Análisis de Fenómenos de Localización de Deformaciones mediante Elementos Finitos; Aplicación a la Rotura de Probetas de Hormigón

José María Goicolea y Francisco Martínez Cutillas,
E.T.S. Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Madrid,
Ciudad Universitaria, 28040 Madrid

Resumen

En este trabajo se repasa la problemática asociada a la localización y se analizan diversos tratamientos propuestos para la misma mediante elementos finitos. En concreto, los problemas fundamentales son la representación de la cinemática con elevados gradientes de deformación y la regularización de la respuesta. Se analiza en detalle la formulación de elementos con deformaciones supuestas mejoradas, estudiando en este marco varios elementos que se aplican a problemas básicos de localización.

Por último se detalla una propuesta para analizar la rotura del hormigón basada en un modelo de mezclas que combina el mortero como material elasto-frágil con el árido como material granular elasto-plástico. Se aplica a diversos casos de rotura de probetas de hormigón bajo estados de carga multiaxiales, con resultados prometedores.

Summary

In this work the treatment of localisation phenomena with finite element based methods is reviewed. In particular, two key problems which must be addressed are the representation of kinematics with high deformation gradients and the regularisation of the response. The enhanced assumed strain formulation is analised and several elements described in this context, which are then applied for the solution of some basic localisation problems.

Finally a method is described for analising failure and post-peak response of concrete. This is based on a mixture model which combines an elastic-brittle model for the mortar with an elastic-plastic granular material for the

aggregate. It is applied to several cases of concrete failure under compression and multiaxial stress states, with encouraging results.

1 Introducción

El colapso de una estructura o de un sistema portante puede venir determinado por varias causas, entre las cuales la localización de deformaciones es una de las más relevantes, ya que ocasiona una inestabilidad en el material que rápidamente degenera en el fallo estructural o rotura.

Se entiende por localización de deformaciones la formación de bandas estrechas de elevada deformación, precursoras de las superficies de fisuración o discontinuidad en el medio. Estas se pueden presentar en gran variedad de materiales ingenieriles: metales estructurales [59], arenas [51], [52], rocas [57], [47], hormigones [50], etc. Los mecanismos físicos que dan origen a dicha localización pueden ser muy variados. Entre éstos cabe citar las bandas adiabáticas de corte [3], la estricción de metales [48], Los deslizamientos intergranulares en los suelos [9] o el crecimiento y coalescencia de microfisuras en rocas u hormigón [50].

Los métodos disponibles para el análisis de las discontinuidades producidas en la localización pueden englobarse en dos grupos [26].

Los *métodos discretos* [14] dividen la estructura en dos partes, una considerada como medio continuo, y otra en la que la discontinuidad se estudia de forma discreta mediante relaciones fuerza - desplazamiento. Estos métodos tienen la ventaja de que pueden plantearse fácilmente de forma consistente con la mecánica de la fractura. Necesariamente presenta dificultades su modelización mediante elementos finitos para casos generales en que no se conozca a priori la dirección de la fisura, ya que es preciso prever en la malla las líneas de discontinuidad. Debe mencionarse, sin embargo, que algunos métodos recientemente presentados han logrado solucionar de manera satisfactoria este inconveniente mediante remallaje adaptativo [7].

Los *métodos basados en la mecánica del medio continuo*, por el contrario, intentan mantener el modelo de medio continuo también en la zona de discontinuidad o fisura, empleando relaciones tensión - deformación. Es sabido que si el material tiene reblandecimiento las soluciones obtenidas dependen de la malla si no se toman precauciones especiales, tendentes a la *regularización* de la respuesta.

Es este último procedimiento el seguido en este trabajo, ya que posee la ventaja de adaptarse mejor a la modelización mediante métodos de elementos finitos. Sin embargo, deben tenerse presentes las dificultades importantes que es preciso resolver:

1. Los elementos finitos usuales son incapaces de captar la *cinemática de la localización* dentro de su dominio, debido a que éstos aproximan de

forma continua el campo de deformaciones.

2. La localización lleva asociada, en materiales no dependientes de la velocidad de deformación, un mal planteamiento matemático del problema de contorno [25], originando una falta de unicidad en la solución; Los modelos de la elastoplasticidad clásica no contemplan ninguna longitud característica que, al definir un ancho de la banda de localización, permita *regularizar el problema de contorno.*

A las dificultades anteriores deben añadirse las intrínsecas a un problema elastoplástico y fuertemente no lineal, como son la propia integración de las ecuaciones constitutivas, y la tendencia al bloqueo o sobrerrigidización de la malla en flujo plástico incompresible [24].

En este trabajo se presentan y aplican distintas técnicas para abordar el problema de localización. En primer lugar se analizan brevemente los criterios de localización y se repasan algunas técnicas propuestas para su análisis mediante elementos finitos. Se expone después una formulación de elementos finitos de propósito general basada en formulaciones mixtas con campos de deformaciones supuestas (equivalente a modos incompatibles de desplazamientos). Estos elementos, como demuestran los resultados numéricos expuestos, capturan correctamente las discontinuidades y bandas de localización.

Por último se expone el tratamiento empleado para el problema de la rotura del hormigón, empleando un modelo de mezclas basado en presupuestos muy sencillos y sólidamente fundamentados. El modelo se aplica al análisis de la rotura de probetas de hormigón.

2 Criterio de localización.

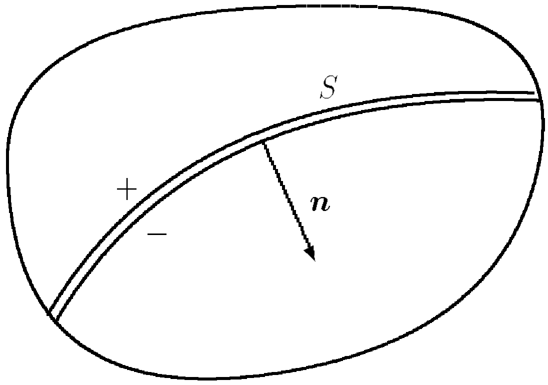
El criterio de localización se puede estudiar en el marco de la teoría de Hadamard [13]. (ver también las publicaciones de Mandel [19] y Rice [37].)

Sea un sólido homogéneo sometido a un incremento cuasiestático de deformación $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Interesa establecer bajo qué condiciones se produce una superficie S de discontinuidad de deformaciones, con normal $\boldsymbol{n}$ en cada punto. Se admite la hipótesis de que el campo de velocidades, $\dot{\boldsymbol{u}}$, permanece continuo, incluso una vez iniciada la localización de deformaciones. Sin embargo, admitimos que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^s \dot{\boldsymbol{u}}$ sea discontinuo a través de la superficie de localización. Estas hipótesis corresponden a las denominadas discontinuidades "débiles" (es decir, en deformaciones). El salto de la función gradiente de velocidades se expresa como:

$$[\![\nabla \dot{\boldsymbol{u}}]\!] = \nabla \dot{\boldsymbol{u}}^+ - \nabla \dot{\boldsymbol{u}}^- \neq \boldsymbol{0}, \tag{1}$$

donde los superíndices $(+)$ y $(-)$ denotan los valores del campo a cada lado de la discontinuidad (figura 1).

Figura 1: Superficie de discontinuidad en el campo de deformaciones.



