ANÁLISIS DE MECANISMOS CON CUERPOS RÍGIDOS Y DEFORMABLES EN RÉGIMEN NO LINEAL

Juan Carlos García Orden, José M. Goicolea, Juan José Arribas

E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Madrid,
Ciudad Universitaria, 28040 Madrid
e-mail: `juan@carpanta.caminos.upm.es`
www: `filemon.caminos.upm.es`

Resumen

En el presente trabajo se plantea una metodología para el estudio dinámico de mecanismos que incluyen cuerpos rígidos y deformables en régimen no lineal (grandes deformaciones) con coordenadas inerciales. El sistema global se subdivide en dos subsistemas: uno formado por los cuerpos rígidos y otro por los deformables. El primero está determinado por las coordenadas de los puntos de unión más ciertos puntos o vectores auxiliares (coordenadas naturales) y en el segundo se realiza una discretización espacial de elementos finitos en la que las incógnitas son las posiciones de los nodos expresadas en el sistema inercial. Posteriormente se hace una diferenciación de las restricciones: algunas que pertenecen exclusivamente a los cuerpos rígidos, otras a los deformables y hay un tercer grupo que expresa la uniones de los rígidos con los deformables. Todo se ensambla en un único sistema de ecuaciones que se integra con un esquema implícito. El planteamiento anterior se detalla para el caso en que el cuerpo deformable sea tipo barra. Para este caso se proporcionan al final algunos ejemplos de aplicación.

1. INTRODUCCION

En un gran número de aplicaciones en ingeniería es necesario estudiar el comportamiento dinámico de mecanismos compejos. En las situaciones más tradicionales, estos mecanismos están compuestos por cuerpos rígidos interconectados que se mueven bajo la acción de diversas fuerzas externas. Pero cada vez con más frecuencia aparecen situaciones en las que la deformabilidad de algunos de los cuerpos es importante y sus efectos cruciales en el comportamiento dinámico global. Es el caso de estructuras espaciales esbeltas, vehículos sometidos a impacto, etc. En el presente trabajo se plantea una metodología para el estudio dinámico de mecanismos de estas características.
A grandes rasgos, los métodos de análisis para este tipo de mecanismos han seguido tres grandes líneas [4]:

- *Métodos simplificados*, en los que el movimiento como sólido rígido está totalmente desacoplado con el de deformación. El problema de estos métodos es que sólo consiguen resultados realistas cuando las deformaciones son pequeñas.

- *Métodos de síntesis de componentes*, en los que se supone un movimiento "nominal" de sólido rígido al que se superpone el movimiento como deformable mediante una combinación lineal de varios modos de vibración. Son atractivos por su generalidad, pero fallan cuando hay grandes deformaciones respecto del cuerpo rígido "nominal".

- Métodos basados en *coordenadas inerciales*, que tratan el movimiento conjunto como sólido rígido y el de deformación respecto de un sistema inercial fijo. Son atractivos ya que no ofrecen limitaciones en cuanto a magnitud de deformación. Como contrapartida, son normalmente menos eficientes debido al gran número de variables involucradas en el cálculo.

A continuación se propone una metodología basada en coordenadas inerciales que permite tratar las no linealidades ligadas tanto a las grandes deformaciones como a las propiedades del material. Para ello se hace uso de una formulación dinámica altamente eficiente en mecanismos de sólidos rígidos (penalización) dentro de la cual se acopla un modelo de elementos finitos para la modelización de los cuerpos deformables. Ello conduce a una formulación compacta que permite el estudio de mecanismos muy generales con cuerpos que se deformen de forma arbitraria.

2. MODELO NUMERICO

Elección de coordenadas.- Se considera un mecanismo formado por varios cuerpos rígidos y varios deformables unidos entre sí por distintos tipos de uniones (rótulas esféricas, uniones cilíndricas, prismáticas, etc.). Para los cuerpos rígidos se opta por las llamadas coordenadas naturales [1] y los deformables se discretizan de forma que sus coordenadas son las propias coordenadas cartesianas de los nodos respecto del sistema inercial. El vector que contiene las coordenadas cartesianas de todos los cuerpos rígidos se denota $\mathbf{q}_R$ y el que contiene las coordenadas nodales de todos los cuerpos deformables se denota $\mathbf{q}_D$.

