INTERPRETACIÓN DE LA ESTRICCIÓN EN EL ENSAYO DE TRACCIÓN EMPLEANDO MODELOS HIPOELÁSTICOS E HIPERELÁSTICOS

José María Goicolea(*), Felipe Gabaldón (*),
Carlos García Garino (**)

** E.T.S. Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Madrid,*
Ciudad Universitaria, 28040 Madrid
e-mail: `goico@caminos.upm.es`
www: `http://filemon.caminos.upm.es`
*** Facultad de Ingeniería, Univ. Nac. de Cuyo, Mendoza, (Argentina)*

Resumen

El ensayo de tracción con estricción proporciona un método relativamente sencillo para obtener leyes constitutivas tensión-deformación en metales dúctiles, válidas para grandes deformaciones.

Se presentan en este artículo los resultados de ensayos realizados con aluminio dúctil HE30, que han servido para obtener la ley constitutiva de este material. Ha sido necesario interpretar las medidas experimentales para tener en cuenta la falta de uniformidad de las tensiones y deformaciones en el cuello.

La ley constitutiva obtenida se aplica en tres modelos distintos de elementos finitos no lineales, cuyos resultados se comparan entre sí y con los experimentos. Se concluye que, aun siendo la estricción sensible a las formulaciones empleadas, los tres modelos reproducen adecuadamente los resultados experimentales. Asimismo se comprueba la validez de la interpretación realizada de los ensayos.

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de los modelos de cálculo por elementos finitos no lineales hace que hoy día sea posible, con un alto grado de fiabilidad, el análisis de numerosos problemas de estructuras y sólidos con grandes deformaciones y comportamiento elasto-plástico. En particular cabe citar el conformado de metales, el colapso de estructuras dúctiles y los impactos a velocidades medias y bajas, entre otros.

Sin embargo, para que los análisis con grandes deformaciones sean válidos hay un requisito adicional imprescindible: leyes constitutivas (tensión-deformación en el caso puramente mecánico) que sean físicamente válidas y representativas del fenómeno que se desea respresentar. Este aspecto es tanto o más importante que un modelo de cálculo correcto, y sin embargo se le ha prestado a menudo una atención insuficiente.

Ciñéndonos a las grandes deformaciones elastoplásticas en metales dúctiles, los procedimientos de ensayo normalizados para tracción (ASTM E8-82, ASTM E646-78, BS 18) no proporcionan la información necesaria para modelos constitutivos con grandes deformaciones. Un ensayo que permite obtener la información necesaria es la tracción de barras cilíndricas en las que se llega a la estricción (localización geométrica de las deformaciones en un cuello delgado). Estos procedimientos de ensayo son conocidos desde hace tiempo ([1], [2]) y han sido propuestos por algunos de los primeros autores de métodos de cálculo modernos para grandes deformaciones ([14], [15], [10]). Más recientemente han sido empleados también como ejemplos de aplicación para formulaciones modernas de grandes deformaciones ([13], [3]).

En este trabajo se presentan los resultados de un programa experimental de ensayos de estricción en un material dúctil e isótropo (Aluminio HE-30 recocido) con dos objetivos principales: en primer lugar obtener los datos del comportamiento constitutivo para este material, con deformaciones unitarias del orden de 1.2 y superiores; por otra parte contrastar las predicciones de varios modelos de cálculo ([5], [3], [7]).

Una aportación original de este trabajo en relación con [14], [15], [10] es la consideración de las distribuciones (no uniformes) de tensiones y deformaciones en el cuello de estricción para obtener la ley constitutiva.

2. INTERPRETACIÓN ANALÍTICA DE LA ESTRICCIÓN

Idealmente todo ensayo para obtener propiedades mecánicas de un material busca producir un campo de tensiones y deformaciones uniforme sobre un dominio o longitud de galga determinado. Sin embargo, en probetas metálicas cilíndricas sometidas a tracción, esta uniformidad ocurre tan sólo durante una primera fase estable del ensayo en que la carga es creciente.

A partir del máximo de la carga, se desarrolla un cuello de estricción en el que se localizan las deformaciones de la probeta y el ensayo se vuelve inestable, disminuyendo la carga resistida. En esta segunda fase, el material fuera de la zona del cuello descarga elásticamente, mientras que en la zona del cuello prosigue la carga plástica hasta alcanzar la rotura del material. Debido a la curvatura que se produce en el cuello de la probeta, las distribuciones de tensiones y deformaciones en el mismo distan de ser uniformes, lo que dificulta la interpretación del ensayo.

El análisis seguido aquí se basa en los trabajos clásicos de Bridgman [1] y Davidenkov [2]. A continuación resumimos los resultados principales que pueden consultarse con más detalle en las referencias citadas y en [4].

