi$ :

$$\|\varphi - \varphi_{\text{enh}}\|_E = \mathcal{O}(h^m) \quad (28)$$

$$\|\varphi_{\text{enh}} - \varphi_h\|_E = \mathcal{O}(h^p) \quad (29)$$

$$m > p \quad (30)$$

Entonces, si se verifican (28, 29, 30), la expresión del estimador de error propuesto en (23) resulta:

$$\boxed{(E^e)^2 = \|\varphi_{\text{enh}}^e - \varphi_h^e\|_E} \quad (31)$$

Para su implementación numérica, el valor de (31) se expresa en la configuración de referencia. La expresión de la norma energética para un determinada función de energía finita  $\eta$  es:

$$(\|\eta\|_E)^2 = a(\varphi)[\eta, \eta] = \int_{\Omega} \nabla \eta \cdot (\mathbf{D} \cdot \nabla \eta) \, d\Omega \quad (32)$$

donde  $\mathbf{D}$  es el tensor tangente de módulos constitutivos:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial^2 W(\mathbf{X}, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} \quad (33)$$

Operando en (31) y considerando (2) la expresión analítica que se obtiene para el estimador de error es [6]:

$$(E^e)^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{F}}) \, d\Omega \quad (34)$$

siendo  $\tilde{\mathbf{F}}$  la parte mejorada del gradiente de deformación (2). Cabe destacar que la expresión (34) depende, a través del tensor  $\mathbf{D}$ , de la configuración considerada. El error global calculado mediante (34), extendiendo la integral a todo el dominio  $\Omega$ , se puede expresar mediante la suma de los errores locales:

$$E^2 = \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} (E^e)^2 \quad (35)$$

## ESTIMACIÓN DE ERROR EN PLASTICIDAD DE VON MISES

La metodología de estimación de error descrita para problemas lineales y posteriormente generalizada a problemas de elasticidad finita, se aplica ahora

a problemas de plasticidad de Von-Mises con pequeñas deformaciones. Dado que es necesario que el problema de contorno tenga estructura variacional, en plasticidad esta estructura se obtiene a nivel incremental mediante procedimientos de integración variacional de las ecuaciones de la plasticidad [10]. La integración variacional parte de la existencia de una función incremental de densidad de energía interna  $W_{t+\Delta t}$ , que permite obtener las tensiones en  $t + \Delta t$  a partir de los resultados en el instante  $t$ , de manera que se verifica:

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} = \frac{\partial W_{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^e} \quad (36)$$

siendo  $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^e$  el tensor de deformaciones elásticas infinitesimales en  $t + \Delta t$ .

En lo sucesivo se supondrá plasticidad de tipo  $J_2$  con endurecimiento isotrópico. La función  $W_{t+\Delta t}$  depende de las deformaciones elásticas y de la deformación plástica efectiva  $\xi = \int_0^t (2/3 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)^{1/2} dt$ , teniendo la siguiente expresión:

$$W_{t+\Delta t}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^e, \xi_{t+\Delta t}, \boldsymbol{\varepsilon}_t^e, \xi_t) = \min_{\xi_{t+\Delta t}} (\Psi_{t+\Delta t}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^e, \xi_{t+\Delta t}) - \Psi_t(\boldsymbol{\varepsilon}_t^e, \xi_t)) \quad (37)$$

donde  $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \xi)$  es la función de energía libre. La condición de mínimo en la parte derecha de (37) equivale a la condición:

$$\frac{\partial \Psi_{t+\Delta t}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^e, \xi_{t+\Delta t})}{\partial \xi_{t+\Delta t}} = 0 \quad (38)$$

Suponiendo que la respuesta elástica es independiente de los fenómenos irreversibles de deformación de la red cristalina, la función de energía libre se puede descomponer aditivamente en una parte elástica y una parte plástica. Si además también se supone la descomposición aditiva del tensor de deformaciones infinitesimales, la dependencia funcional de  $\Psi$  resulta:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \xi) = \Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \Psi^p(\xi); \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad (39)$$

Por tanto, el potencial incremental  $W_{t+\Delta t}$  puede escribirse:

$$W_{t+\Delta t} = \min_{\xi_{t+\Delta t}} (\Psi_{t+\Delta t}^e(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^p) + \Psi_{t+\Delta t}^p(\xi_{t+\Delta t}) - \Psi_t^e(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \boldsymbol{\varepsilon}_t^p) - \Psi_t^p(\xi_t)) \quad (40)$$

La condición de optimización (38) aplicada a (40), conduce a la siguiente expresión [6]:

$$(J_{2,t+\Delta t})^2 = \frac{2}{3} \frac{\partial \Psi^p}{\partial \xi_{t+\Delta t}} \quad (41)$$

siendo  $J_2$  el segundo invariante del tensor de tensiones desviadoras. El problema de contorno puede escribirse mediante un operador diferencial incremental  $\mathbf{A}_{t+\Delta t}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ , cuya forma de Dirichlet es:

$$a(\mathbf{u}_{t+\Delta t})[\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}] = \int_{\Omega} \nabla^s(\delta\mathbf{u}) \cdot \left( \frac{\partial^2 W_{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} \partial \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}} \cdot \nabla^s(\delta\mathbf{u}) \right) d\Omega \quad (42)$$

