ANÁLISIS DINÁMICO DE MECANISMOS CON CUERPOS RÍGIDOS Y DEFORMABLES MEDIANTE EL MÉTODO DE PENALIZACIÓN

Juan Carlos García Orden , Juan José Arribas

E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Madrid,
Ciudad Universitaria, 28040 Madrid
e-mail: `juan@filemon.mecanica.upm.es`
www: `http://filemon.mecanica.upm.es`

Resumen

Se plantea una metodología para el estudio dinámico de mecanismos que incluyen cuerpos rígidos y deformables en régimen no lineal (grandes deformaciones) con coordenadas inerciales. Se propone el método de penalización como el más adecuado para la inclusión de los cuerpos deformables discretizados mediante técnicas de elementos finitos en las ecuaciones dinámicas globales. Se obtiene entonces un único sistema de ecuaciones diferenciales que es integrado mediante un esquema implícito. A continuación se hace una revisión breve de la modelización de los distintos elementos del mecanismo, sean rígidos, deformables o restricciones, con la formulación de penalización. Por último, para el caso en que los cuerpos deformables son tipo barra, se presenta un ejemplo de aplicación.

1. INTRODUCCIÓN

El concepto popular de mecanismo es el de una colección de cuerpos rígidos interconectados mediante distintas uniones (pasivas, como rótulas esféricas, uniones cilíndricas, etc. o mediante elementos activos como muelles y amortiguadores) y sometido a diversas fuerzas externas. Sin embargo, cada vez son más frecuente las aplicaciones industriales en las que aparecen mecanismos con cuerpos de deformabilidad importante, y cuya influencia en la dinámica global es significativa. Este trabajo se centra en este último tipo de mecanismos.

En un caso general, algunos de los cuerpos que componen el mecanismo se acercan mucho al modelo perfectamente rígido (modelo discreto) y otros tienen que ser modelizados como deformables (modelo contínuo). Para poder tratar ambos tipos de cuerpos conjuntamente, se hace necesario transformar el modelo contínuo a discreto mediante algún tipo de técnica. La técnica que se usa en este trabajo es la de los elementos finitos [2], [3], que es la más potente y extendida en la actualidad.

De los métodos de análisis presentes en la literatura [5], [7], se ha escogido uno basado en la formulación de penalización con coordenadas inerciales. La motivación para ello es doble: por un lado, usar coordenadas inerciales es más versátil en cuanto que permite la definición de cuerpos que se deforman arbitrariamente (elásticamente o elasto-plásticamente) y no impone restricciones a la magnitud de las deformaciones. Por otro lado, el método de penalización simplifica el planteamiento conjunto de las ecuaciones que provienen de los cuerpos rígidos (modelo discreto) con las que provienen de los cuerpos deformables (modelo contínuo discretizado).

En el siguiente punto se describe a grandes rasgos el modelo numérico desarrollado. Detalles sobre este modelo (elección de coordenadas, planteamiento de restricciones, discretización de elementos finitos, formulación dinámica, integración temporal) puede encontrarse en [6].

2. MODELO NUMÉRICO

Haciendo uso de la formulación lagrangiana clásica, la ecuación dinámica global del mecanismo toma la forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{f}_{ex} \tag{1}$$

donde:

- L: Función Lagrangiana. $L = T - V$.
- $\mathbf{q}$: Vector posición incógnita global.
- $\mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}}$: Vector de fuerzas de restricción.
- $\mathbf{f}_{ex}$: Vector que engloba las fuerzas exteriores y aquellas que no derivan de un potencial.

El vector de fuerzas de restricción $\mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}}$, con el método de penalización, tiene la expresión:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}} = (\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{\Phi})^T \boldsymbol{\alpha} \Phi \tag{2}$$

donde $\mathbf{\Phi}$ es el vector de ecuaciones de restricción y $\boldsymbol{\alpha}$ es la matriz de penalización.