La descripción del ensayo se realiza mediante la tensión axial y la deformación logarítmica axial (ambas medidas en la propia sección del cuello), definidas como:

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{A}; \quad \varepsilon_{zz} = \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} \tag{1}$$

siendo P la carga axial, A la sección del cuello y (l, l_0) las longitudes de galga deformada y original respectivamente. Es fácil comprobar que, mientras las tensiones y deformaciones sean uniformes, en el ensayo axial sin restricción lateral estas medidas coinciden respectivamente con la tensión de Von Mises y la deformación plástica equivalente:

$$\sigma_{eq} = \sigma_{zz}; \quad \varepsilon_p = \varepsilon_{zz} \tag{2}$$

donde $\sigma_{eq} \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{s} : \boldsymbol{s}}$, siendo $\boldsymbol{s}$ el tensor desviador de tensiones, $\boldsymbol{s} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}$.

Por otra parte, la deformación plástica equivalente se define a partir del tensor velocidad de deformaciones $\boldsymbol{d} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\nabla}^s \dot{\boldsymbol{x}}$ y la descomposición aditiva en componentes elástica y plástica:

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}^e + \boldsymbol{d}^p; \quad \varepsilon_p = \int \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{d}^p : \boldsymbol{d}^p}\, dt. \tag{3}$$

Sin embargo, a partir del momento en que se desarrolla el cuello de estricción dejan de ser válidas las expresiones (2), siendo necesario analizar los ensayos considerando la naturaleza de las distribuciones no uniformes de deformaciones y tensiones.

Distribución de deformaciones.- La hipótesis básica de [1], [2] es la uniformidad de las deformaciones radiales en la sección del cuello, que a su vez conlleva la uniformidad de la deformación circunferencial:

$$\begin{aligned} & d_{rr} = \frac{\dot{D}}{D}; \quad d_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{x}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\dot{x}_r}{r} = \frac{\dot{D}}{D} \\ & d_{r\theta} = d_{\theta z} = d_{rz} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

donde (r, θ, z) indican componentes físicas en coordenadas cilíndricas.

Considerando que durante la estricción las deformaciones elásticas son despreciables y la incompresibilidad del flujo plástico, se llega a:

$$d_{zz} = -2d_{rr} = -2\frac{\dot{D}}{D} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_p = \varepsilon_{zz} = -2\ln\frac{D}{D_0}. \tag{5}$$

Por tanto ε_p y consecuentemente el tamaño de la superficie de fluencia isótropa, $Y(\varepsilon_p)$, son constantes sobre la sección del cuello.

Distribución de Tensiones.- Empleando la ley de flujo plástico asociativa,

$$\boldsymbol{s} = \gamma \boldsymbol{d}^p$$

y las expresiones (4), se deduce:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}; \quad \sigma_{zz} = Y + \sigma_{rr} \tag{6}$$

Por tanto la tensión en el cuello (σ_{zz}) puede interpretarse como una tracción axial constante (Y) superpuesta a tracción hidrostática variable ($\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$). Esta última es máxima en centro y nula en el borde, por lo que el valor medio será

$$\overline{\sigma}_{zz} = Y + \overline{\sigma}_{rr} > Y.$$

Considerando hipótesis adicionales sobre la curvatura del cuello ([1], [2]) se obtiene la siguiente relación entre el valor medible en el experimento ($\overline{\sigma}_{zz} = P/A$) y la tensión de fluencia del material Y:

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{\sigma}_{zz}}{Y} = \left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{\varepsilon_{zz} - 0.1}}\right) \ln\left(1 + \dfrac{\sqrt{\varepsilon_{zz} - 0.1}}{2}\right) & (\varepsilon_{zz} > 0.1) \\ \dfrac{\overline{\sigma}_{zz}}{Y} = 1 & (\varepsilon_{zz} \leq 0.1) \end{cases} \tag{7}$$

Resultados de los ensayos de tracción.- Se resumen a continuación los ensayos realizados, pudiendo encontrarse una descripción más extensa en [4]. El material empleado fue aleación de aluminio HE30 (BS 1474), suministrado en forma de barras y posteriormente recocido. Las propiedades del material suministrado (según especificaciones) eran: $E = 67\,\mathrm{GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 2700\,\mathrm{kg/m^3}$, $\sigma_y = 239 - 270\,\mathrm{Mpa}$ (elongación remanente 0.1%), $\sigma_u = 278 - 293\,\mathrm{Mpa}$ (elongación última entre 7 y 10%). Las probetas una vez mecanizadas fueron recocidas a la temperatura de 350° entre 3 y 5 horas, salvo una que no fue recocida como referencia.

La figura 1 muestra una probeta típica después de la rotura en el cuello, donde se puede observar el desarrollo del mismo. En la figura 2 se muestran los resultados de carga total axial (P) frente a la deformación logarítmica (ε_{zz}) en la sección de estricción, obtenida esta última mediante medición del diámetro y aplicando la fórmula (5). Se observa en todos los casos un aumento de la carga hasta un máximo $P_{\max}$. Después de éste se produce una fase inestable del ensayo, disminuyendo P a la vez que se desarrolla el cuello de estricción.