Si (42) verifica las condiciones de regularidad, la metodología descrita en apartados anteriores se aplica en los mismos términos, resultando el siguiente error local:

$$(E_{\Delta t}^e)^2 = \|\mathbf{u}_{\text{enh}_{t+\Delta t}}^e - \mathbf{u}_{h_{t+\Delta t}}^e\|_E \quad (43)$$

La medida del error (43) es una cota incremental del error absoluto en el incremento  $\Delta t$ . Para evaluar el error de discretización a lo largo del camino de carga es necesario evaluar la integral en el tiempo de  $E_{\Delta t}^e$ :

$$(E_{t+\Delta t}^e)^2 = \int_0^{t+\Delta t} (E_{\Delta t}^e)^2 dt \quad (44)$$

La expresión anterior indica que el error acumulado se obtiene mediante la suma de cuadrados. Este hecho da lugar a una de las limitaciones del estimador de error propuesto como medida global a lo largo del camino de carga: se calcula de manera monótonica creciente, no reflejando correctamente aquellas situaciones en las que el error tienda a reducirse localmente en caminos complejos de carga o en situaciones de bifurcación. Utilizando la función de densidad de energía interna  $W_{t+\Delta t}$ , el estimador de error se interpreta como la contribución de los modos de deformación incompatibles a la función de energía libre:

$$(E_{\Delta t}^e)^2 = \int_{\Omega_e} W_{t+\Delta t} (\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^e(\mathbf{u}), \boldsymbol{\xi}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{\xi}_{t+\Delta t}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}_t^e - \boldsymbol{\varepsilon}_t^e(\mathbf{u}), \boldsymbol{\xi}_t - \boldsymbol{\xi}_t(\mathbf{u})) d\Omega \quad (45)$$

La densidad de energía en (45) se puede descomponer aditivamente en las contribuciones de la parte elástica y plástica de la energía libre, resultando:

$$(E_{\Delta t}^e)^2 = \int_{\Omega_e} W_{t+\Delta t}^e (\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^e(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}_t^e - \boldsymbol{\varepsilon}_t^e(\mathbf{u})) d\Omega + \int_{\Omega_e} W_{t+\Delta t}^p (\boldsymbol{\xi}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{\xi}_{t+\Delta t}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\xi}_t - \boldsymbol{\xi}_t(\mathbf{u})) d\Omega \quad (46)$$

El error de discretización global se obtiene extendiendo la integral en (45) al dominio  $\Omega$  en su totalidad. Entonces, el estimador del error global se calcula mediante la suma de los errores locales:

$$E_{\Delta t}^2 = \sum_{i=1}^{n_{\text{elm}}} (E_{\Delta t}^i)^2 \quad (47)$$

# SIMULACIONES COMPUTACIONALES REPRESENTATIVAS

## Elasticidad lineal. Bóveda de Scordelis-Lo

El ejemplo clásico de Scordelis-Lo para elementos de lámina se emplea aquí para la estimación de error empleando elementos sólidos tridimensionales con deformaciones supuestas QM1/E12 [2]. Se considera un sector cilíndrico de  $80^\circ$  sometido a una carga volumétrica en dirección  $Z$ . La bóveda se apoya en dos diafragmas rígidos. La figura 1 muestra la definición de este ejemplo considerando las simetrías existentes. Los valores de los coeficientes de Lamé son  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 2,16 \cdot 10^8$ , y las dimensiones de la bóveda  $L = 50$ ,  $R = 25$ ,  $t = 0,25$  y  $b = 360$ .

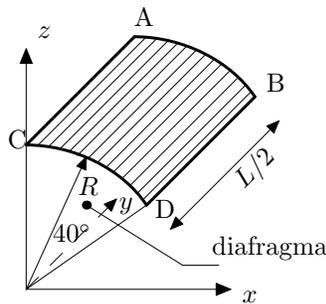


Figura 1: *Bóveda de Scordelis-Lo. Definición del problema.*

Los resultados obtenidos con los elementos mejorados son adecuados para la estimación de error ya que se aproximan muy bien a los obtenidos con elementos lámina, tal y como se muestra en el cuadro 1 para distintas mallas; con un único elemento mejorado en el espesor se obtiene un buen comportamiento de lámina, lo que no ocurre empleando elementos convencionales. Los resultados con elementos lámina que se muestran en dicha cuadro se han obtenido empleando un programa comercial de elementos finitos [1]. El desplazamiento vertical del punto  $B$  calculado con la malla de  $16 \times 16 \times 1$  elementos mejorados es  $v_B = 0,3031$ , muy similar al resultado de referencia [12]  $v_{\text{ref}} = 0,3024$ . Para la estimación de error se adopta como solución exacta la obtenida con una malla de 24961 grados de libertad, resuelta con elementos de deformaciones supuestas. El estimador de error se ha analizado considerando dos situaciones: refinamiento uniforme en la superficie de la bóveda (en dirección meridional y circunferencial) manteniendo un elemento en el espesor, y refinamiento en el espesor manteniendo el número de elementos en las direcciones meridional y circunferencial. Las mallas empleadas en el primer caso son las descritas en el cuadro 1. Las mallas con refinamiento en