Todas las coordenadas se ensamblan en un solo vector $\mathbf{q}$ que será el vector incógnita de nuestro sistema.

Formulación dinámica.- Definiendo la función Lagrangiana $L = T - V$, siendo T la energía cinética y V la energía potencial de todo el sistema, la ecuación dinámica es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \left(\partial_{\mathbf{q}}\boldsymbol{\Phi}\right)^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f}_{ex} \tag{1}$$

donde $\mathbf{q}$ es el vector incógnita global, $\boldsymbol{\Phi}$ el es vector de ecuaciones de restricción, $\boldsymbol{\lambda}$ el vector de multiplicadores de Lagrange y $\mathbf{f}_{ex}$ el vector que incluye las fuerzas exteriores y todas aquellas que no derivan de un potencial.

Para sistemas mecánicos cuya energía cinética toma la forma $T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}$ siendo $\mathbf{M}$ una matriz constante, y con la energía potencial del tipo $V = V(\mathbf{q})$, la ecuación (1) puede escribirse:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \left(\partial_{\mathbf{q}}\boldsymbol{\Phi}\right)^T \boldsymbol{\lambda} = -\partial_{\mathbf{q}}V + \mathbf{f}_{ex} \tag{2}$$

en la que el término $(\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{\Phi})^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}}$ es el vector de fuerzas de restricción y $\partial_{\mathbf{q}}V$ es el vector de fuerzas derivadas de un potencial.

Esta es la formulación dinámica clásica de sistemas mecánicos de sólidos rígidos. Nuestro propósito es aproximar el comportamiento de los cuerpos deformables por un sistema discreto susceptible de ser modelizado por una ecuación del tipo (2) mediante técnicas de elementos finitos. Una vez conseguido ésto, sólo resta añadir las ecuaciones de restricción entre los cuerpos rígidos y deformables y plantear un sistema de ecuaciones con la estructura de (2) cuya incógnita sea el vector de coordenadas global $\mathbf{q}$.

Restricciones.- Hay tres grupos de restricciones: restricciones de los sólidos rígidos, que expresan que las distancias relativas de cada punto del sólido se mantienen constantes, y que se agrupan en un vector $\mathbf{\Phi}_r(\mathbf{q}_R) = \mathbf{0}$; restricciones de los cuerpos deformables, que se agrupan en el vector $\mathbf{\Phi}_d(\mathbf{q}_D) = \mathbf{0}$, y restricciones que imponen las uniones entre los distintos cuerpos, que son $\mathbf{\Phi}_{JR}(\mathbf{q}_R) = \mathbf{0}$ (restricciones entre cuerpos rígidos), $\mathbf{\Phi}_{JD}(\mathbf{q}_D) = \mathbf{0}$ (entre cuerpos deformables) y $\mathbf{\Phi}_{RD}(\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_D) = \mathbf{0}$ (entre rígidos y deformables). En vista de lo anterior, las restricciones se pueden reagrupar de la siguiente forma:

- Restricciones que afectan exclusivamente a cuerpos rígidos: $\mathbf{\Phi}_r$ y $\mathbf{\Phi}_{JR}$ que se ensamblan en un único vector $\mathbf{\Phi}_R(\mathbf{q}_R) = \mathbf{0}$.
- Restricciones que afectan exclusivamente a cuerpos deformables: $\mathbf{\Phi}_d$ y $\mathbf{\Phi}_{JD}$ que se ensamblan en un único vector $\mathbf{\Phi}_D(\mathbf{q}_D) = \mathbf{0}$.
- Restricciones de acoplamiento entre rígidos y deformables $\mathbf{\Phi}_{RD}(\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_D) = \mathbf{0}$.

Por último, los vectores $\mathbf{\Phi}_R$, $\mathbf{\Phi}_D$ y $\mathbf{\Phi}_{RD}$ se pueden ensamblar en un único vector de restricciones $\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_D) = \mathbf{0}$.