Para sistemas mecánicos cuya energía cinética toma la forma $T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}$ siendo $\mathbf{M}$ la matriz de masas constante, la ecuación (1) tiene el formato general, en forma compacta:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{q}) = \mathbf{Q}^{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) + \mathbf{Q}^t(t) \tag{3}$$

donde en cada término hay contribuciones tanto de los cuerpos deformables como de los rígidos.

Este sistema de ecuaciones es, en general, no lineal, y tiene además una peculiaridad: los elementos de la matriz de penalización son, en general, números muy grandes que dan un carácter "stiff" a la ecuación, por lo que hay que recurrir a un esquema implícito para su integración [4].

Cada paso de integración contiene un ciclo iterativo, que en el caso de Newton-Raphson implica el uso de una matriz tangente [1] basada en el resíduo y que tiene la expresión (aplicada al integrador β-Newmark):

$$\frac{1}{\beta h^2}\mathbf{M} + (\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{\Phi})^T \alpha (\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{\Phi}) - (\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{Q}^{\mathbf{q}}) \tag{4}$$

donde β es el parámetro de Newmark y h el paso de integración.

3. MODELIZACION DE ELEMENTOS Y RESTRICCIONES

Cada cuerpo y cada restricción del mecanismo tiene una modelización diferente, que se refleja en su contribución a los distintos términos de las ecuaciones (3) y (4).

Un aspecto a destacar es que las uniones entre los distintos cuerpos no se modelizan "per se", sino que se ha optado por modelizar restricciones geométricas a un nivel básico para luego, en base a ellas, definir cualquier tipo de unión como combinación de varias de estas restricciones elementales. En consecuencia, no se presentan modelos de rótula esférica, unión cilíndrica, etc., sino restricciones elementales como identidad de nodos, distancia constante entre dos nodos, etc.

Cuerpos rígidos Los cuerpos rígidos están definidos mediante las coordenadas cartesianas de varios de sus puntos, su masa y sus propiedades de inercia (momentos y productos de inercia).

Tiene tres contribuciones en las ecuaciones (3) y (4): a la matriz de masas $\mathbf{M}$ global, al vector de fuerzas de restricción $\mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}}$ y a la matriz tangente (4) a través del término $\left(\frac{1}{\beta h^2}\mathbf{M}\right) + \left((\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{\Phi})^T \alpha (\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{\Phi})\right)$.

En pricipio, sería deseable definir los cuerpos rígidos con el mínimo número de puntos, que es 3 (no alineados). Sin embargo, esto tiene el inconveniente de que la matriz de masas correspondiente no es constante [1]. Por el contrario, la definición con 4 puntos no coplanarios sí que genera una matriz de masas constante, cosa que a priori parece atractivo desde el punto de vista computacional, a pesar de que se aumente en 3 el número de incógnitas y el número de ecuaciones de restricción.

El cuerpo rígido definido con los 4 puntos i, j, k y l y con un sistema de ejes cuerpo con origen en i se muestra en la Fig.[1].

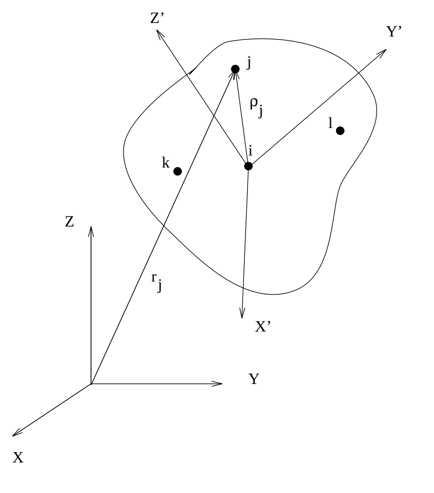

Figura 1: *Configuración general del sólido rígido*

La definición completa del cuerpo se realiza con los siguientes datos:

- $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_l$: coordenadas de cada punto respecto de un sistema inercial fijo.
- $\boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\rho}_l$: coordenadas de los puntos j, k, l respecto del i referidos al sistema de ejes cuerpo.

- m: masa del cuerpo.
- $\mathbf{J}_i$: tensor de inercia respecto del punto i expresado en ejes cuerpo.