Cuadro 1: Resultados obtenidos con elementos sólidos mejorados y con elementos lámina para el ejemplo de la bóveda de Scordelis-Lo

Nº de elementos	$v_B$ (sólidos)	$v_B$ (láminas)
$4 \times 4 \times 1$	0,1656	0,3132
$8 \times 8 \times 1$	0,2896	0,3031
$16 \times 16 \times 1$	0,3031	0,3016
$32 \times 32 \times 1$	0,3038	0,3016
$64 \times 64 \times 1$	0,3042	0,3018

el espesor tienen  $16 \times 16 \times 1$ ,  $16 \times 16 \times 2$ ,  $16 \times 16 \times 3$ ,  $16 \times 16 \times 4$ ,  $16 \times 16 \times 5$  y  $16 \times 16 \times 10$  elementos.

La curva de la figura 2 muestra la norma de energía frente al número de grados de libertad considerando el refinamiento de la superficie de la bóveda. El refinamiento en el espesor de la bóveda no afecta de manera sensible en la norma de energía [7].

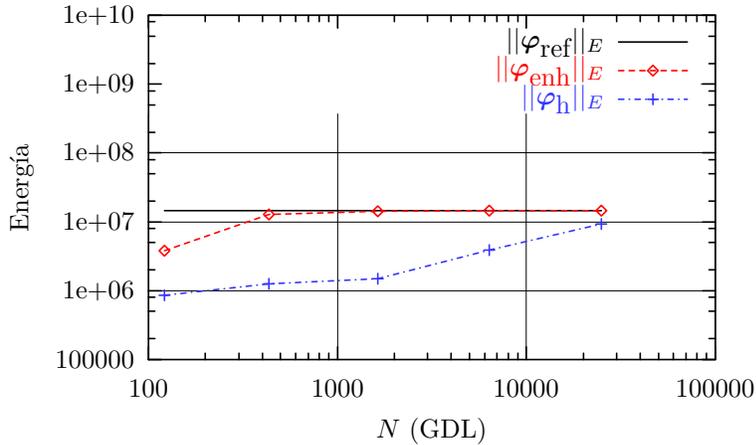


Figura 2: Variación de la norma de energía frente al número de grados de libertad sin considerar refinamiento en el espesor de la bóveda.

Las figuras 3 y 4 muestran la evolución del error global estimado en términos del número de grados de libertad. El error teórico se calcula como la diferencia entre la norma energética de referencia y la norma energética calculada con elementos isoparamétricos. Finalmente, la figura 5 muestra los contornos de error local obtenidos con dos de las mallas consideradas.

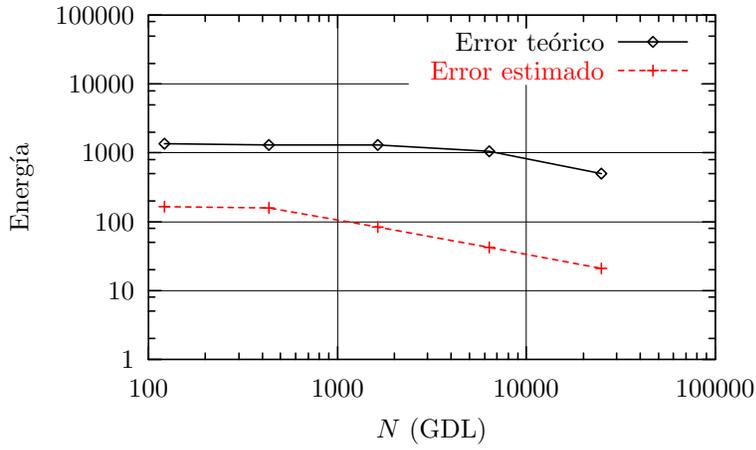


Figura 3: *Evolución del error global frente al número de grados de libertad sin refinar en el espesor*

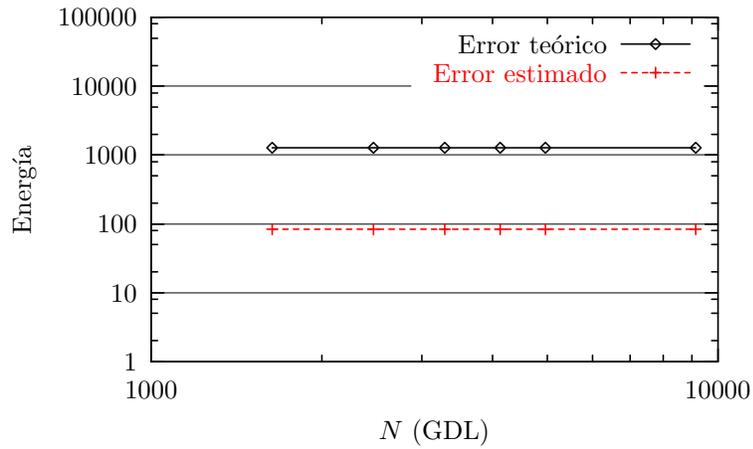


Figura 4: *Evolución del error global frente al número de grados de libertad refinando únicamente en el espesor*