Discretización de elementos finitos.- Se considera un cuerpo deformable sometido a un movimiento dado por $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{X}, t)$ que hace corresponder a cada punto $\boldsymbol{X}$ de la configuración indeformada otro punto $\boldsymbol{x}$ de la deformada. Este cuerpo se discretiza en n_{el} elementos, cada uno de ellos con un volumen V^0 en la configuración sin deformar y n_{nod} nodos. Las coordenadas de un punto $\boldsymbol{x}$ dentro del elemento se aproximan con una interpolación de las coordenadas de cada nodo i, $\boldsymbol{x}_i$ mediante unas funciones de forma $\mathbf{N}_i$ que dependen exclusivamente de las coordenadas $\boldsymbol{x}$ pero no del tiempo.

$$\boldsymbol{x}^e = \sum_{i=1}^{n_{nod}} \mathbf{N}_i(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{x}_i(t) = \mathbf{N}_e\mathbf{x}_a \tag{3}$$

donde $\mathbf{N}_e$ es la matriz de funciones de forma y $\mathbf{x}_a$ la matriz columna formada por las coordenadas cartesianas de todos los nodos del elemento.

La energía cinética aproximada del elemento viene dada por la expresión:

$$T_e = \frac{1}{2}\int_{V^0} \dot{\boldsymbol{x}}^e \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^e \rho_0\, dV^0 = \frac{1}{2}\rho_0 \dot{\mathbf{x}}_a^T \left(\int_{V^0} \mathbf{N}_e^T\mathbf{N}_e\, dV^0\right)\dot{\mathbf{x}}_a = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}_a^T\mathbf{M}_e\dot{\mathbf{x}}_a \tag{4}$$

siendo $\mathbf{M}_e$ la matriz de masas del elemento.

A continuación se establece una medida de la deformación que se expresa en función de las variables nodales. Se selecciona el tensor de Hencky ($\boldsymbol{H}$), definido como $\boldsymbol{H} = \ln(\boldsymbol{U})$ siendo $\boldsymbol{U}$ el tensor de elongación unitaria por la derecha y $\boldsymbol{R}$ el tensor de rotación resultantes de la descomposición polar del tensor gradiente de deformaciones $\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}$

La descomposición espectral del tensor de Hencky viene dada por:

$$\boldsymbol{H} = \sum_{i=1}^{3} (\ln \lambda_i)\, \boldsymbol{n}^{(i)} \otimes \boldsymbol{n}^{(i)}$$

siendo λ_i los autovalores de $\boldsymbol{U}$ (llamadas elongaciones unitarias principales) y $\boldsymbol{n}^{(i)}$ los autovectores correspondientes (direcciones principales de elongación).

El tensor de tensiones ($\boldsymbol{T}$) conjugado de $\boldsymbol{H}$ en sentido mecánico es el tensor de Kirchhoff ($\boldsymbol{\tau}$) rotado $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{R}$, siendo $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$ con $J = \det(\boldsymbol{F})$ y $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones de Cauchy. El planteamiento hiperelástico aquí seguido postula la existencia de una función de densidad de energía elástica por unidad de volumen en la configuración no deformada $W(\boldsymbol{H})$ de la forma $W = \frac{1}{2}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{D}_{el}\boldsymbol{H}$, siendo $\boldsymbol{D}_{el}$ un tensor constitutivo elástico de cuarto orden constante. De la expresión anterior se deduce la relación constitutiva:

$$\boldsymbol{T} = \partial_{\boldsymbol{H}} W = \boldsymbol{D}_{el}\boldsymbol{H} \tag{5}$$

con la energía potencial elástica total del elemento dada por $\Pi = \int_{V^0} W(\boldsymbol{H})\, dV^0$. La discretización espacial (3) permite aproximar el tensor $\boldsymbol{F}$ por $\boldsymbol{F}^e = \frac{\partial \boldsymbol{x}^e}{\partial \boldsymbol{x}_0^e}$, donde $\boldsymbol{x}_0^e$ es el vector aproximado de las coordenadas cartesianas de un punto intermedio del elemento en el instante inicial. Una vez que se dispone de $\boldsymbol{F}^e(\mathbf{x}_a)$, realizando la descomposición polar se puede llegar a una expresión para $\boldsymbol{H}^e(\mathbf{x}_a)$. Con el tensor de Hencky se llega a una expresión para la función de energía elástica $\Pi(\mathbf{x}_a)$ que permite hallar el vector de fuerzas nodales conjugadas del elemento $\mathbf{f}^e = \partial_{\mathbf{x}_a}\Pi$.