Con esta nomenclatura, el vector de posición incógnita $\mathbf{q}$ que aparece en (3) es:

$$\mathbf{q}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_i & \mathbf{r}_j & \mathbf{r}_k & \mathbf{r}_l \end{pmatrix} \tag{5}$$

A continuación se esboza la deducción de los diferentes términos que aparecen en (3) y (4) con la formulación de penalización:

1. *Matriz de masas.*($\mathbf{M}$) Su deducción sigue, en líneas generales, la expuesta en [1]. Se impone, no obstante, el requisito de que uno de los puntos de definición sea el centro de gravedad del cuerpo, cosa que simplifica la formulación.

   Definiendo:

$$\mathbf{X} = \left[\; \boldsymbol{\rho}_j \;\; | \;\; \boldsymbol{\rho}_k \;\; | \;\; (\boldsymbol{\rho}_l - \boldsymbol{\rho}_j) \; \right] \tag{6}$$

$$\int_\Omega \rho d\Omega = m \qquad\qquad \mathbf{Z} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{J}_i\mathbf{X}^{-T} \tag{7}$$

   La expresión final de $\mathbf{M}$ resulta:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} (m + z_{11} + z_{22} + 2z_{12})\mathbf{I}_3 & (z_{23} - z_{12})\mathbf{I}_3 & -(z_{12} + z_{22})\mathbf{I}_3 & -(z_{13} + z_{23})\mathbf{I}_3 \\ sim. & (z_{11} + z_{33} - 2z_{13})\mathbf{I}_3 & (z_{12} - z_{23})\mathbf{I}_3 & (z_{13} - z_{33})\mathbf{I}_3 \\ sim. & sim. & z_{22}\mathbf{I} & z_{23}\mathbf{I}_3 \\ sim. & sim. & sim. & z_{33}\mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

2. *Vector de fuerzas* ($\mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}}$). Son fuerzas que se originan por las restricciones de distancia constante entre los puntos i, j, k y l. Este tipo de fuerzas se tratan con algo más de generalidad más adelante, al hablar de restricciones. El vector de restricción $\mathbf{\Phi}$ tiene la expresión:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 - L_{ij}^2 \\ |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|^2 - L_{ik}^2 \\ |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_l|^2 - L_{il}^2 \\ |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^2 - L_{jk}^2 \\ |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|^2 - L_{jl}^2 \\ |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|^2 - L_{kl}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{pmatrix} \tag{9}$$

   y el vector de fuerzas derivado de él se calcula con la relación (2). Como botón de muestra, el primer elemento del vector $\mathbf{f}_{\mathbf{\Phi}}$ tiene la forma:

$$f_{\Phi_1} = \alpha \left[2(x_i - x_j)\Phi_1 + 2(x_k - x_i)\Phi_2 + 2(x_l - x_i)\Phi_3 \right] \tag{10}$$

3. *Matriz tangente.* Término $\left(\frac{1}{\beta h^2}\mathbf{M}\right) + \left((\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{\Phi})^T \alpha (\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{\Phi})\right)$.

   El primer sumando $\left(\frac{1}{\beta h^2}\mathbf{M}\right)$ se construye de forma inmediata con la expresión de $\mathbf{M}$ dada en (8). El segundo sumando $\left((\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{\Phi})^T \alpha (\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{\Phi})\right)$ se calcula en base al vector $\mathbf{\Phi}$ dado en (9).

   Las expresiones detalladas son algo largas, pero el resultado final es una matriz simétrica de 12×12, aunque solo con 60 elementos diferentes debido a que poseee simetría por submatrices 3×3.

Elementos deformables Un elemento deformable está definido por una serie de nodos con una conectividad topológica entre ellos. En el caso tridimensional, estos nodos no están sujetos a restricciones, pero sí aparecen fuerzas internas entre ellos, derivadas del modelo contínuo correspondiente. En este caso, el elemento tiene tres contribuciones: a la matriz de masas global $\mathbf{M}$, al vector de fuerzas internas $\mathbf{Q}^{\mathbf{q}}$ y a la matriz tangente (4) a través del término $\left(\frac{1}{\beta h^2}\mathbf{M}\right) + (\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{Q}^{\mathbf{q}})$.