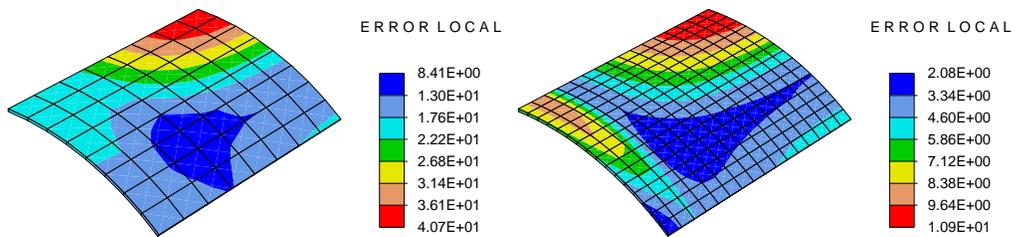


Figura 5: *Bóveda de Scordelis. Contornos de error local calculados con las mallas de  $8 \times 8 \times 1$  y  $16 \times 16 \times 1$  elementos*

## Elasticidad con grandes deformaciones. Ménsula hiperelástica

En este ejemplo se analiza la ménsula tridimensional de la figura 6, siendo sus dimensiones  $L = 3$ ,  $h = 1$  and  $b = 1$ . El borde  $AB$  tiene un desplazamiento impuesto igual al canto  $h$  de la viga, obteniéndose la malla deformada que se muestra en la figura 6. La función de densidad de energía interna, corresponde a un material neohookeano, y tiene la siguiente expresión:

$$W(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\lambda(\log J)^2 - \mu \log(J) + \frac{1}{2}\mu(\text{tra}(\mathbf{C}) - 3) \quad (48)$$

siendo  $\mathbf{C}$  el tensor derecho de Cauchy,  $J$  el determinante del gradiente de deformaciones y  $(\lambda, \mu)$  los parámetros de Lamé cuyos valores para este ejemplo son  $\lambda = 11538,5$ ,  $\mu = 7692,3$ .

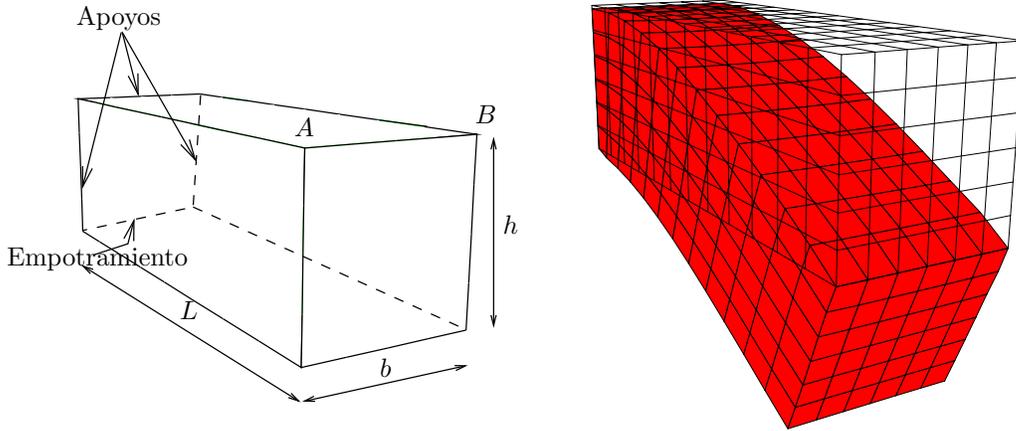


Figura 6: Ménsula hiperelástica. Geometría y condiciones de contorno.

Para la estimación de error se han considerado cinco mallas de  $2 \times 2 \times 1$ ,  $4 \times 2 \times 2$ ,  $8 \times 4 \times 4$ ,  $12 \times 6 \times 6$  y  $16 \times 8 \times 8$  elementos según la directriz, el canto y el espesor respectivamente.

La figura 7 muestra los valores de la norma de la energía obtenidos con elementos mejorados y el error global estimado al final del proceso de carga, frente al número de grados de libertad. De acuerdo con la recta de referencia dibujada, el error estimado predice una tasa de convergencia aproximadamente igual a  $1/2$ .

Finalmente, la figura 8 muestra los contornos de error local al final del proceso de carga para algunas de las mallas empleadas en el análisis. Los valores más altos se obtienen en el borde empotrado y en el borde con el desplazamiento impuesto.