Por último, queda ensamblar los vectores de coordenadas nodales, matrices de masas y vectores de fuerzas nodales de todos los elementos que componen el cuerpo deformable para formar vectores, matrices y funciones globales del cuerpo. Para un cuerpo deformable determinado, al que asignamos el subíndice I, tenemos un vector de coordenadas nodales $\mathbf{q}_I$, una matriz de masas $\mathbf{M}_I$ que se deriva de una función de energía cinética $T_I(\dot{\mathbf{q}}_I) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}_I^T M_I \dot{\mathbf{q}}_I$, una función de energía potencial elástica $\Pi_I(\mathbf{q}_I)$ y un vector de fuerzas nodales $\mathbf{f}_I = \partial_{\mathbf{q}_I}\Pi_I$

Teniendo en cuenta que en el mecanismo puede haber varios cuerpos deformables, se puede hacer un ensamblaje final en el que:

- Las coordenadas cartesianas de cada cuerpo deformable ($\mathbf{q}_I, \mathbf{q}_{II}, ...$) se agrupan en un único vector de coordenadas $\mathbf{q}_D$.

- Las matrices de masas ($\mathbf{M}_I, \mathbf{M}_{II}, ...$) se ensamblan en una única matriz $\mathbf{M}_D$ constante tal que la energía cinética total de los cuerpos deformables se puede expresar como

$$T_D = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}_D^T \mathbf{M}_D \dot{\mathbf{q}}_D \tag{6}$$

- Los vectores de fuerzas internas ($\mathbf{f}_I = \partial_{\mathbf{q}_I} W_I$, $\mathbf{f}_{II} = \partial_{\mathbf{q}_{II}} W_{II}$,...) se agrupan en un vector de fuerzas nodales $\mathbf{f}$. Se puede entonces construir una función de energía potencial elástica $\Pi(\mathbf{q}_D)$ tal que

$$\mathbf{f} = \partial_{\mathbf{q}_D} \Pi \tag{7}$$

Ecuaciones de Lagrange.- Para el subsistema formado por los cuerpos rígidos es aplicable la expresión (2), ya que las coordenadas naturales conducen a una matriz de masas constante cuyo cálculo no se detalla aquí [6]. También para el subsistema deformable es válida, según se desprende de las expresiones (6) y (7). El acoplamiento entre ambos subsistemas viene expresado por el vector $\mathbf{\Phi}_{RD}$ de restricción. La ecuación (2) puede entonces expresarse de forma particionada:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{M}_R & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{M}_D \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \ddot{\mathbf{q}}_R \\ \hline \ddot{\mathbf{q}}_D \end{array}\right) + \underbrace{\left(\begin{array}{c} \mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}}^A(\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_D) \\ \hline \mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}}^B(\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_D) \end{array}\right)}_{\mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}}} = -\left(\begin{array}{c} \partial_{\mathbf{q}_R} V_R \\ \hline \mathbf{f} \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} \mathbf{f}_{ex_R} \\ \hline \mathbf{f}_{ex_D} \end{array}\right) \tag{8}$$

donde $\mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}}^A$ y $\mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}}^B$ tienen la estructura:

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}}^A(\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_D) \\ \hline \mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}}^B(\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_D) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}_R}(\mathbf{q}_R) \\ \hline \mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}_D}(\mathbf{q}_D) \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} \mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}_{RD}}^R(\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_D) \\ \hline \mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}_{RD}}^D(\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_D) \end{array}\right)$$

siendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}_R}(\mathbf{q}_R) &= \partial_{\mathbf{q}_R} \mathbf{\Phi}_R \boldsymbol{\lambda}_R \\ \mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}_D}(\mathbf{q}_D) &= \partial_{\mathbf{q}_D} \mathbf{\Phi}_D \boldsymbol{\lambda}_D \\ \mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}_{RD}}^R(\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_D) &= (\partial_{\mathbf{q}_R} \mathbf{\Phi}_{RD})^T \boldsymbol{\lambda}_{RD}^R \\ \mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}_{RD}}^D(\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_D) &= (\partial_{\mathbf{q}_D} \mathbf{\Phi}_{RD})^T \boldsymbol{\lambda}_{RD}^D \end{aligned}$$

El sistema (8) junto con la condición $\mathbf{\Phi} = \mathbf{0}$ forma un sistema algebraico-diferencial cuyas incógnitas son los vectores $\mathbf{q}$ y $\boldsymbol{\lambda}$.