Si el elemento deformable es bidimensional, aparecen adicionalmente unas fuerzas de restricción que mantienen a todos los nodos en el mismo plano. En este caso aparecen contribuciones a través de los términos relacionados con un vector de restricciones $\mathbf{\Phi}$, que expresa la restricción del plano.

A continuación se presenta la modelización de un elemento deformable unidimensional, que está definido por:

- $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$: Coordenadas cartesianas de los nodos extremos del elemento referidos a un sistema inercial fijo.
- Masa (m) y Propiedades del material: Densidad (ρ), módulo elástico (E), tesión de fluencia (σ_Y), módulo de endurecimiento isótropo (H_i), módulo de endurecimiento cinemático (H_k).

Teniendo en cuenta lo anterior, el vector incógnita es $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_i \\ \mathbf{r}_j \end{pmatrix}$

Las contribuciones del elemento son:

1. *Matriz de masas.*($\mathbf{M}$) Particularizando la expresión correspondiente a una barra rígida en (8) se obtiene la matriz:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\mathbf{I}_3 & \frac{1}{6}\mathbf{I}_3 \\ \frac{1}{6}\mathbf{I}_3 & \frac{1}{3}\mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \tag{11}$$

2. *Vector de fuerzas* ($\mathbf{Q}^{\mathbf{q}}$). Son fuerzas internas debidas a la relación tensión-deformación del medio contínuo. Consideremos el caso más simple, el de material elástico: si la medida de deformación es la logarítmica, el módulo de la fuerza interna ($\mathbf{f}_{int}$) que aparece es [6]:

$$|\mathbf{f}_{int}| = |\mathbf{f}_{int}|_0 + A_0 E \frac{l_0}{l}\left(ln\frac{l}{l_0}\right) \tag{12}$$

siendo $\mathbf{l} = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$ y $l = |\mathbf{l}|$, donde el subíndice 0 indica magnitudes en el último paso de integración covergido. La expresión del vector de fuerzas es:

$$\mathbf{Q}^{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} |\mathbf{f}_{int}|\frac{\mathbf{l}}{l} \\ - \\ -|\mathbf{f}_{int}|\frac{\mathbf{l}}{l} \end{pmatrix} \tag{13}$$

3. *Matriz tangente.* Término $\left(\frac{1}{\beta h^2}\mathbf{M} - (\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{Q}^{\mathbf{q}})\right)$ El primer sumando se calcula inmediatamente con (11). El segundo sumando se calcula con la ayuda de (13), y tiene como expresión:

$$\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{Q}^{\mathbf{q}} = \frac{EA_0}{l^3}\begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ -\mathbf{l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathbf{l} & | & \mathbf{l} \end{pmatrix} \tag{14}$$

Restricciones Limitándonos a restricciones geométricas, una de ellas cualquiera está definida por una serie de puntos y sus correspondientes leyes de posición en función del tiempo. Su contribución a las ecuaciones (3) y (4) es en el vector $\mathbf{f_\Phi}$ y en la matriz $\left((\partial_\mathbf{q}\mathbf{\Phi})^T\alpha(\partial_\mathbf{q}\mathbf{\Phi})\right)$. La definición de la restricción se limita a especificar el vector de ecuaciones $\mathbf{\Phi}$, a partir del cual se generan todos los términos necesarios.

Veamos un ejemplo de restricción simple y práctica: la que expresa el alineamiento de tres nodos. Una aplicación interesante de ella es la de construir un cuerpo formado por varios elementos tipo barra, que sólo se deforman longitudinalmente, y de esta forma analizar fenómenos de propagación de ondas unidimensionales. Además de éstas, pueden pensarse otros muchos casos de interés, ya que los nodos restringidos pueden pertenecer tanto a cuerpos rígidos como deformables indistintamente.

Dados los nodos i, j, k, si deseamos imponer que el nodo j permanezca en todo momento alineado con el segmento que une los nodos i, k, el vector de restricción $\mathbf{\Phi}$ tiene la forma:

$$\mathbf{\Phi} = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} \tag{15}$$

que son tres ecuaciones escalares que expresan que el área encerrada por el triángulo de vértices i, j, k debe ser nula.