Para garantizar la continuidad de $\dot{\boldsymbol{u}}$, el salto de su gradiente $\nabla\dot{\boldsymbol{u}}$ en cada punto debe expresarse mediante una una función $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ (dirección de polarización) de forma que:

$$[\![\nabla\dot{\boldsymbol{u}}]\!] = \boldsymbol{g} \otimes \boldsymbol{n} \tag{2}$$

siendo $\otimes$ el producto tensorial o diádico: $(\boldsymbol{g} \otimes \boldsymbol{n})_{ij} = g_i n_j$. El salto de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ es por tanto:

$$[\![\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]\!] = \frac{1}{2}(\boldsymbol{g} \otimes \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{g}). \tag{3}$$

Se considera una relación constitutiva incremental de la forma:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{4}$$

donde $\boldsymbol{D}$ es el tensor de 4º orden de módulos constitutivos tangentes. Se admite, por hipótesis, que al inicio de la localización, el material se encuentra en la misma rama de carga a ambos lados de la discontinuidad, por lo que el salto de la tasa de tensiones deberá verificar:

$$[\![\dot{\boldsymbol{\sigma}}]\!] = \boldsymbol{D} : [\![\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]\!]. \tag{5}$$

De este modo, si se impone el equilibrio a través de los planos de discontinuidad, se debe establecer la continuidad del vector tracción $\boldsymbol{t}$, por lo que:

$$[\![\dot{\boldsymbol{t}}]\!] = \boldsymbol{n} \cdot [\![\dot{\boldsymbol{\sigma}}]\!] = \boldsymbol{0}; \tag{6}$$

empleando (5), (3) y la simetría de $\boldsymbol{D}$ se llega a

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D} : (\boldsymbol{g} \otimes \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{0}. \tag{7}$$

Se denomina *tensor acústico* del material a $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}$, dependiendo de los módulos tangentes $\boldsymbol{D}$ del material en cada punto, y de la orientación $\boldsymbol{n}$. La ecuación (7) se resume por tanto como

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}. \tag{8}$$

Para que esta ecuación homogénea tenga solución distinta de la trivial, el tensor acústico debe ser singular:

$$\det[\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n})] = 0. \tag{9}$$

El autovector asociado al autovalor nulo de $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n})$ será la dirección de polarización, $\boldsymbol{g}$. Dicho de otra forma, $\boldsymbol{g}$ pertenece al núcleo de $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n})$. Se observa pues que el criterio matemático que establece la localización de deformaciones se sustenta en las características constitutivas del comportamiento del material. La singularidad del tensor acústico implica una pérdida del carácter elíptico de las ecuaciones de equilibrio del sólido.

Análogamente, en *problemas dinámicos*, el análisis de localización para una dirección de polarización $\boldsymbol{g}$ conduce a

$$\rho c^2 = \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{g}. \tag{10}$$

Los valores singulares del tensor acústico originan pues velocidades nulas o imaginarias de propagación de ondas, es decir, la pérdida del carácter hiperbólico de la ecuación dinámica de Cauchy.

La pérdida del carácter elíptico o hipérbólico de las ecuaciones conduce a que el problema de contorno asociado se encuentre matemáticamente mal planteado [25]. Asimismo, de las propias ecuaciones no se puede inferir el ancho de la banda de localización, pudiendo ser arbitrariamente pequeña. Esta indefinición trae consigo una falta de objetividad de los análisis numéricos con respecto al tamaño de malla empleado.

El análisis anterior se ciñe a discontinuidades "débiles", en las que el campo de desplazamientos $\boldsymbol{u}$ se mantiene continuo. Recientemente Simó y colaboradores ([44], [43], [26], [2]) han presentado un tratamiento válido para discontinuidades "fuertes" (en desplazamientos), que se basa en las siguientes hipótesis: 1. tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ acotado; 2. vector tracción $\boldsymbol{t}$ continuo; 3. $\boldsymbol{\sigma}$ continuo en la iniciación. Esta última hipótesis conduce a que la iniciación de la localización se base en el mismo criterio que las discontinuidades débiles (9). En este caso, sin embargo, el campo de deformaciones se descompone en suma de una parte acotada y otra no acotada, caracterizada esta última mediante una delta de Dirac δ_S de la superficie de discontinuidad. Para mantener la condición de tensiones acotadas, se admite un campo o distribución espacial del parámetro de reblandecimiento del material, afectado también por una delta de Dirac.

3 Aproximación Numérica mediante Elementos Finitos

El tratamiento numérico mediante elementos finitos de la localización debe resolver las dificultades apuntadas arriba (aptdo. 1). Las técnicas propuestas para ello consisten por una parte en el diseño de elementos especiales o el empleo de técnicas de remallaje que capturen adecuadamente la cinemática de la localización, y por otra en la introducción de limitadores que regularicen el problema de contorno.

3.1 Técnicas de discretización y diseño de elementos especiales

Las formulaciones convencionales en desplazamientos no permiten una adecuada representación de los elevados gradientes de deformación asociados a la localización de deformaciones.

Es posible solventar este problema mediante elementos específicos para localización. Los primeros intentos establecían direcciones prefijadas de localización en los elementos, como en [35], que formula la matriz de rigidez con una banda de deformaciones de espesor y ancho dado superpuesta al campo de deformaciones existente, o el seguido en [48] dividiendo elementos cuadrangulares en triángulos, con la precaución de que las diagonales coincidieran con la dirección estimada de la banda. Por el contrario, el tratamiento propuesto por Ortiz y colaboradores ([29], [23]), después de establecer la dirección de localización mediante el criterio (8), añade unas funciones que contemplan un salto en el campo de deformaciones. Posteriormente, [6] y [12] han empleado una técnica similar mediante bandas de localización de ancho prefijado que permiten además una regularización de la respuesta. Una propuesta similar ha sido aplicada al hormigón en [10], [11].

La reciente reformulación del elemento de modos incompatibles de Wilson-Taylor [58] por parte de Simo y colaboradores ([40], [41], [42]) dentro del contexto de los elementos de deformaciones supuestas, ha permitido comprobar el excelente comportamiento de este tipo de elementos de propósito general en problemas de localización [45], [46]. Estos aspectos se discuten más abajo (aptdo. 4) y se comparan los resultados obtenidos.

Recientemente Simó y colaboradores ([44], [43]), en el marco del tratamiento de discontinuidades fuertes, han propuesto unos elementos finitos especiales para estos casos. Estos se formulan también en el marco de las deformaciones supuestas, estando los modos mejorados definidos en función de una función delta de Dirac. En la práctica ésta se aproxima mediante una banda de ancho discreto k, parámetro de regularización que juega un papel similar a la longitud característica en otros modelos. El tratamiento es similar al de los elementos propuestos en su día por Ortiz [29], ya que la dirección de la banda se calcula a partir del criterio de localización en el material. Los elementos se aplican a problemas con diversos modelos de material, desde metales con plasticidad J_2 en [2] a modelos de daño en [26].

Otra manera de abordar las bandas de localización es el refinamiento adaptativo de la malla. El método desarrollado en [30] y [32] se basa en imponer que la variación de la solución sea uniforme en todos los elementos de la malla. Mediante remallaje y el empleo de criterios de localización simples se ha demostrado que es posible abordar problemas dinámicos complejos a escala ingenieril de forma muy precisa [7].

3.2 Introducción de limitadores de localización

Las técnicas numéricas anteriores se han discutido desde el punto de vista de la cinemática de las discontinuidades de deformación, lo que no garantiza la consistencia de la solución a no ser que se tomen precauciones adicionales para regularizar la respuesta del modelo [5]. Las formulaciones elastoplásticas convencionales no permiten la introducción de parámetros de longitud que definan una anchura de la banda de localización, que en el límite resulta en una banda de espesor nulo, con disipación energética igualmente nula. La respuesta es, por tanto, altamente dependiente de la discretización empleada.