Mediante el método de penalización, el sistema anterior puede transformarse en uno puramente diferencial aproximando el vector de fuerzas de restricción global con la expresión:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}} = (\partial_{\mathbf{q}} \mathbf{\Phi})^T \boldsymbol{\lambda} \simeq (\partial_{\mathbf{q}} \mathbf{\Phi})^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{\Phi}$$

donde $\boldsymbol{\alpha}$ es la matriz de penalización. Esta aproximación tiene dos inconvenientes importantes: el primero es que las restricciones nunca se cumplen ($\mathbf{\Phi} \neq \mathbf{0}$) aunque teóricamente la diferencia puede hacerse tan pequeña como se quiera sin más que escoger unos valores α_{ij} suficientemente grandes. La segunda es que estos valores altos de α_{ij} hacen que el problema esté mal condicionado desde el punto de vista numérico, ya que introducen una componente de alta frecuencia que se añade a la introducida por las altas rigideces de los cuerpos deformables. Esto le confiere un carácter "stiff" que condicionará el tipo de algoritmo de integración a emplear.

Integración temporal.- El sistema de ecuaciones resultante, escrito de forma compacta es:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{\Phi})^T \boldsymbol{\alpha}\mathbf{\Phi} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t) \tag{9}$$

El carácter "stiff" de esta ecuación obliga a escoger un algoritmo implícito [3], y su no linealidad induce a adoptar un esquema iterativo.

El algoritmo elegido es el Hilber, Hughes, Taylor (HHT), de probada eficiencia en el ámbito de la dinámica estructural. El sistema no lineal de ecuaciones algebraicas que resulta es resuelto mediante una iteración de tipo Newton-Raphson (o alternativamente Newton-Raphson modificado). Adicionalmente, se ha implementado una estrategia de paso variable basada en un criterio de convergencia en residuo.

Modelización de impactos.- Se consideran solamente impactos contra paredes rígidas, y se desea que haya plena compatibilidad cinemática, es decir, que no haya penetración. Esta última condición elimina automáticamente el modelo clásico de penalización.

El modelo de impacto comprende las tres fases clásicas de detección, predicción y correción. En la fase de corrección, el punto $(\mathbf{r}_1)$, del nodo que ha penetrado se lleva a la pared según la normal hasta ocupar la posición $\mathbf{r}_2$, la velocidad $(\mathbf{V}_1)$ pasa a ser $\mathbf{V}_2 = \frac{1}{h}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ y la aceleración $(\mathbf{a}_1)$ a $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{h}(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)$.

3. PARTICULARIZACION PARA CUERPOS TIPO BARRA

Se consideran cuerpos deformables tipo barra inmersos en el espacio tridimensional. Los únicos esfuerzos admisibles son los de tracción - compresión, estando excluidos la flexión y la torsión, y la única deformación de interés práctico es la que sufren longitudinalmente.

Cada elemento en que se discretiza el cuerpo está limitado por dos nodos, y el vector de restricciones $\mathbf{\Phi}_d(\mathbf{q}_D) = \mathbf{0}$ expresa que todos los elementos de que se compone el cuerpo deben mantenerse en todo momento alineados. Para un elemento cualquiera, las coordenadas de un punto interior vienen dadas por la interpolación (3), en este caso:

$$\mathbf{x} = N_1\mathbf{x}_1 + N_2\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} N_1 & \Big| & N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \hline \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 & \xi \end{array}\right)}_{\mathbf{N}_e} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \hline \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_e}$$

donde $\xi \in [0, 1]$. Si el elemento tiene una sección y longitud iniciales A_0 y l_0, sustituyendo $\mathbf{N}_e$ en la ecuación (4) y haciendo $dV^0 = A_0 l_0 \, d\xi$ se obtiene la matriz de masas consistente clásica de elementos tipo "truss". En la práctica, esta matriz se sustituye por una concentrada (diagonal) que ofrece importantes ventajas numéricas y no introduce imprecisiones importantes [2].