El vector incógnita es $\mathbf{q}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_i & \mathbf{r}_j & \mathbf{r}_k \end{pmatrix}$

1. *Vector de fuerzas* ($\mathbf{f_\Phi}$). Es un vector de dimensión 6 que se calcula según (2) con la ayuda de (15). Como botón de muestra, el primer elemento tiene la forma:
$$f_{\Phi_1} = \alpha\left[(y_k - x_i)\Phi_1 + (z_k - z_j)\Phi_3\right] \tag{16}$$

2. *Matriz tangente.* Término $\left((\partial_\mathbf{q}\mathbf{\Phi})^T\alpha(\partial_\mathbf{q}\mathbf{\Phi})\right)$. A partir de (15) se construye una matriz de 6x6. Como muestra y sin entrar en detalles, el elemento $(1, 2)$ tiene la expresión:
$$\mathbf{K}_{(1,2)} = \alpha\left[(y_k - y_j)(x_j - x_k)\right] \tag{17}$$

4. EJEMPLO DE APLICACIÓN

A continuación se incluye un ejemplo muy simple pero ilustrativo del uso de los elementos y restricciones descritos en el punto anterior. El mecanismo se compone únicamente de una barra que se suspende de su punto superior. La barra se considera rígida salvo en un segmento central (Fig.[2], que tiene una deformabilidad mucho mayor, y sólo actúa la gravedad.

El mecanismo se compone únicamente de 4 nodos i, j, k, l, siendo i el nodo del que cuelga la barra y l el extremo libre. Se definen los siguientes elementos y restricciones:

- Elemento rígido entre i y j
- Elemento deformable entre j y k
- Elemento rígido entre k y l

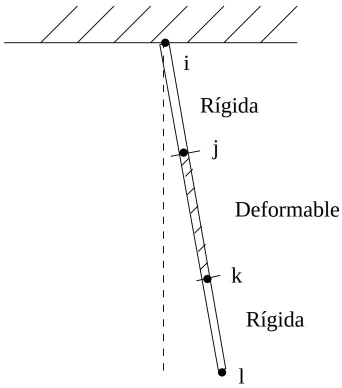

Figura 2: *Barra rígida con un segmento deformable*

- Restricción de posición: nodo i siempre en $(0, 0, 0)$
- Restricción de posición: i, j, l alineados
- Restricción de posición: i, k, l alineados

Se han realizado dos pruebas con distintas materiales para el segmento central deformable: uno con $E = 200$ GPa y otro con $E = 0.2$ MPa. La longitud total de la barra es 30 cm, cada segmento rígido o deformable tiene 10 cm. y la masa total es 3 Kg. En el instante inicial la barra está en posición horizontal y se suelta desde el reposo.

En la Fig.[3] se muestran los perfiles de posición y velocidad horizontal del extremo libre de la barra para dos materiales: uno con $E = 200$ GPa y otro con $E = 0.2$ MPa. Como se puede apreciar, la deformabilidad modifica sustancialmente la dinámica del movimiento. En la Fig.[4] se muestra la deformación del elemento central en cada caso.