Entre las técnicas de regularización o limitadores de localización propuestos destacan: el *limitador diferencial*, basado en gradientes de los desplazamientos de segundo orden [53]; el *limitador integral* o formulación de continuo no-local, introducido en [4]; el *limitador viscoplástico* introducido por [25] y desarrollado en [18], [36]; y por último, la *formulación del continuo de Cosserat* [8], empleada por [22] y otros autores. (Para una discusión más detallada, consultar [20] y [21].)

4 Elementos con Deformaciones Supuestas

4.1 Preámbulo

Las limitaciones de las formulaciones puras en desplazamientos ha conducido a diversos tipos de elementos que subsanan los problemas que plantean aquéllas. Desde un punto de vista histórico, interesa destacar aquí los elementos de modos incompatibles de Wilson y Taylor [58], para mejorar el comportamiento a flexión, y la formulación volumétrica media de Nagtegaal [24], para evitar el bloqueo en flujo incompresible. Hughes [16] unifica los conceptos de integración reducida y selectiva así como el planteamiento volumétrico medio mediante la formulación $\bar{B}$.

De forma paralela ha habido un interés en justificar dichos ajustes, mediante formulaciones variacionales, que ha permitido sustentar más firmemente el enfoque de estos elementos. Entre otros merecen destacarse los trabajos de [39] para la formulación $\bar{B}$, y [34], que emplea un campo de tensiones supuesto mediante un principio variacional de Hellinger-Reissner.

Este interés ha desembocado en la formulación propuesta por Simó y colaboradores ([40], [41]) de elementos con deformaciones supuestas mejoradas ("Enhanced Assumed Strain") que enmarca de forma natural el planteamiento de modos incompatibles de Wilson y Taylor dentro de un principio variacional de Hu-Washizu. Esta formulación se discute y aplica más abajo (aptdo. 4.2). Una ventaja clave es su incorporación natural a problemas distintos de la elasticidad lineal como la plasticidad, en donde la resolución iterativa del problema no lineal está gobernada por incrementos de desplazamientos y por tanto de deformaciones.

Los elementos con deformaciones supuestas poseen además un gran potencial para representar la localización de deformaciones, como ha sido comprobado en [45], [46], obteniendo resultados comparables a elementos específicamente desarrollados para localización. Estos resultados han servido de motivación para realizar un estudio comparativo en un ámbito más amplio como se describe en el aptdo. 4.3.

4.2 Formulación

4.2.1 Formulación Débil

Se resume aquí la formulación de deformaciones supuestas mejoradas empleada, en el marco desarrollado por [40]; para mayor detalle, consultar [20], [21].

El planteamiento de la formulación mixta se basa en un funcional de Hu-Washizu [56], admitiendo que existe para cada punto $\boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathsf{R}^3$ una función $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ que define la densidad de energía interna por unidad de volumen, dependiente del tensor de deformaciones lineal $\boldsymbol{\varepsilon}$. Las incógnitas del problema corresponden al campo de desplazamientos $\boldsymbol{u}$, al campo de deformaciones infinitesimales $\boldsymbol{\varepsilon}$ y al campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ en Ω.

La idea clave es una reparametrización del campo de deformaciones de la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \boldsymbol{u} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}; \qquad \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s(\delta\boldsymbol{u}) + \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}. \tag{11}$$

Donde $\nabla^s \boldsymbol{u}$ (parte simétrica del gradiente de desplazamientos) es la componente *"compatible"* del campo de deformaciones, y $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ es la componente *"mejorada"* (incompatible) del mismo. Esta denominación responde a que, aunque para la solución exacta el campo $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ sea nulo, para la solución aproximada en una malla discreta, este campo permite mejorar dicha aproximación. No es preciso imponer ningún requerimiento de continuidad a priori al campo $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ entre los distintos elementos.

Con esta reparametrización, se obtienen las ecuaciones variacionales:

$$\left.\begin{aligned} \int_\Omega \nabla^s(\delta\boldsymbol{u}) : \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W(\nabla^s\boldsymbol{u} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})\, dV - G_{ext}(\delta\boldsymbol{u}) = 0 \\ \int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\, dV = 0 \\ \int_\Omega \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : [-\boldsymbol{\sigma} + \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W(\nabla^s\boldsymbol{u} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})]\, dV = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

para todas las posibles variaciones $(\delta\boldsymbol{u}, \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \delta\boldsymbol{\sigma}) \in \mathcal{V} \times \overline{\mathcal{E}} \times \mathcal{S}$, donde $\overline{\mathcal{E}}$ es el espacio de las variaciones admisibles de deformaciones mejoradas; además,

$$\begin{aligned} G_{ext}(\delta\boldsymbol{u}) &= \int_\Omega \rho_0 \boldsymbol{b} \cdot \delta\boldsymbol{u}\, dV + \int_{S_t} \boldsymbol{t} \cdot \delta\boldsymbol{u}\, dS, \\ \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W &= \partial W / \partial \boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Conviene observar que las ecuaciones anteriores corresponden al problema convencional de elasticidad, con la salvedad de que aquí la tensión es función no sólo de la deformación "compatible" ($\nabla^s\boldsymbol{u}$), sino también de la "mejorada" ($\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$). La ecuación $(12)_2$ conduce para la solución exacta a $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}$; sin embargo no resulta así en el problema discreto.

4.2.2 Solución Aproximada mediante Elementos Finitos

Para el campo de deformaciones compatibles es posible establecer la aproximación habitual isoparamétrica de elementos finitos en subdominios $\Omega_e \subset \Omega$, $\cup\Omega_e = \Omega$. Sea $\boldsymbol{u}_e^h \in \mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ y $\nabla^s\boldsymbol{u}^h \in \nabla^s\mathcal{V}^h \subset \nabla\mathcal{V}$, siendo $\mathcal{V}^h$ y $\nabla^s\mathcal{V}^h$ espacios funcionales de dimensión finita, asociados a una discretización "h". La aproximación se realiza mediante las funciones de forma $\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})$, referidas a coordenadas isoparamétricas $\boldsymbol{\xi}$:

$$\boldsymbol{u}_e^h = \mathbf{N}_e(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{d}_e, \qquad \nabla^s\boldsymbol{u}_e^h = \mathbf{B}_e(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{d}_e, \tag{13}$$

donde $\mathbf{d}_e$ son los desplazamientos nodales y $\mathbf{B}_e(\boldsymbol{\xi}) = \nabla^s\mathbf{N}_e(\boldsymbol{\xi})$ es el operador de interpolación de deformaciones del elemento.

Para $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ se emplea una aproximación similar a la definida para el campo de deformaciones compatible. Sea $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^h(\boldsymbol{\xi}) \in \overline{\mathcal{E}}^h \subset \overline{\mathcal{E}}$:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^h(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{G}_e(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\alpha}_e, \tag{14}$$

donde $\mathbf{G}_e(\boldsymbol{\xi})$ es el operador de interpolación de deformaciones "mejoradas" del elemento, y $\boldsymbol{\alpha}_e$ son grados de libertad internos del elemento que definen este campo.