Se comprueba que el recocido produce un aumento notable de la ductilidad, permitiendo deformaciones unitarias antes de la rotura superiores a 1.2, así como una fuerte disminución de $P_{\max}$. Esta se halla comprendida entre 21 y 25 kN para las probetas recocidas. Dividiendo por el área de la sección de estricción en cada momento (A) se obtiene la tensión axial promedio, $\overline{\sigma}_{zz} = P/A$, representada en la figura 3. Se observa que, a pesar de la disminución de P, la tensión en el cuello no deja de crecer. Esto indica que la inestabilidad de la estricción es de tipo geométrico y no constitutivo, ocurriendo que a partir de un cierto instante la disminución del área del cuello predomina sobre el endurecimiento plástico del material.

La hipótesis básica de [1], [2] sobre la constancia de ε_{rr}, $\varepsilon_{\theta\theta}$ y ε_p (ecuaciones (4) y (5) en la sección de estricción fue corroborada en [4] mediante ensayos de microdureza en distintos puntos de una sección transversal cerca del cuello de estricción. Es conocido que la microdureza está relacionada con el límite plástico del material $Y(\varepsilon_p)$, que a su vez está relacionado con la deformación plástica sufrida en cada punto. Las medidas de microdureza arrojaron un valor aproximadamente uniforme en toda la sección.

Se ajustó la ley constitutiva del material mediante un modelo elastoplástico isotrópico de tipo J_2 con endurecimiento potencial, en el que la superficie de fluencia queda definida por

$$Y(\varepsilon_p) = \sigma_{eq} \tag{8}$$

siendo la ley de endurecimiento

$$Y(\varepsilon_p) = A\varepsilon_{eq}^n \tag{9}$$

donde A y n son constantes a determinar y ε_{eq} es la "deformación uniaxial equivalente" definida como

$$\varepsilon_{eq} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_{eq}}{E} + \varepsilon_p. \tag{10}$$

La tensión axial promedio en el cuello ($\overline{\sigma}_{zz}$, figura 3) fue procesada mediante la ecuación (7) para obtener los valores de Y. Aplicando una regresión lineal a los logaritmos de estos valores (obsérvese que la ecuación (9) en escala logarítmica es una recta) se obtuvieron los parámetros siguientes:

$$A = 181.7\,\mathrm{MPa}; \quad n = 0.159.$$

Merece observarse que para el rango de deformación de interés la corrección proporcionada por la ecuación (7), debido a la falta de uniformidad de las tensiones en el cuello, es considerable: para un valor $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{eq} = 1$, resulta $Y = 187.7\,\mathrm{MPa}$ y $\overline{\sigma}_{zz} = 219.2\,\mathrm{MPa}$.

3. INTERPRETACIÓN NUMÉRICA

Los ensayos descritos arriba se han interpretado empleando tres modelos distintos de elementos finitos: un modelo explícito con formulación hipoelástica [5], [6], un modelo implícito con formulación hiperelástica [3], y por último un modelo implícito con formulación hipoelástica de un programa comercial de propósito general [7]. Resumimos las características esenciales de cada uno de estos modelos.

Modelo explícito hipoelástico (PR2D) [5], [6].- Se basa en un esquema de integración explícito en el tiempo por diferencias centrales, por lo que de forma directa únicamente se puede aplicar a problemas dinámicos. Los problemas cuasiestáticos deben resolverse mediante relajación dinámica o mediante distorsión controlada de las escalas de masa o velocidad.

El empleo de una matriz de masa diagonal permite un ciclo de cálculo para cada intervalo de tiempo Δt explícito, sin necesidad de resolver sistemas de ecuaciones. No se necesitan emplear matrices de coeficientes globales y la resolución se realiza a nivel local, elemento por elemento, lo que confiere al método una gran sencillez y robustez.

En contrapartida, el esquema de integración temporal exige para su estabilidad que Δt sea menor que un valor crítico pequeño determinado por la velocidad de propagación de las ondas elásticas (c) y el tamaño de los elementos (h) según la condición de Courant:

$$\Delta t < \Delta t_{cr} = \frac{h}{c}$$

La formulación elastoplástica se pasa en la descomposición aditiva de las deformaciones (3), y una ley de evolución hipoelástica para las tensiones,

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{d}^e)\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{d}^e$$

donde se emplea la tasa co-rotacional de Jaumann $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\sigma}$ siendo $\boldsymbol{\omega}$ es la parte hemisimétrica del gradiente de velocidades. Esta corrección permite considerar adecuadamente la rotación del tensor de tensiones.

La discretización emplea elementos mixtos: cuadriláteros para las componentes volumétricas de las tensiones y deformaciones, divididos cada uno en dos triángulos para las componentes desviadoras. Estos elementos están libres de bloqueo para deformación plástica incomprensible así como de modos de energía nula.