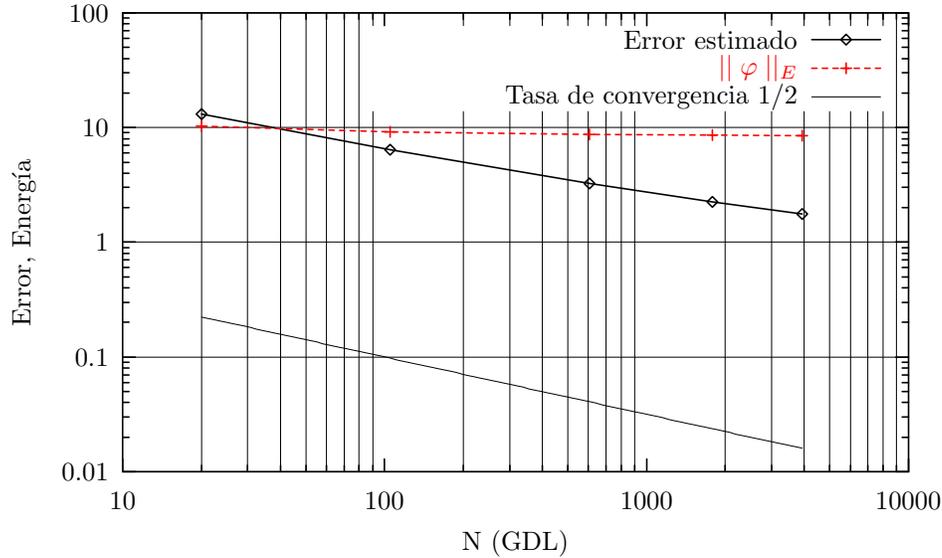


Figura 7: *Ménsula hiperelástica. Evolución del error global y norma energética frente al número de grados de libertad.*

### Plasticidad. Talud inclinado $45^\circ$

En este último ejemplo se analiza el error de discretización en un talud inclinado  $45^\circ$  suponiendo condiciones de deformación plana. Las dimensiones del modelo y las condiciones de contorno se muestran en la figura 9. El talud, sometido a una carga gravitatoria creciente, se apoya sobre una superficie rígida sin que exista desplazamiento relativo entre ambos. Para estimar el error se han considerado cinco mallas de  $6 \times 6$ ,  $12 \times 12$ ,  $24 \times 24$ ,  $36 \times 36$  y  $48 \times 48$  elementos.

Se supone que el proceso de carga se realiza sin drenaje con lo que las deformaciones se producen manteniéndose constante su componente volumétrica. Los valores tomados para las constantes elásticas son un módulo de Young  $E = 2 \cdot 10^8$  y un coeficiente de Poisson  $\nu = 0,25$ . El material se supone que tiene comportamiento elastoplástico sin ángulo de fricción y con una cohesión inicial  $c = 2000$ . Se considera un módulo de endurecimiento isótropo  $H = 2 \cdot 10^3$  que relaciona la tensión de fluencia con la deformación plástica efectiva.

La evolución del desplazamiento del punto  $A$  (ver figura 9) a lo largo del proceso de carga se muestra en la figura 10. El valor de referencia de la carga volumétrica es 2000. En todos los análisis se obtiene una carga límite.