Tomaremos el espacio aproximante de tensiones $\mathcal{S}^h$ ortogonal a $\overline{\mathcal{E}}^h$, por lo que la ecuación $(12)_2$ se cumple idénticamente:

$$\forall(\delta\boldsymbol{\sigma}_e^h, \boldsymbol{\varepsilon}_e^h) \in \mathcal{S}^h \times \overline{\mathcal{E}}^h, \ \int_{\Omega_e} \delta\boldsymbol{\sigma}_e^h : \boldsymbol{\varepsilon}_e^h\, dV = 0. \tag{15}$$

Sustituyendo las aproximaciones (13), (14) en (12) y considerando $\delta\mathbf{d}_e$ arbitrarios resultan las ecuaciones algebraicas:

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{A}_{e=1}^{nel}[\mathbf{f}_e^{int}(\mathbf{d}_e, \boldsymbol{\alpha}_e) - \mathbf{f}_e^{ext}] = \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}_e = \mathbf{0}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

donde $\mathsf{A}_{e=1}^{nel}$ es el operador de ensamblaje de elementos de la malla, y

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e^{ext} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_e} \rho_0 \mathbf{N}_e^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{b}\, dV + \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{N}_e^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{t}\, dS, \\ \mathbf{f}_e^{int}(\mathbf{d}_e, \boldsymbol{\alpha}_e) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^{\mathrm{T}} \cdot \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W(\mathbf{B}_e \cdot \mathbf{d}_e + \mathbf{G}_e \cdot \boldsymbol{\alpha}_e)\, dV, \\ \mathbf{h}_e(\mathbf{d}_e, \boldsymbol{\alpha}_e) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_e} \mathbf{G}_e^{\mathrm{T}} \cdot \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W(\mathbf{B}_e \cdot \mathbf{d}_e + \mathbf{G}_e \cdot \boldsymbol{\alpha}_e)\, dV. \end{aligned}$$

Las ecuaciones (16) constituyen en general un sistema no lineal en función de las incógnitas ($\mathbf{d}_e$, $\boldsymbol{\alpha}_e$), cuya resolución se puede efectuar mediante un procedimiento iterativo tipo Newton. Las variables $\boldsymbol{\alpha}_e$ son internas a nivel de cada elemento, por lo que pueden ser eliminadas por "condensación" del sistema de ecuaciones global; linealizando las ecuaciones para una iteración (k) y unos incrementos ($\Delta\mathbf{d}_e$, $\Delta\boldsymbol{\alpha}_e$), se obtiene la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_e^{(k)} & [\boldsymbol{\Gamma}_e^{(k)}]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\Gamma}_e^{(k)} & \mathbf{H}_e^{(k)} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{d}_e \\ \Delta\boldsymbol{\alpha}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{f}_e^{int(k)} + \mathbf{f}_e^{ext(k)} \\ -\mathbf{h}_e^{(k)} \end{Bmatrix}, \tag{17}$$

donde se ha empleado la notación

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e^{(k)} &\stackrel{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial \mathbf{f}_e^{int}}{\partial \mathbf{d}_e}\right|_{(k)} = \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_e^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{D}^{(k)} \cdot \mathbf{B}_e)\, dV, \\ \boldsymbol{\Gamma}_e^{(k)} &\stackrel{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial \mathbf{h}_e}{\partial \mathbf{d}_e}\right|_{(k)} = \left.\left[\frac{\partial \mathbf{f}_e^{int}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_e}\right]^{\mathrm{T}}\right|_{(k)} = \int_{\Omega_e} (\mathbf{G}_e^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{D}^{(k)} \cdot \mathbf{B}_e)\, dV, \\ \mathbf{H}_e^{(k)} &\stackrel{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial \mathbf{h}_e}{\partial \boldsymbol{\alpha}_e}\right|_{(k)} = \int_{\Omega_e} (\mathbf{G}_e^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{D}^{(k)} \cdot \mathbf{G}_e)\, dV, && (18) \\ \boldsymbol{D}^{(k)} &\stackrel{\text{def}}{=} \partial^2_{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}} W(\mathbf{B}_e \cdot \mathbf{d}_e^{(k)} + \mathbf{G}_e \cdot \boldsymbol{\alpha}_e^{(k)}). && (19) \end{aligned}$$

Eliminando $\Delta\boldsymbol{\alpha}_e$ de (17) se obtiene la ecuación "condensada"

$$\overline{\mathbf{K}}_e^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{d}_e = \mathbf{f}_e^{ext(k)} - \overline{\mathbf{f}}_e^{int(k)}, \tag{20}$$

donde

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{K}}_e^{(k)} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{K}_e^{(k)} - [\boldsymbol{\Gamma}_e^{(k)}]^{\mathrm{T}} \cdot [\mathbf{H}_e^{(k)}]^{-1} \cdot [\boldsymbol{\Gamma}_e^{(k)}], \\ \overline{\mathbf{f}}_e^{int(k)} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}_e^{int(k)} - [\boldsymbol{\Gamma}_e^{(k)}]^{\mathrm{T}} \cdot [\mathbf{H}_e^{(k)}]^{-1} \cdot \mathbf{h}_e^{(k)}. \end{aligned}$$

Conviene observar que a pesar de que el planteamiento se ha enmarcado en el contexto de la elasticidad, se puede extender inmediatamente al campo de la plasticidad sin más que emplear el módulo elastoplástico tangente $\boldsymbol{D}_{ep}^{(k)}$ en (19).

Destacamos además dos observaciones en relación con la estabilidad y convergencia del método:

- Para garantizar la *estabilidad* se debe verificar que la matriz $\mathbf{H}_e$ (18) sea definida positiva y, por tanto, invertible; Para ello las columnas de $\mathbf{G}_e(\boldsymbol{\xi})$ deben ser linealmente independientes entre sí.

- Una condición necesaria para la convergencia es que los elementos sean capaces de reproducir un campo de tensiones constante $\boldsymbol{\sigma}^0$, dentro del espíritu del "criterio de la parcela". Sea n_ε el número de parámetros independientes que definen el campo "mejorado"; la condición de ortogonalidad (15) junto con (14) implica que $\forall \boldsymbol{\alpha}_e \in \mathsf{R}^{n_\varepsilon}$, $\forall \boldsymbol{\sigma}^0$:

$$\boldsymbol{\alpha}_e \cdot \int_\square (\mathbf{G}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0) j(\boldsymbol{\xi})\, d\square = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{0} = \overline{\mathbf{G}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_\square \mathbf{G}\, j(\boldsymbol{\xi})\, d\square \qquad (21)$$

  Esta ecuación se ha expresado cambiando a las variables que definen el dominio isoparamétrico del elemento; según sea el problema de 2 ó 3 dimensiones, éste será un cuadrado o un cubo de lados $[-1, +1]$ que se denota por $\square$; $j(\boldsymbol{\xi}) = \det(\partial \mathbf{x}/\partial \boldsymbol{\xi})$ es el determinante del Jacobiano de la transformación, y $d\square = d\xi\, d\eta\, d\zeta$ (para 3D).

4.2.3 Generación de Campos de Deformaciones Supuestas

Es posible definir los modos "mejorados" de deformaciones en función de la deformación en coordenadas isoparamétricas (que denotaremos por $\boldsymbol{\varepsilon}^\xi$), de forma similar a lo realizado en [34] para campos de tensiones. La relación entre ambas medidas de la deformación es

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^\xi = \frac{j(\boldsymbol{\xi})}{j_0} \mathbf{J}_0^{\mathrm{T}} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \cdot \mathbf{J}_0,$$

donde $\mathbf{J}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right|_{\boldsymbol{\xi}=0}$; $j_0 \stackrel{\text{def}}{=} \det(\mathbf{J}_0)$. Los pasos a seguir resultan por tanto:

1. Definir las funciones de interpolación $\mathbf{G}^\xi(\boldsymbol{\xi})$ para el campo de deformaciones mejorado $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^\xi(\boldsymbol{\xi})$ en el espacio de coordenadas naturales:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^\xi(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{G}^\xi(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\alpha}_e, \quad \boldsymbol{\alpha}_e \in \mathsf{R}^{n_\varepsilon}.$$

2. Obtención de las funciones de interpolación $\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi})$ para el campo de deformaciones mejorado $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e(\boldsymbol{\xi})$ en el espacio físico (14). La expresión es

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{j_0}{j(\boldsymbol{\xi})} [\mathbf{J}_0^{-T} \cdot \mathbf{G}^\xi \cdot \mathbf{J}_0^{-1}], \qquad (22)$$

Así, si se impone la condición (21), sabiendo que $\mathbf{J}_0$ y j_0 son constantes, se obtiene:

$$\int_{\square} \mathbf{G}^{\xi}(\boldsymbol{\xi})\, d\square = 0. \tag{23}$$

De esta forma, la incorporación del término $j_0/j(\boldsymbol{\xi})$ en la ecuación (22) conduce a la restricción (23) que es independiente de la geometría del elemento, siendo tan sólo función de la estructura del operador $\mathbf{G}^{\xi}(\boldsymbol{\xi})$ de interpolación de deformaciones mejoradas en coordenadas isoparamétricas. Este operador proporciona por tanto un método idóneo para diseñar y clasificar los elementos de deformaciones supuestas, como se ve a continuación.