Modelo hiperelástico implícito (SOGDE) [3].- La cinemática del modelo empleado está basada en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones [11]:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^e \cdot \boldsymbol{F}^p \tag{11}$$

La ley constitutiva se formula en el contexto de la termodinámica irreversible de sólidos mediante una función de energía libre:

$$\Psi = \Psi^e(\boldsymbol{e}^e) + \Psi^p(\boldsymbol{\alpha})$$

donde $\boldsymbol{e}^e$ es la parte elástica del tensor de deformaciones de Almansi ($\boldsymbol{e}$) y $\boldsymbol{\alpha}$ son las variables internas. El modelo constitutivo se basa en la descomposición aditiva de $\boldsymbol{e}$ (que se deduce a partir de (11)):

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^e + \boldsymbol{e}^p$$

La relación tensión-deformación es de tipo hiperelástico,

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi^e(\boldsymbol{e}^e)}{\partial \boldsymbol{e}^e} \tag{12}$$

La integración del modelo constitutivo se basa en un algoritmo predictor-corrector, descrito con mayor detalle en [3]. El predictor elástico se resuelve mediante el tensor elástico de Finger:

$$^{t+\Delta t}(\boldsymbol{b}^e)^{-1}|^{(\mathrm{pred.})} = \boldsymbol{f}^{-\mathrm{T}}\ {}^{t}(\boldsymbol{b}^e)^{-1}\boldsymbol{f}^{-1}$$

donde $\boldsymbol{f} = \partial\, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{x} / \partial\, {}^{t}\boldsymbol{x}$ es el tensor gradiente de deformaciones incremental. El tensor elástico de Finger juega el papel de una variable interna en este modelo. El corrector plástico se calcula con un esquema de integración de Euler hacia atrás, resultando:

$$^{t+\Delta t}(\boldsymbol{b}^e)^{-1} = {}^{t+\Delta t}(\boldsymbol{b}^e)^{-1}|^{(\mathrm{pred.})} + 2\gamma^{t+\Delta t}\boldsymbol{n}$$

donde la corrección $\gamma^{t+\Delta t}\boldsymbol{n}$ se obtiene mediante el algoritmo de retorno radial [11]. A continuación se obtiene el tensor de deformaciones elásticas de Almansi:

$$^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}^e = \frac{1}{2}\left[{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{g} - {}^{t+\Delta t}(\boldsymbol{b}^e)^{-1}\right]$$

siendo $\boldsymbol{g}$ el tensor de la métrica. Finalmente, las tensiones se obtienen aplicando (12), que en este caso vale

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda\, \mathrm{tr}(\boldsymbol{e}^e)\boldsymbol{1} + 2\mu\boldsymbol{e}^e$$

Los elementos empleados son del tipo $\overline{B}$, con integración volumétrica media.

Modelo implícito hipoelástico (ABAQUS) [7].- Se ha empleado también el programa comercial de elementos finitos ABAQUS. El modelo constitutivo es hipoelástico, basado en la derivada de Jaumman del tensor de tensiones de Cauchy. Se han empleado dos tipos de elementos distintos, $\overline{B}$ (integración reducida selectiva) y elementos mixtos de modos incompatibles según la formulación [13]

Resultados numéricos.- Los resultados obtenidos en los modelos de cálculo citados se presentan en las figuras 4 a 7. La figura 4 contiene la evolución de la estricción en el cuello (D/D_0), frente al alargamiento nominal ($\Delta l/l_0$). La figura 5 representa la carga axial (P) frente a la deformación logarítmica axial en la sección de estricción (ε_{zz}, calculada según la fórmula (5)). La figura 6 representa la tensión ($\boldsymbol{\sigma}_{zz} = P/A$) frente a ε_{zz}. Por último la figura 7 presenta la evolución de la carga P frente al alargamiento (Δl).

Como resumen de la comparación de los resultados se deduce que, en líneas generales la respuesta de los tres modelos es similar. La localización geométrica de las deformaciones en el cuello es menos marcada en PR2D, más acusada en SODGE y aún mayor en ABAQUS. Los dos tipos de elementos en ABAQUS dieron resultados casi iguales. En la tabla 1 se realiza una comparación cuantitativa de los resultados de los cálculos con los resultados experimentales. Se observa que los tres modelos obtienen un resultado dentro del *abanico* experimental, estando el valor medio de éste situado entre el resultado de PR2D y el de SODGE.

	$\overline{\sigma}_{zz}$ (MPa)	P (kN)
PR2D	207	16.8
SODGE	215	17.3
ABAQUS	217	17.5
Experimentos	213 ± 15	17.2 ± 1.2

Tabla 1: *Comparación de resultados numéricos en la zona del cuello para* $\varepsilon_{zz} = 0.9$.