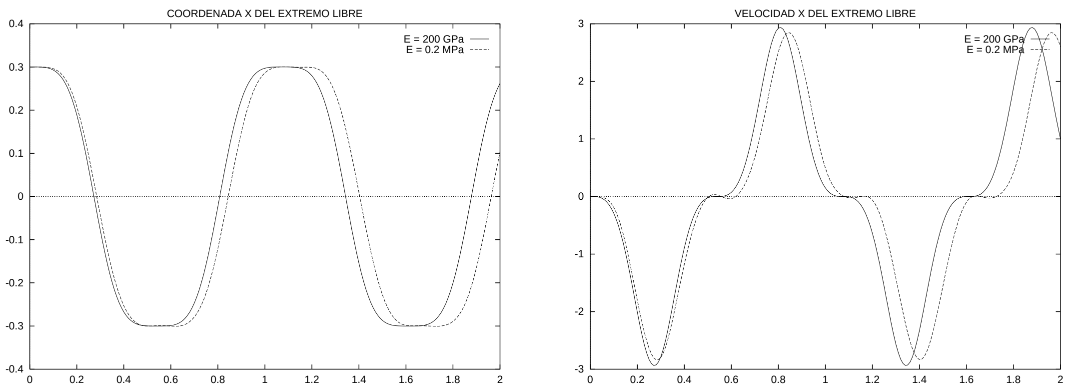

Figura 3: *Posición y Velocidad del extremo libre*

5. CONCLUSIONES

Se han presentado detalles de la formulación de distintos tipos de elementos (rígidos, deformables) y restricciones, y se ha planteado un ejemplo de aplicación simple

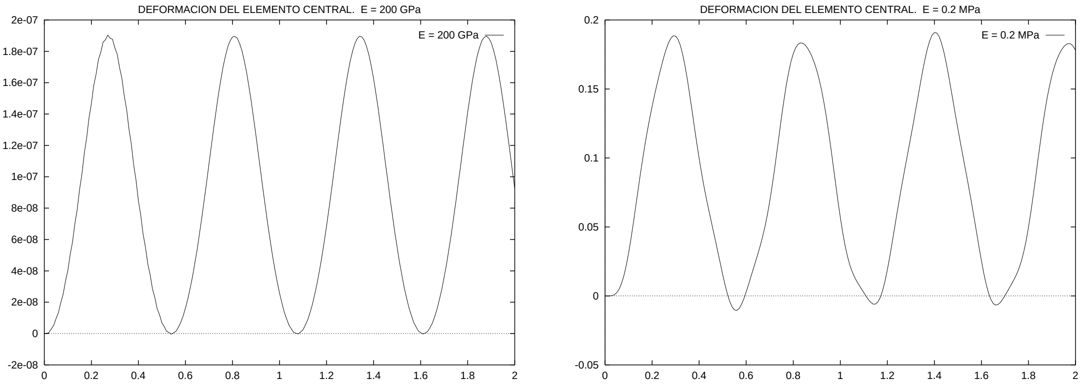

Figura 4: *Deformación del segmento central*

que hace uso del material previamente expuesto. En este ejemplo se muestra la sensibilidad del mecanismo propuesto frente a la deformabilidad de una de las partes,

A la vista de los resultados, el método de penalización parece adecuarse muy bien a la formulación dinámica conjunta de cuerpos rígidos y deformables coexistiendo dentro de un mismo mecanismo. Ambos tipos de cuerpos realizan contribuciones formalmente similares al sistema de ecuaciones global (matriz de masas, vector de fuerzas, matriz tangente) aunque conceptualmente cada contribución es muy diferente (e.g. fuerzas de restricción en una restricción y fuerzas internas en un elemento deformable). En último término, es un único sistema de E.D.O.s no lineal el que ha de resolverse numéricamente. Cabe destacar que el método permite capturar fenómenos no lineales con total generalidad (no linealidad geométrica, como grandes deformaciones, o del material, como plasticidad).

Referencias

[1] Garcia de Jalón, J. Bayo, E., Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems. The Real Time Challenge. Springer-Verlag 1994.

[2] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., The Finite Element Method. Volumes I and II. McGraw-Hill 1991.

[3] Hughes, T.H.R., The Finite Element Method. Prentice Hall 1987.

[4] Hairer, E., Wanner, G., Solving Ordinary Differential Equations II, Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer-Verlag. 1991.

[5] Avello, A. Dinámica de Mecanismos Flexibles con Coordenadas Cartesianas y Teoría de Grandes Deformaciones. Tesis Doctoral. 1990

[6] García Orden, J.C. , Goicolea, J.M., Arribas, J.J. Análisis de mecanismos con cuerpos rígidos y deformables en régimen no lineal. III Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería. Zaragoza, 1996.

[7] Stejskal, V., Valasek, M. Kinematics and Dynamics of Machinery. Marcel Dekker, Inc. 1996