La dirección de elongación principal que nos interesa es la dirección de la propia barra, y la elongación unitaria principal $\lambda = \frac{l}{l_0}$ es el acortamiento o alargamiento que sufre el elemento que inicialmente mide l_0 y pasa a medir l. El correspondiente autovalor del tensor de Hencky vale $\ln\lambda$, que es la deformación logarítmica o natural. La energía de deformación tiene la expresión:

$$\Pi = \frac{1}{2} E A_0 l_0 (\ln \lambda)^2$$

siendo E el módulo elástico del material. El vector conjugado de fuerzas nodales resulta:

$$\mathbf{f}_{int} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}_a} = \frac{\partial \Pi}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}_a} = A_0 E \frac{1}{\lambda} (\ln \lambda) \left(\mathbf{N}_{e,\xi} \right)^T \frac{\boldsymbol{l}}{l} \tag{10}$$

que como era de esperar es una fuerza aplicada en la dirección longitudinal de la barra ($\boldsymbol{l}$).

4. EJEMPLOS DE APLICACION

Impacto oblicuo de una barra.- Una barra se lanza con un cierto ángulo θ contra una pared rígida vertical con una velocidad horizontal inicial V_0. La pared rígida es el plano $x = 0$ e inicialmente la barra está contenida en el plano $X - Z$, tal y como se muestra en la Fig.[1]. La barra, que inicialmente tiene solamente un movimiento de traslación hacia la pared, queda después del impacto con un movimiento combinado de traslación y rotación alrededor de su centro de masas.

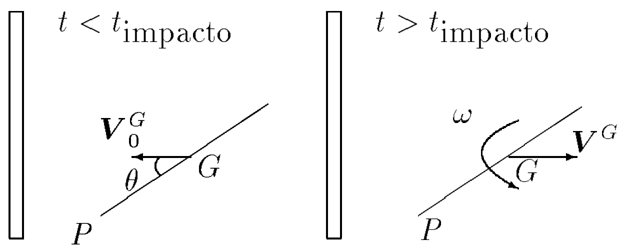

Figura 1: *Impacto oblicuo.*

El modelo teórico [6] predice que para un ángulo de incidencia $\theta = 35.26°$ la barra pierde su movimiento de traslación y se queda girando a la velocidad angular adimensional máxima posible, que es algo menos de 3.5. Es éste el caso que se estudia con el modelo numérico, con paso de tiempo variable y sin amortiguamiento numérico, y que se muestra en el lado izquierdo de la Fig.[2].

Se aprecia que el centro de masas no llega a detenerse, y que tampoco la velocidad de rotación alcanza su valor previsto. Con el fin de explicar este resultado se efectúa un análisis energético, desglosando la energía total de la barra en Energía Cinética de traslación como sólido rígido (E_{ct}), Energía Cinética de rotación (E_{cr}), Energía Cinética de vibración longitudinal (E_{cv}) y Energía Potencial elástica (E_e):

$$E_{Total} = \frac{1}{2} M (\mathbf{V}^G)^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\mathbf{V}_{i_l})^2 + \sum_{i=1}^{nel} \frac{1}{2} E A_i l_i {\epsilon_i}^2$$

En la parte izquierda de la Fig.[3] se muestra la evolución de cada uno de los términos anteriores en el ensayo.