En la figura 11 se muestra el estimador de error global frente al número

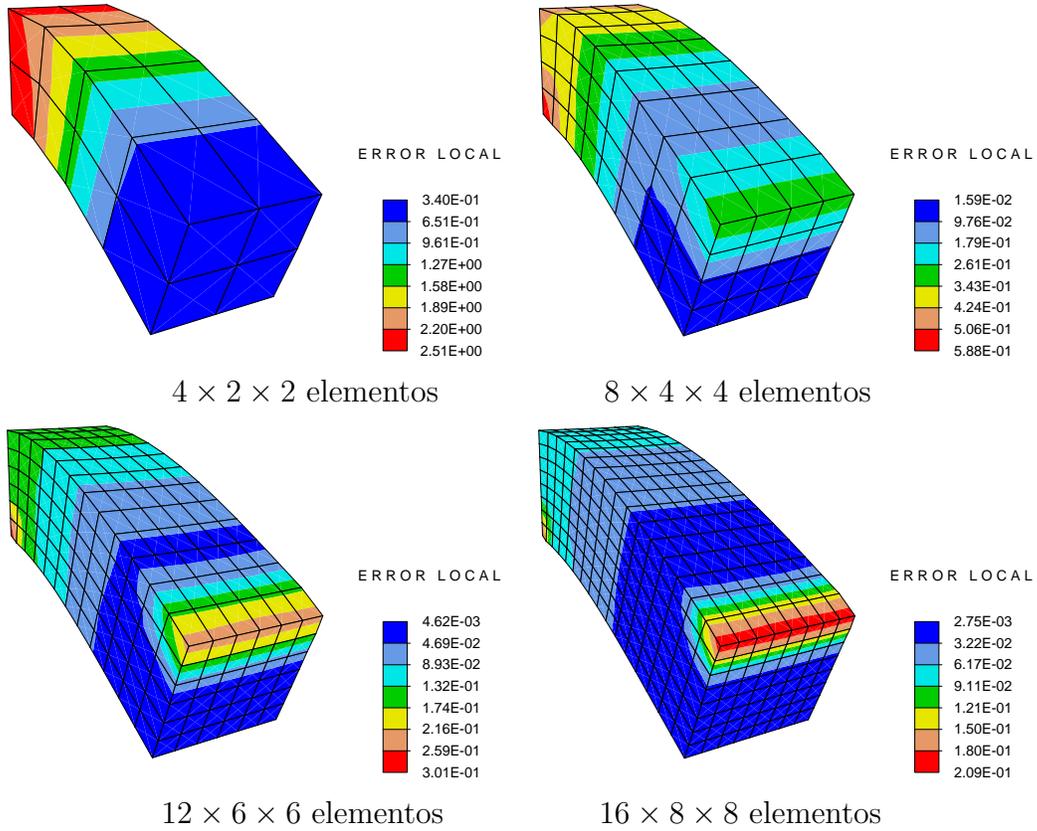


Figura 8: *Ménsula hiperelástica. Contornos de error local.*

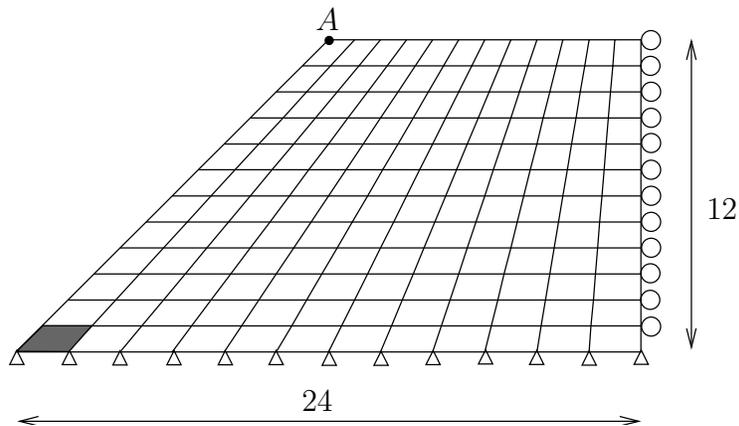


Figura 9: *Talud sin drenaje. Geometría y condiciones de contorno.*

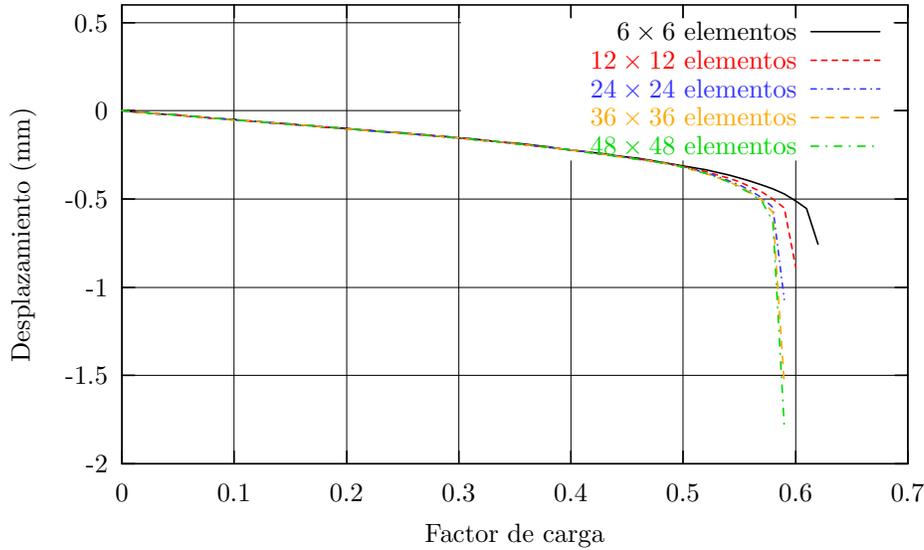


Figura 10: *Talud sin drenaje. Desplazamiento de la esquina superior izquierda frente al factor de carga.*

de grados de libertad. La tasa de convergencia obtenida es aproximadamente igual a  $1/8$  para el primer refinamiento. Es necesario destacar que según se refina la malla la energía interna aumenta mientras que el error global disminuye.

Las figuras 12 y 13 muestran la evolución de las componentes elástica y plástica del error acumulado en el elemento inferior izquierdo (sombreado en la figura 9). Estos valores se han calculado considerando la descomposición aditiva expresada en (46). Ambas componentes decrecen según se refina la malla. Asimismo, las dos componentes aumentan durante el proceso de carga siendo similares sus ordenes de magnitud. Estas conclusiones son similares a las obtenidas en otros ejemplos analizados por los autores [6, 7].

Finalmente, en la figura 14 se muestran los contornos de error local calculados para un factor de carga 0,53. El valor del error local decrece a lo largo del proceso de refinamiento y tiende a concentrarse en la línea de deslizamiento.

## CONCLUSIONES

En este artículo se ha propuesto un estimador de error válido para problemas lineales y no lineales. Está basado en la contribución energética de los modos mejorados asociados a la formulación de elementos finitos con de-