4.2.4 Elementos Empleados

Con la metodología anterior, es inmediato definir los elementos que emplearemos en este trabajo. Se trata de elementos cuadriláteros de 4 nodos en todos los casos.

Cuadrilátero de Wilson/Taylor (Q1/E4).- En [40] se demuestra que el elemento de modos incompatibles de Wilson y Taylor [58] equivale a los siguientes modos de deformaciones supuestas adicionales al campo de deformaciones compatible:

$$\mathbf{G}^{\xi}_{wt} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta \end{bmatrix}$$

Es inmediato comprobar que $\int_{\square} \mathbf{G}^{\xi}_{wt}\, d\square = 0$. La denominación Q1/E4, obedece a que corresponde a un cuadrilátero bilineal (interpolación de primer orden en desplazamientos) con 4 modos adicionales de deformación.

Cuadrilátero de Simo/Rifai (Q1/E5).- Corresponde este elemento a añadir un modo adicional al anterior, resultando:

$$\mathbf{G}^{\xi}_{sr} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta \\ 0 & \eta & 0 & 0 & -\xi\eta \\ 0 & 0 & \xi & \eta & \xi^2 - \eta^2 \end{bmatrix}$$

Asimismo se verifica $\int_{\square} \mathbf{G}^{\xi}_{sr}\, d\square = 0$, obteniéndose un elemento con 5 modos adicionales.

Cuadrilátero de Andelfinger/Ramm (Q1/E7).- Este elemento propuesto por [1] completa el elemento de Wilson/Taylor mediante términos cuadráticos, obteniéndose 7 modos adicionales:

$$\mathbf{G}_{ar}^{\xi} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & \xi\eta \end{bmatrix}$$

Cuadrilátero de Ortiz/Leroy.- Este elemento ha sido propuesto por [29] para problemas de localización de deformaciones. No se plantea, al contrario que los anteriores, en coordenadas isoparamétricas, por lo que lo definiremos a través de su operador **G** de la ecuación (12).

Consideramos que el campo de deformaciones mejorado se activa sólo en el centroide del elemento cuando se produce la singularidad del tensor acústico (9) este punto. Se obtiene entonces para 2D:

$$\mathbf{G}_0 = \Lambda \begin{bmatrix} g_1 n_1 + g_1 n_1 \\ g_2 n_2 + g_2 n_2 \\ g_1 n_2 + g_2 n_1 \end{bmatrix},$$

donde

$$\Lambda = \begin{cases} \lambda/2, & \text{si } \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} > 0; \\ (\lambda - 1)/2, & \text{si } \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} < 0. \end{cases}$$

siendo $\boldsymbol{g}$ y $\boldsymbol{n}$ los vectores polarización y normal a la banda de localización según se definen en en aptdo. 2. El parámetro λ se calcula obligando a la condición $\int_{\Omega_e} \mathbf{G}_0 \, dV = 0$.

4.3 Estudio Comparativo

Presentamos aquí varios análisis comparativos de la respuesta de los elementos definidos en el apartado anterior para problemas de localización de deformaciones. El objeto ha sido comprobar la adecuación de los elementos a los elevados gradientes de deformación que se imponen, proporcionando una respuesta que admita la cinemática sin bloqueo. Los análisis se han efectuado mediante "subrutinas de usuario" que incorporan los elementos descritos en los aptdos. 4.2.2 y 4.2.3 en un programa de elementos finitos de propósito general [15].

Ejemplo 1: Problema de cortante no uniforme.- Este problema ha sido propuesto por Ortiz [29] y analizado tanbién por Steinmann [46]. Corresponde al análisis de un elemento cuadrangular, como el representado en la figura 2_a, sometido a una solicitación que impone una distribución de tensiones cortantes no uniforme.

Para provocar la localización, se ha empleado un modelo de plasticidad de Von Mises, con curva de ablandamiento parabólica definida en deformaciones

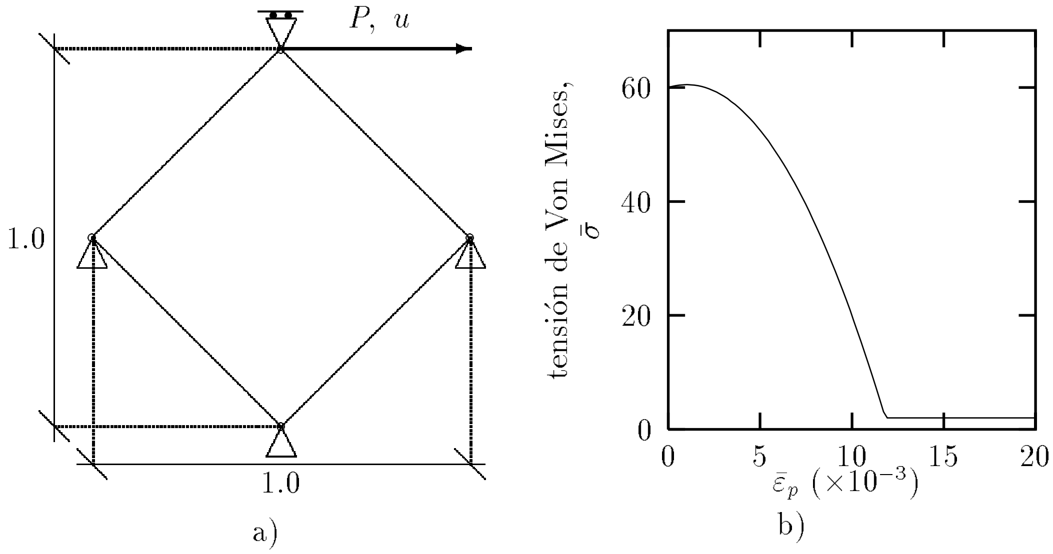


Figura 2: Elemento sometido a cortante no uniforme: a) geometría b) ley de tensión-deformación plástica efectiva

y tensiones efectivas según la ley $\bar{\sigma} = \max[\frac{k}{2}\bar{\varepsilon}_p^2 + h_0\bar{\varepsilon}_p + \sigma_y, \sigma_c]$ (figura 2_b). Las características mecánicas del material son: $E = 30000$, $\nu = 0.3$, $\sigma_y = 60$, $h_0 = 1000$, $k = -10^6$, $\sigma_c = 2$.

La respuesta de los distintos elementos queda recogida en la figura 3, donde se representa la evolución de la fuerza resultante frente al desplazamiento impuesto. Se observa que el elemento con formulación $\bar{B}$ no es capaz de reproducir adecuadamente la respuesta con ablandamiento. El elemento de Ortiz presenta un comportamiento algo mejor. El elemento Q1/E4, a pesar de no ser un elemento especialmente desarrollado para localización, presenta una respuesta muy buena. El elemento Q1/E5 reproduce una carga límite inferior a los demás, produciéndose una degradación en la respuesta más rápida, en consonancia con los resultados obtenidos por [46]. Por último, el elemento Q1/E7 coincide en su respuesta con el elemento Q1/E5.