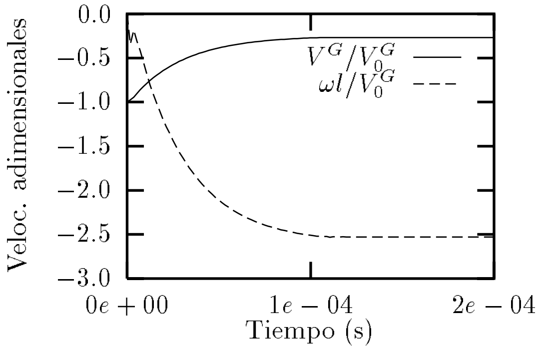

Figura 2: *Impacto oblicuo. Modelo numérico.* $\theta = 35.2°$

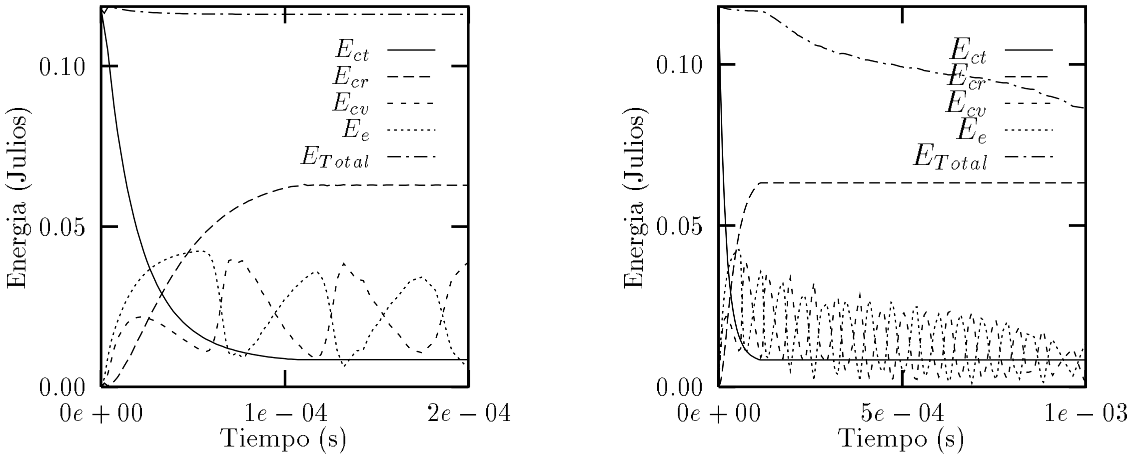

Figura 3: *Impacto oblicuo. Energía vs. Tiempo*

Se aprecia que durante el impacto la energía se invierte en dar a la barra un movimiento de sólido rígido *y además* una cierta energía de deformación, que a su vez tiene una componente de energía cinética de vibración y otra de energía potencial elástica.

En la parte derecha de la Fig.[3] se muestran los resultados obtenidos con una discretización más fina, introduciendo un amortiguamiento numérico después del impacto ($t > 1.18 \cdot 10^{-4}$ s.) e integrando un periodo de tiempo mayor ($T_{total} = 10 \cdot 10^{-4}$ s.).

De esta última figura se puede observar que el amortiguamiento numérico afecta al movimiento de mayor frecuencia, que es el de vibración como cuerpo deformable, y deja inalterado el de sólido rígido, que es de frecuencia mucho menor.

Péndulo triangular con una barra deformable.- En este ensayo se pretende evaluar la eficiencia de la metodología propuesta para tratar problemas en los que el movimiento relevante es exclusivamente el de sólido rígido.

El mecanismo está compuesto por cuatro barras rígidas y una deformable, y todas ellas se mueven en el espacio tridimensional. La barra deformable se encuentra situada en el lado inferior del triángulo, y está discretizada en diez elementos de igual longitud. Todas las uniones son rótulas esféricas y la única fuerza externa es la gravedad. Una de las barras tiene un punto fijo en la parte superior.

En la Fig.[4] se muestran algunas instantáneas del movimiento de caída libre.

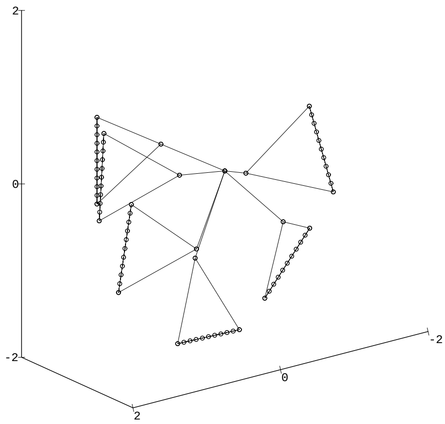

Figura 4: *Ensayo de caída libre*

Cada barra tiene una masa de 1 Kg., una longitud de 1 m. y la barra deformable una rigidez $EA_0 = 1 \cdot 10^5$ N. El modelo se integra con HHT introduciendo un cierto amortiguamiento numérico que filtra las frecuencias más altas asociadas al cuerpo deformable. Se emplea una estrategia de paso variable, y la salida se muestrea cada $5 \cdot 10^{-2}$ s. mediante interpolación lineal de los puntos calculados.