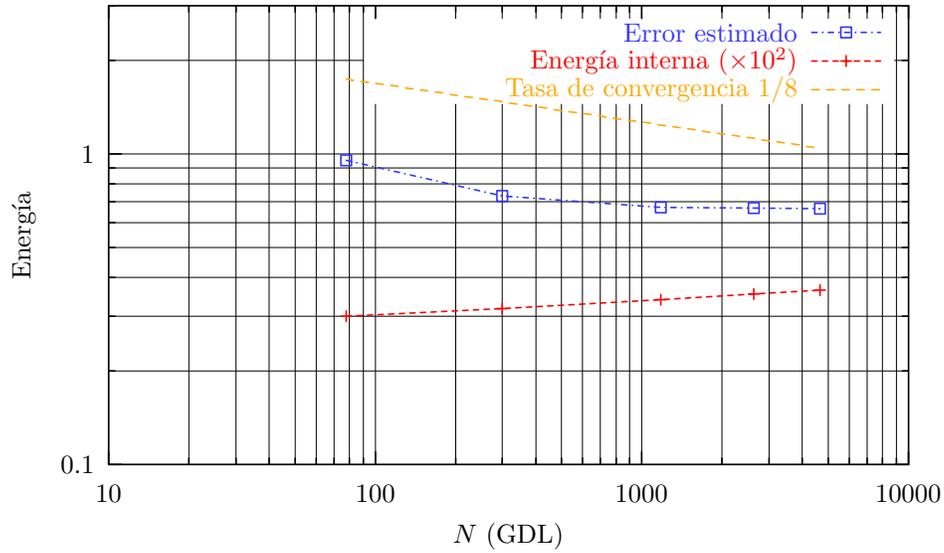


Figura 11: Talud sin drenaje. Error global frente al número de grados de libertad (factor de carga= 0,53).

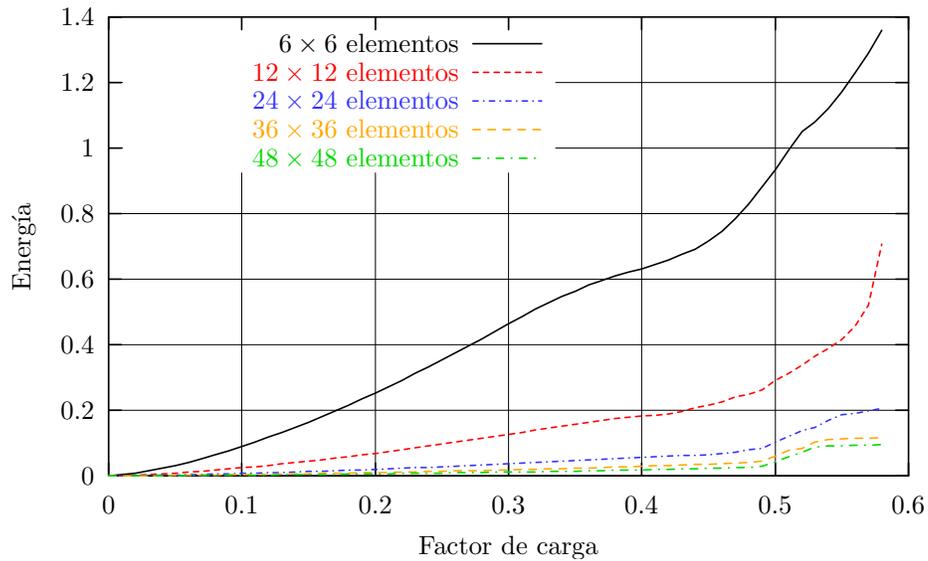


Figura 12: Talud sin drenaje. Evolución de la componente elástica del error local acumulado en el elemento inferior izquierdo.

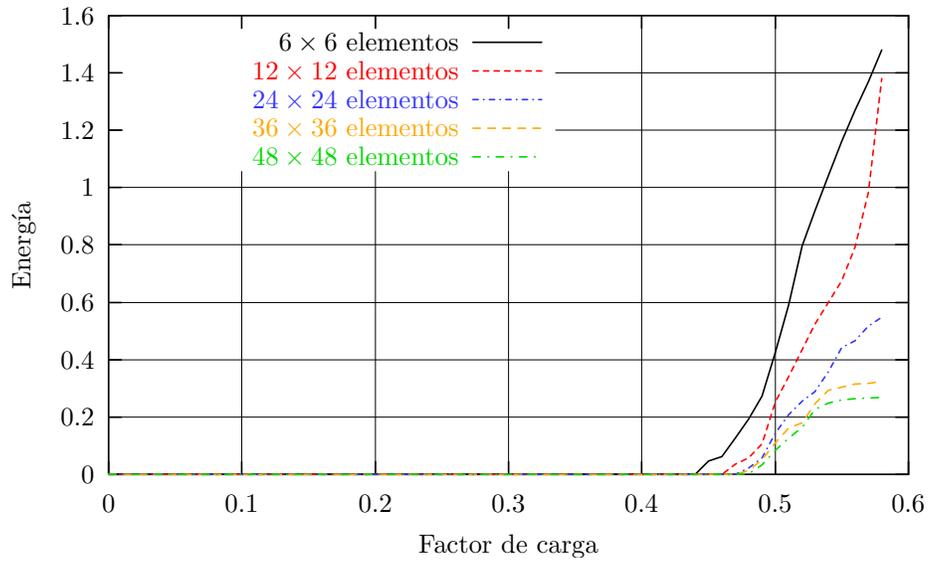


Figura 13: Talud sin drenaje. Evolución de la componente plástica del error local acumulado en el elemento inferior izquierdo.