Se observa que aparentemente los elementos Q1/E4, Q1/E5 y Q1/E7 proporcionan una respuesta mejor para este problema que el elemento de Ortiz, específicamente desarrollado para localización. El motivo puede ser que por su mayor especificidad en la implementación no lo hayamos logrado codificar convenientemente.

Ejemplo 2: Banda de cortante originada por una distribución periódica de inhomogeneidades.- Este problema planteado también por [29], trata de reproducir la formación de una banda de cortante por la existencia de una distribución periódica de inhomogeneidades. Para representar la falta de homogeneidad, se considera una celda periódica a la que faltan un par de elementos de la diagonal de acuerdo a la figura 4, y se somete a movimientos

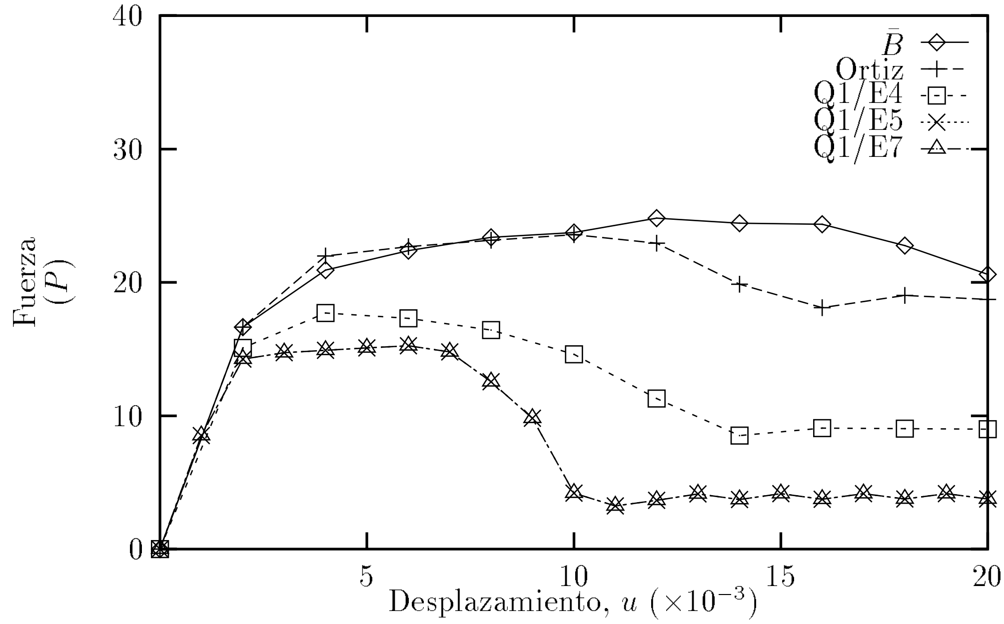
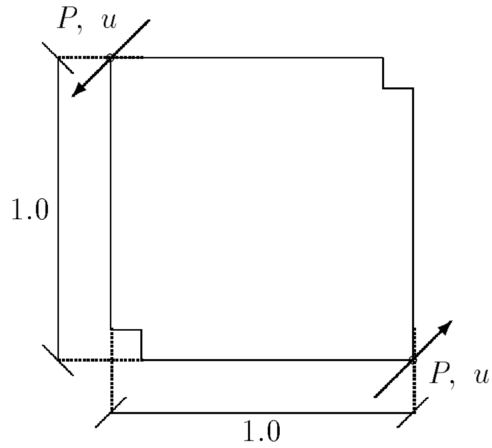


Figura 3: Resultados fuerza-desplazamiento para el elemento sometido a cortante no uniforme, con distintos tipos de elementos.

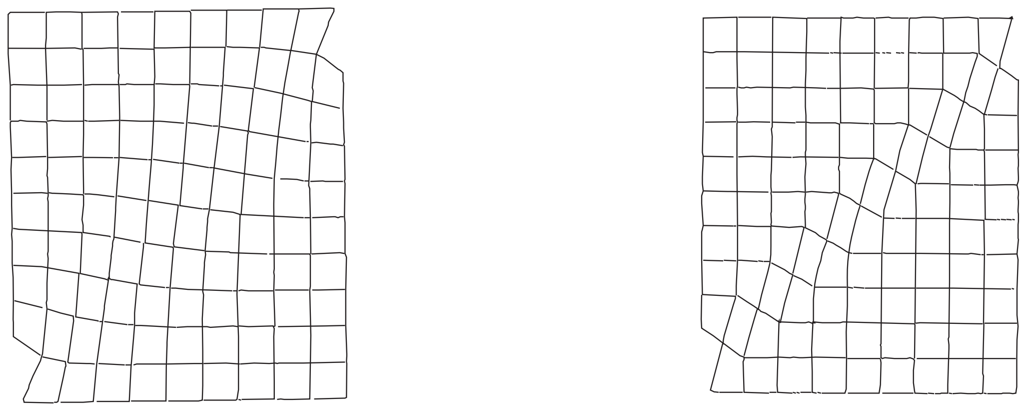
impuestos en la dirección de dicha diagonal.

Figura 4: Placa con inhomogeneidades periódicas sometida a cortante



La plasticidad sigue un criterio de fluencia de Von Mises con reblandecimiento. Las características mecánicas del material se definen mediante: $E = 2\,10^{11}$, $\nu = 0.3$, $h_0 = 5\,10^9$ $(0 < \bar{\varepsilon}_p < 0.5\%)$, $h_1 = -2\,10^9$ $(\bar{\varepsilon}_p > 0.5\%)$.

La figura 5_a representa la deformada obtenida para los elementos cuadrangulares con formulación $\bar{B}$. En ella no se aprecia la formación de la banda de cortante. Sin embargo en la respuesta con elementos Q1/E4, Q1/E5 y Q1/E7 sí se aprecia claramente una banda con el ancho de un elemento. En la figura 5_b, se muestra la deformada para elementos Q1/E4; los otros elementos proporcionan resultados muy similares. En la figura 6 se observa la



a) b)

Figura 5: Deformación de placa con inhomogeneidades periódicas, a) con elementos $\bar{B}$ y b) con elementos Q1/E4 de modos incompatibles.

respuesta de los diferentes elementos en la curva carga-desplazamiento. Mientras que los elementos Q1/E4, Q1/E5 y Q1/E7 son capaces de representar el ablandamiento, el elemento $\bar{B}$ prácticamente conserva una respuesta constante. Conviene hacer notar la coincidencia casi total en la respuesta de los elementos de deformaciones supuestas Q1/E4, Q1/E5 y Q1/E7. Por último, la figura 7 representa el perfil de la distribución de deformaciones plásticas efectivas a través del ancho del sólido a la mitad de su altura. Se observa claramente cómo el elemento $\bar{B}$ no es capaz de localizar la respuesta a diferencia de los elementos mejorados.

Ejemplo 3: Problema de compresión no uniforme.- Este caso consiste en un ensayo convencional de compresión simple, en el que las restricciones de fricción perfecta impuestas en los contornos generan un estado de compresión no uniforme, suficiente para provocar la iniciación de bandas de localización. Un ejemplo similar ha sido propuesto por [45].