Se incluye también en la figura 7 los contornos de tensiones en la zona del cuello (para el modelo de PR2D, los obtenidos con los otros programas son similares). Se observa que la hipótesis expresada por las ecuaciones (6) y (7) se cumple (aproximadamente): en la sección del cuello la deformación plástica ε_p y la tensión equivalente σ_{eq} son constantes en primera aproximación, mientras que σ_{rr} y $\sigma_{\theta\theta}$ no son constantes y son aproximadamente iguales entre sí, cumpliéndose $\sigma_{zz} \simeq \sigma_{eq} + \sigma_{rr}$.

4. CONCLUSIONES

Se ha presentado un análisis de los ensayos de tracción con estricción que permite, a pesar de la falta de uniformidad de las tensiones en el cuello, interpretar de manera satisfactoria los ensayos. De esta forma se pueden obtener las leyes consecutivas tensión-deformación válidas para grandes deformaciones mediante un procedimiento experimental relativamente sencillo.

La interpretación numérica se ha realizado mediante tres modelos de elementos finitos distintos, obteniéndose ciertas diferencias entre ellos aunque en todos los casos los resultados están dentro del abanico experimental. Debe concluirse que la localización geométrica de las deformaciones en el cuello es bastante sensible a pequeñas diferencias en la formulación. Los resultados numéricos corroboran en lineas generales las hipótesis interpretativas de [1], [2].

Figura 1: *Fotografía de una de las probetas después de la rotura por el cuello de estricción*

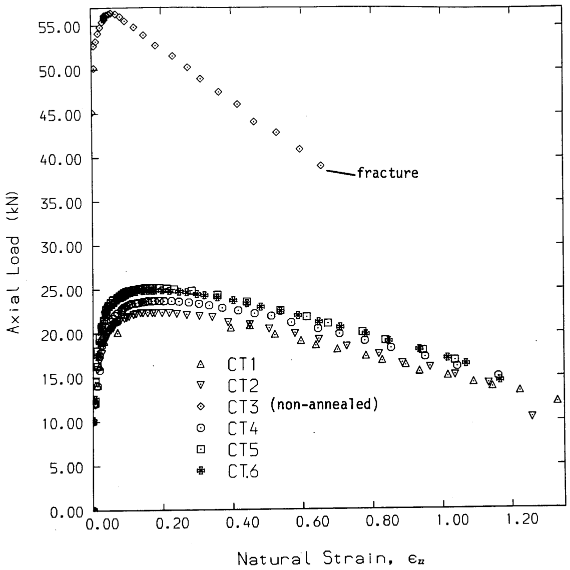

Figura 2: *Carga axial frente a deformación logarítmica axial en la sección del cuello obtenida en los ensayos. La probeta CT3 no fue sometida a recocido*

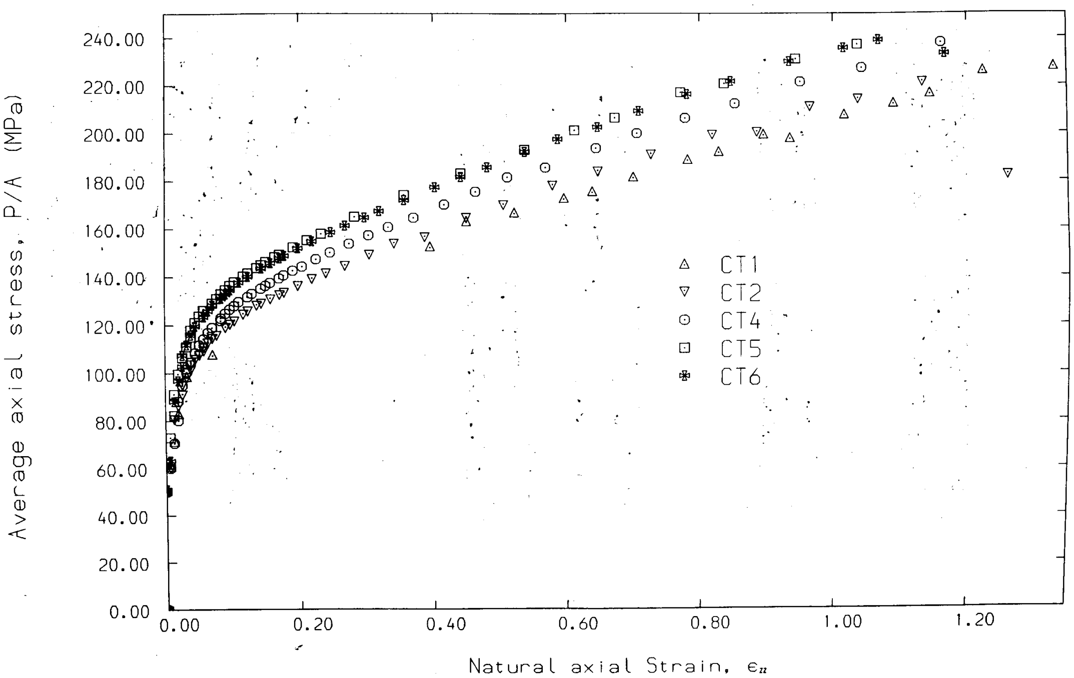

Figura 3: *Curvas de tensión axial promedio en el cuello ($\overline{\sigma}_{zz}$) frente a deformacion logaritmica en el cuello (ε_{zz})*