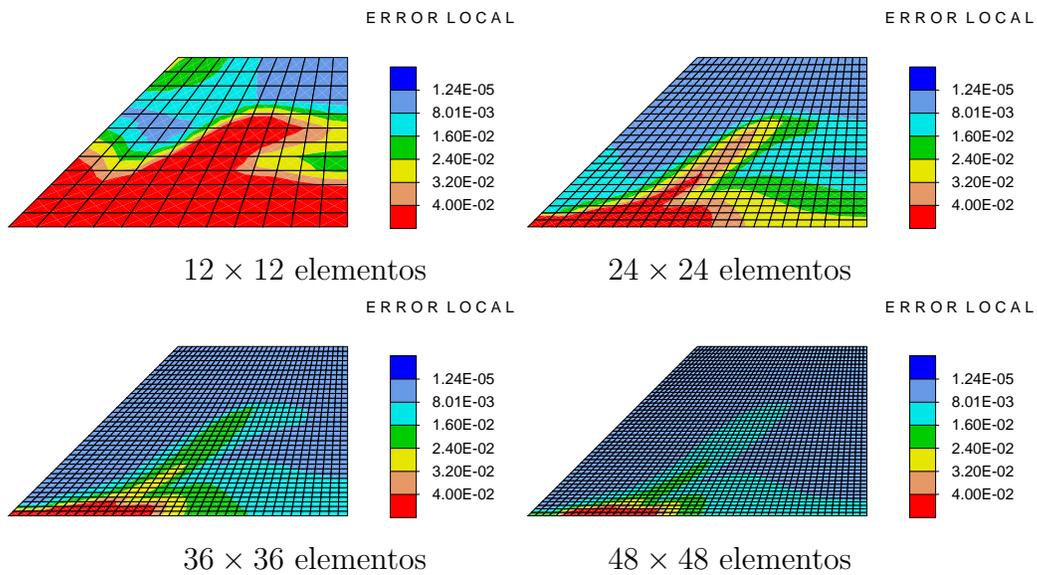


Figura 14: Talud sin drenaje. Contornos de error local (factor de carga= 0,53).

formaciones supuestas. En consecuencia, el error estimado es nulo para los modos de deformación de la prueba de la parcela. Se ha aplicado en problemas de elasticidad lineal, de elasticidad con deformaciones finitas y de plasticidad de Von Mises con pequeñas deformaciones.

El estimador evalúa el error para modelos de elementos finitos con formulación en desplazamientos, aplicando para ello la solución auxiliar calculada con elementos con deformaciones mejoradas. Desde el punto de vista de la implementación computacional únicamente es necesario calcular la solución con elementos mejorados. El estimador de error se obtiene mediante un algoritmo que se evalúa localmente, elemento por elemento, sin necesidad de técnicas de suavizado global. Este hecho lo hace particularmente simple y económico.

Las limitaciones del estimador propuesto están asociadas a los requisitos de convergencia expresados en (21), y al hecho de que en problemas no lineales se evalúa de manera monotónicamente creciente. Este último punto da lugar a que el error estimado no pueda disminuir a lo largo de ciertos caminos de carga que incluyan bifurcaciones o inestabilidades. Sin embargo, para diversas simulaciones numéricas analizadas en este y otros trabajos [6, 7], los resultados obtenidos son válidos en términos prácticos.

## Referencias

- [1] *ABAQUS. Theory Manual*. Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc, 1998.
- [2] Armero F, Glaser S. On the formulation of enhanced strain finite elements in finite deformations. *Engineering Computations* 1997; **14**:759–791.
- [3] Babuška I, Rheinboldt W. A posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1978; **12**:1597–1613.
- [4] Barthold F, Schmidt M, Stein E. Error indicators and mesh refinements for finite-element-computations of elastoplastic deformations. *Computational Mechanics* 1998; **22**(3):225–238.
- [5] Ciarlet P. *The finite element method for elliptic problems*. North Holland, 1978.
- [6] Gabaldón F. Métodos de elementos finitos mixtos con deformaciones supuestas en elastoplasticidad. Tesis Doctoral, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid. 1999.

- [7] Gabaldón F and Goicolea, J. Error estimation based on non-linear enhanced assumed strain elements. In *Proceedings of ECCOMAS 2000*. 11–14 September. Barcelona, Spain. 2000.
- [8] Johnson C, Hansbo P. Adaptive finite element methods in computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1992; **101**:143–181.
- [9] Ortiz M, Quigley J. Adaptive mesh refinement in strain localisation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1991; **90**:781–804.
- [10] Ortiz M, Stainier L. The variational formulation of viscoplastic constitutive updates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1999; **171**(3–4):419–444
- [11] Radovitzky R, Ortiz M. Error estimation and adaptive meshing in strongly nonlinear dynamic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1998; **172**(1–4):203–240.
- [12] Scordelis A, Lo K. Computer analysis of cylindrical shells. *Journal of American Concrete Institute* 1969; **61**:539–561.
- [13] Simó J, Armero F. Geometrically nonlinear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1992; **33**:1413–1449.
- [14] Simó J, Armero F, Taylor, R. Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3d finite deformation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1993; **110**:359–386.
- [15] Simó J, Rifai, S. A class of mixed assumed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1990; **29**:1595–1638.
- [16] Stein E, Schmidt M, Barthold F. Theorie und algorithmen adaptiver fe-methoden für elastoplastische deformationen. In *Adaptive finite element methoden in der angewandten mechanik*. 1997.
- [17] Washizu K. *Variational Methods in Elasticity & Plasticity* (3st edn). Pergamon Press, 1982.