Las características mecánicas del material son: $E = 2\,10^{11}$, $\nu = 0.3$, $h_0 = 5\,10^9$ $(0 < \bar{\varepsilon}_p < 0.5\%)$, $h_1 = -2\,10^9$ $(\bar{\varepsilon}_p > 0.5\%)$. Se ha considerado una formulación elastoplástica con criterio de fluencia Drucker-Prager con ángulo de rozamiento $\Phi = 20°$, ángulo de dilatancia $\Psi = 0°$ y tensión de fluencia en compresión $\sigma_c = 0.207\,10^6$ y ablandamiento por deformación según los parámetros h_0, h_1. Se ha impedido el desplazamiento lateral en los contornos superior e inferior, lo que equivale a adoptar un rozamiento infinito entre la probeta y los platos de la prensa del ensayo. El análisis se ha realizado con desplazamiento vertical controlado.

Se observa la diferente respuesta de los elementos $\bar{B}$ (figura 8_a) y los

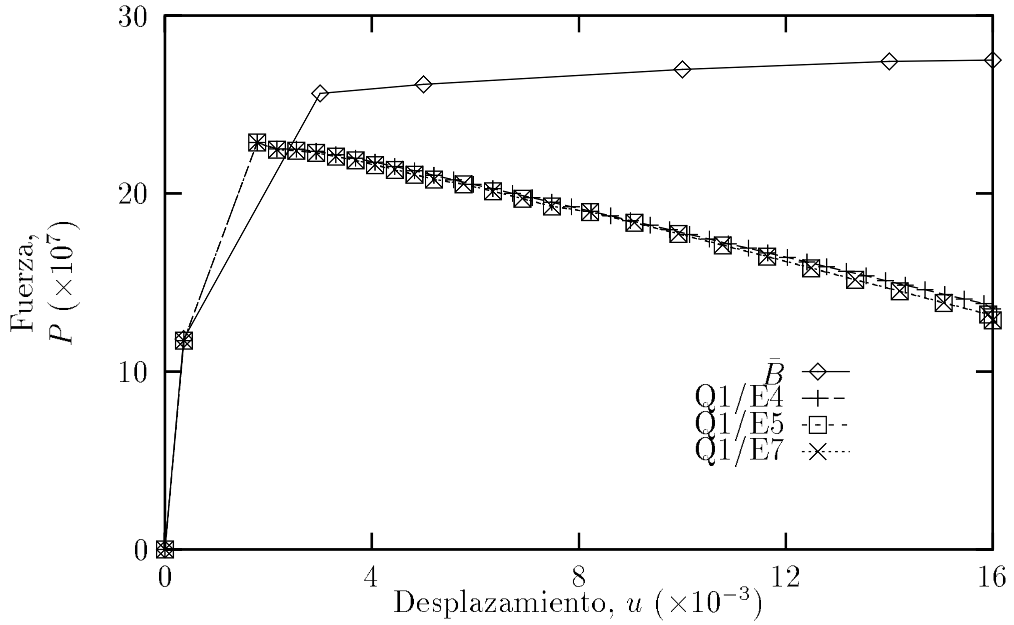


Figura 6: Placa con distribución periódica de inhomogeneidades, con diversos elementos: curva fuerza-desplazamiento.

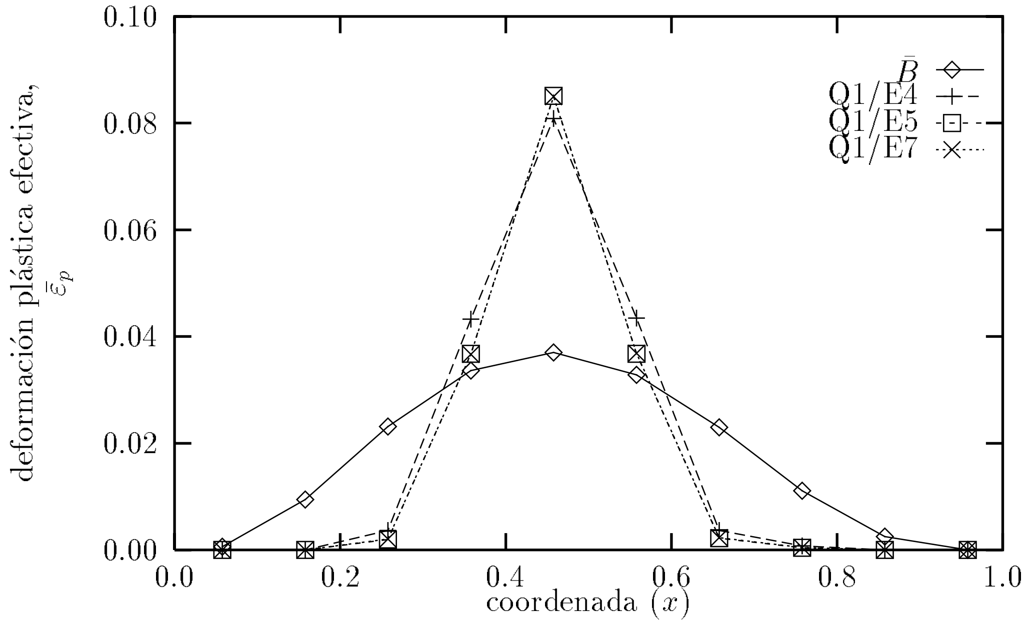


Figura 7: Placa con distribución periódica de inhomogeneidades, con diversos elementos: perfil de deformaciones plásticas efectivas según un corte horizontal a la mitad de la altura.

elementos con deformaciones supuestas (figura 8_b). En esta última figura se muestra la deformada obtenida con Q1/E4, ya que las de Q1/E5 y Q1/E7 son muy similares. Las figuras 9 y 10 representan la curva carga-desplazamiento

a) b)

Figura 8: Compresión no uniforme de una placa con fricción perfecta en los extremos: malla deformada a) con elementos $\bar{B}$, b) con elementos Q1/E4 de modos incompatibles.

y el perfil de deformaciones plásticas respectivamente para cada uno de los elementos. Conviene nuevamente destacar la práctica coincidencia en la respuesta de los diferentes elementos de deformaciones supuestas y su excelente captura de la localización.

5 Rotura de Probetas de Hormigón

En algunos materiales la localización de deformaciones puede venir gobernada por fenómenos complejos de tipo constitutivo que produzcan un fuerte ablandamiento del material. Es el caso del hormigón sometido a compresión en el régimen posterior a la carga máxima (post-pico). Este trabajo viene motivado por ser el hormigón un material muy empleado en la construcción pero aún insuficientemente conocido en cuanto a su comportamiento mecánico a nivel elemental.

Desarrollamos a continuación un modelo original que pretende interpretar el comportamiento del hormigón partiendo de premisas muy sencillas y una justificación física sólida.

Debemos agradecer la contribución a este trabajo de M. Ortiz, del cual han partido algunas de las ideas fundamentales empleadas ([27], [28], [33]).