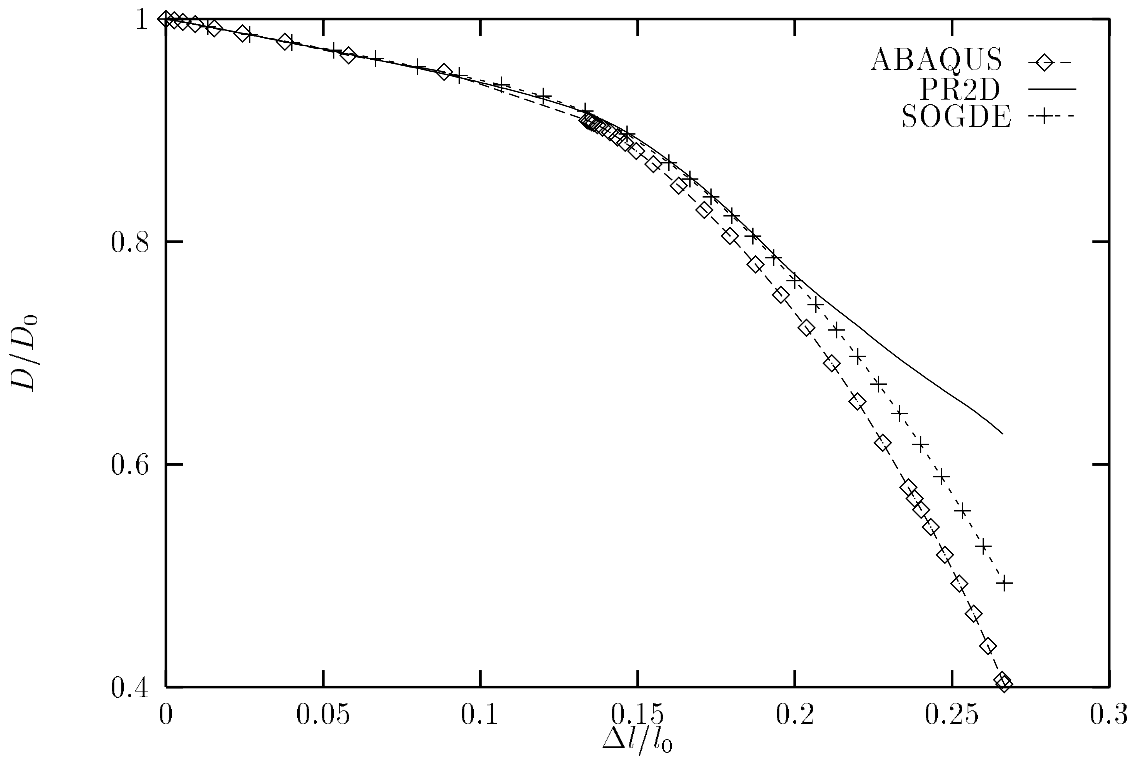

Figura 4: *Resultados numéricos para la relación de estricción (D/D_0) frente al alargamiento de la probeta ($\Delta l/l_0$).*