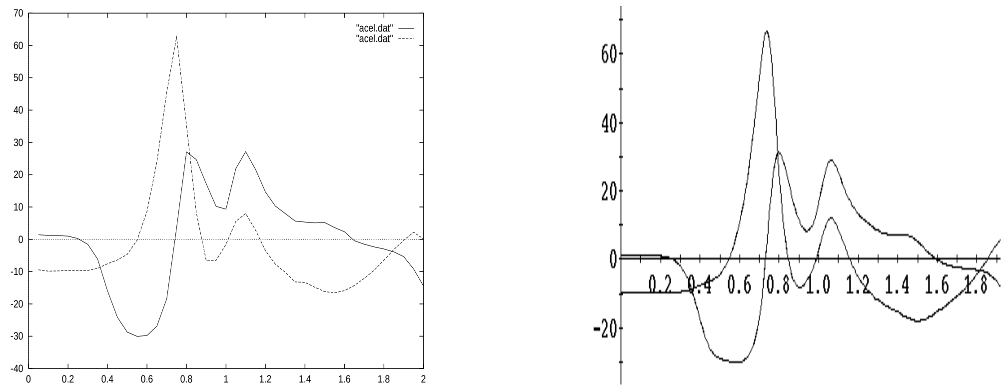

Figura 5: *Aceleración horizontal y vertical vs. tiempo.*

A la izquierda en la Fig.[5] se muestra la evolución de las aceleraciones horizontal y vertical del del extremo izquierdo de la barra deformable. En la derecha de la misma figura se pueden ver las mismas magnitudes para un mecanismo similar tal y como resultan de un análisis realizado con un programa comercial de mecanismos de sólidos rígidos [7], en el que se ha sustituido la barra deformable por una rígida con las mismas características de inercia.

En las figuras anteriores se aprecia que la concordancia de los resultados obtenidos con ambos modelos es excelente.

5. CONCLUSIONES

A grandes rasgos, la metodología propuesta presenta las siguientes características:

- Es válida para grandes deformaciones y para cuerpos deformables de geometría arbitraria y comportamiento no lineal del material. La utilización de técnicas de elementos finitos permite además introducir de forma natural comportamientos de tipo elastoplástico.
- Aunque el número de variables involucradas es elevado, muchas de las matrices que intervienen en los cálculos son dispersas, lo que hace posible introducir algoritmos especiales de optimización que reducen considerablemente el tiempo de cálculo.
- Es conveniente adoptar estrategias de paso variable que, combinadas con un cierto amortiguamiento numérico, permitan disminuir el paso en fases del movimiento en las que la dinámica predominante sea la de deformación y aumentarlo en aquellas en que predomine el movimiento como sólido rígido y sea deseable prescindir de la componente de alta frecuencia del cuerpo deformable.

Para finalizar, en la aplicación a cuerpos tipo barra los resultados son altamente satisfactorios. Hay una buena correlación entre los modelos teóricos y los numéricos tanto en el caso de la modelización de un solo cuerpo deformable como cuando éste es un mero componente de un mecanismo más extenso en que coexiste con varios sólidos rígidos.

Referencias

[1] Garcia de Jalón, J. Bayo, E., Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems. The Real Time Challenge. Springer-Verlag 1994.

[2] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., The Finite Element Method. Volumes I and II. McGraw-Hill 1991.

[3] Hairer, E., Wanner, G., Solving Ordinary Differential Equations II, Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer-Verlag. 1991.

[4] Avello, A. Dinámica de Mecanismos Flexibles con Coordenadas Cartesianas y Teoría de Grandes Deformaciones. Tesis Doctoral. 1990

[5] Shonauer, M., De Souza E.A., Owen. Hencky Tensor Based Enhaced Large Strain Element for Elasto-Plastic Analysis. Computational Plasticity. Preceedings of the Fourth International Conference in Barcelona, 3rd-6rd April, 1995.

[6] García Orden, J.C. Informe de Tesis. Marzo 1996.

[7] CEIT. COMPAMM User's Manual. Verison 3.0.c. Enero 1995.