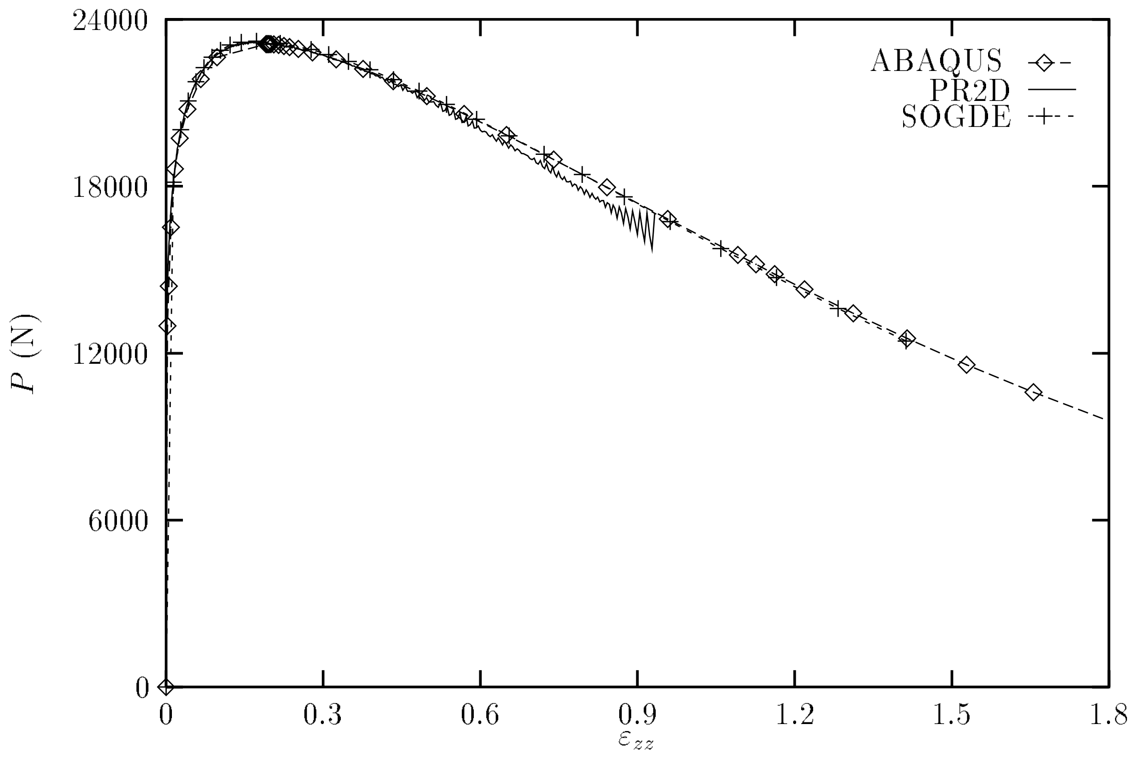

Figura 5: *Resultados numéricos para la carga (P) frente a deformación logarítmica en el cuello (ε_{zz})*

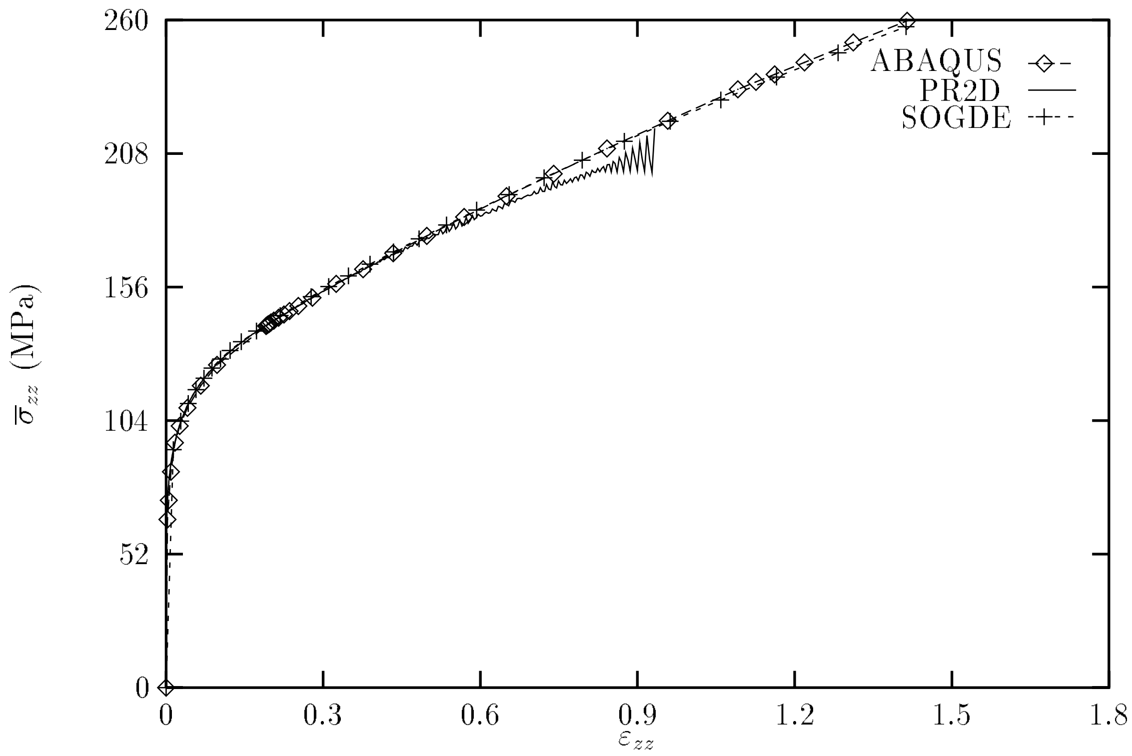

Figura 6: *Resultados numéricos para la tensión axial promedio ($\overline{\sigma}_{zz}$) frente a deformación logarítmica en el cuello (ε_{zz}).*

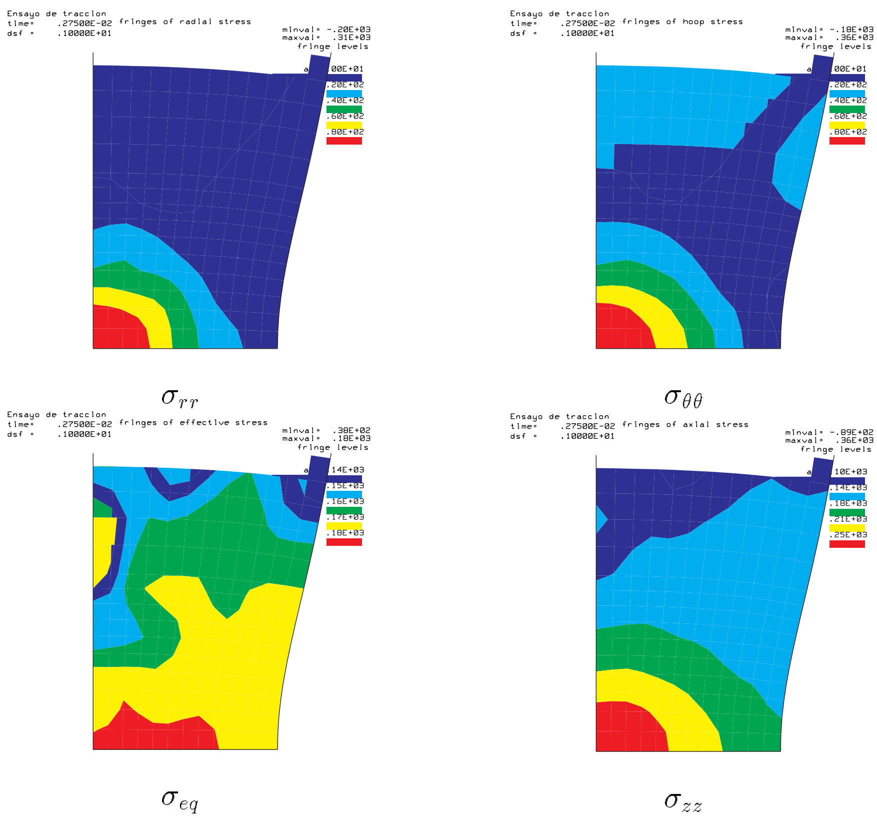

Figura 7: *Contornos de igual tensión para distintos componentes, obtenidos con PR2D.*

Referencias

[1] BRIDGMAN, P.W.: *The Stress Distribution at the Neck of a tensile Specimen.* Trans. Amer. Soc. Metals, 32, 553-574 (1944).

[2] DAVIDENKOV, N.N. y SPIRIDINOVA, N.I.: *Analysis of the State of Stress in the Neck of a Tension Test Specimen.* Proc. Amer. Soc. Testing Mater., 46, 1147-1158 (1946).

[3] GARCIA GARINO, C.: *Un Modelo Numérico para el Análisis de Sólidos Elastoplásticos Sometidos a Grandes Deformaciones.* Univ. Politécnica Cataluña, (1993).

[4] GOICOLEA, J. M.: *Numerical Modelling in Large Strain Plasticity with Application to Tube Collapse Analysis.* Ph.D. thesis, Univ. of London, (1985).

[5] GOICOLEA, J.M.: *PR2D User's Guide, vers. 1-2.10.* E.T.S. Ing. Caminos, Univ. Politécnica Madrid (1992).

[6] GOICOLEA, J.M.: *Análisis Termomecánico no Lineal mediante Métodos Explícitos de Diferencias Finitas y Elementos Finitos.* Rev. Int. Met. Numer. Calc. Dis. Ing., 8, 3, 235-265 (1992).

[7] H.K.S. Inc.: *ABAQUS Theory Manual, vers. 5.4.*, (1994).

[8] JONES, S.E. et al.: *Stress Distributions in the Vicinity of a Neck.* J. Appl. Phys., 50(5), 3168-3173 (1979).

[9] NEEDLEMAN, A.: *A Numerical Study of necking in Circular Cylindrical Bars.* J. Mech. Phys. Solids, 20(2), 111-127 (1972).

[10] NORRIS, D.M. et al.: *A Computer Simulation of the Tensile Test.* J. Mech. Phys. Solids, 26, 1-19 (1978).

[11] SIMO, J.C.: *A Framework for Finite Strain Elastoplasticity based on maximum Plastic Dissipation and the Multiplicative Decomposition: Part I, Continuum Formulation; Part II, Computational Aspects.* Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 66, 199-219 (1988) y 68, 1-31 (1988).

[12] SIMO, J.C.: *Topics on the Numerical Analysis and Simulation of Plasticity.* Handbook of Numerical Analysis, Vol III, Elsevier Science Publishers (1995).

[13] SIMO, J.C. y ARMERO, F.: *Geometrically Nonlinear Enhanced Strain Mixed Methods and the Method of Incompatible Modes.* Int. J. Num. Meth. Eng., 33, 1595-1638 (1992).

[14] WILKINS, M.L.: *Third Progress Report of Light Armor Program.* Lawrence Livermore Natl. Lab., U. of California, rept. UCRL-50460 (1968).

[15] WILKINS, M.L.: *Mechanics of Penetration and Perforation.* Int. J. Eng. Sci., 16, 793-807 (1978).