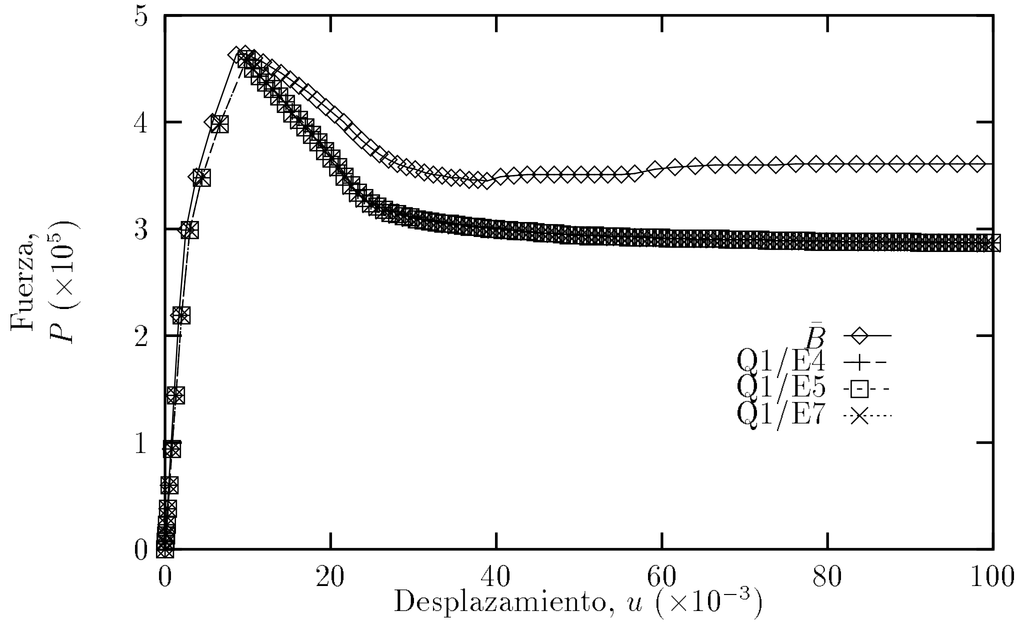


Figura 9: Compresión no uniforme de una placa, con diversos elementos: curva fuerza-desplazamiento.

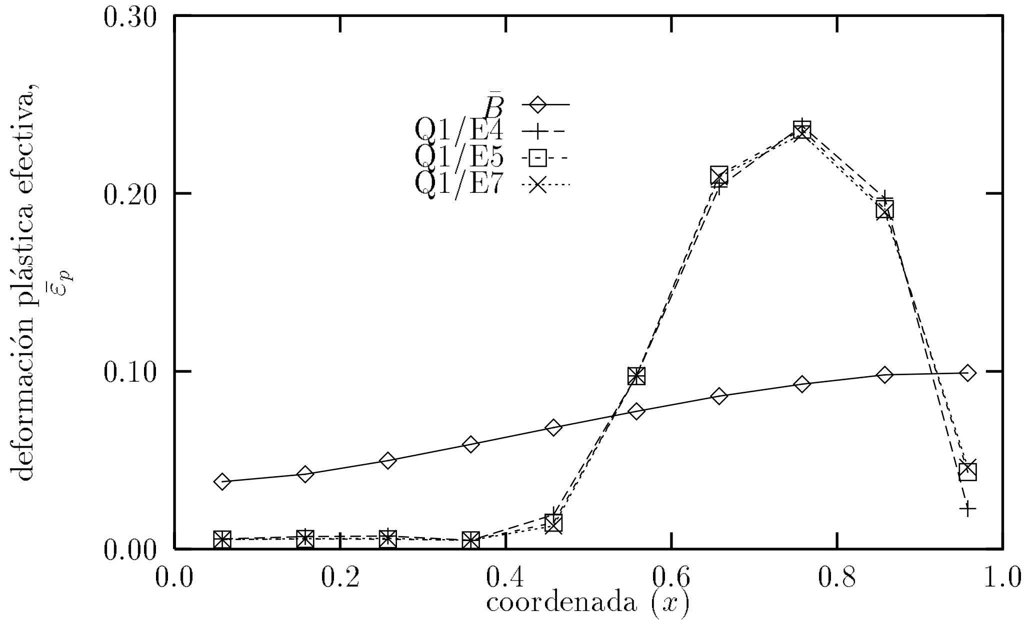


Figura 10: Compresión no uniforme de una placa, con diversos elementos: perfil de deformaciones plásticas efectivas según un corte horizontal.

5.1 Modelización constitutiva del hormigón

El modelo se basa en la consideración de la naturaleza heterogénea del hormigón, al estar compuesto de dos fases diferenciadas: mortero y árido.

La concentración de tensiones que se origina en la interfase árido-mortero genera microdefectos alrededor de los granos. Estos defectos activan un crecimiento de fisuras cuando el hormigón se somete a carga. En las etapas iniciales el proceso de fisuración se encuentra muy distribuido, pero para ciertos caminos de carga estas microfisuras se confinan en bandas estrechas que eventualmente pueden dar lugar a planos bien definidos de rotura.

El modelo numérico propuesto en este trabajo pretende verificar que con una adecuada representación del mortero como un material elasto-frágil y los áridos como un material granular, haciendo uso de la teoría de mezclas, es posible representar los aspectos fundamentales de la rotura a compresión del hormigón.

5.2 El hormigón como material compuesto

La idealización del hormigón en masa como material compuesto fue inicialmente propuesta por Ortiz y Popov [27]. Resumimos aquí las ideas principales del modelo, que se pueden encontrar con mayor detalle en la referencia citada y en [28] y [20].

La teoría de mezclas se sustenta en dos hipótesis fundamentales. En primer lugar, la ley de mezclas:

$$\boldsymbol{\sigma} = \alpha_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{\sigma}_2, \tag{24}$$

donde $(\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2)$ son las tensiones de fase medias respectivamente del árido y del mortero, $\boldsymbol{\sigma}$ la tensión global (de la mezcla), y (α_1, α_2) las respectivas fracciones volumétricas. Conviene observar que $\boldsymbol{\sigma}_1$ y $\boldsymbol{\sigma}_2$ deben entenderse en el sentido de la mecánica de medios continuos, y no como tensiones interfaciales o intergranulares (es decir, no a nivel micromecánico).

La segunda hipótesis corresponde a admitir la ausencia de difusión entre las fases, es decir, la compatibilidad de las deformaciones:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_2, \tag{25}$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ representan los tensores de deformación del árido, mortero y hormigón (mezcla), respectivamente.

Con base en estas dos hipótesis se establecen las relaciones

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{B}_1 : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\rho}_1, \qquad \boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{B}_2 : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\rho}_2, \tag{26}$$

donde $\boldsymbol{B}_1$ y $\boldsymbol{B}_2$ son los llamados tensores de influencia y $\boldsymbol{\rho}_1$ y $\boldsymbol{\rho}_2$ las tensiones residuales en cada fase.

Los modelos constitutivos propuestos para el árido y el mortero son ambos independientes de la velocidad de deformación. Admitimos pues su descripción mediante relaciones incrementales del tipo:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1 = \boldsymbol{D}_1^T : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1, \qquad \dot{\boldsymbol{\sigma}}_2 = \boldsymbol{D}_2^T : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2, \tag{27}$$

donde $\boldsymbol{D}_1^T$ y $\boldsymbol{D}_2^T$ corresponden a las rigideces tangentes respectivas. Haciendo uso de (24) y (25) se obtiene:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}^T : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{28}$$

donde $\boldsymbol{D}^T = \alpha_1 \boldsymbol{D}_1^T + \alpha_2 \boldsymbol{D}_2^T$, rigidez tangente del hormigón.

5.2.1 Modelización del árido como un material granular

El árido se puede idealizar como un medio granular cuyo comportamiento constitutivo y capacidad resistente viene regida principalmente por la presión media. El criterio de plastificación adoptado es el modelo de Drucker-Prager que se puede expresar como:

$$\mathcal{F} \equiv \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - \kappa_p, \tag{29}$$

donde $I_1 = \sigma_{ii}$ es el primer invariante del tensor de tensiones y $J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$ es el segundo invariante del tensor desviador de tensiones (sumatorio implícito para índices repetidos).

Los coeficientes α y κ_p están relacionados respectivamente con el ángulo de rozamiento del material (Φ) y la cohesión (c) del modelo de Mohr-Coulomb. Dichas constantes pueden obtenerse imponiendo, por ejemplo, la coincidencia del meridiano de compresión para ambos criterios.

Otra característica distintiva de los materiales granulares es el hecho que el ángulo de dilatancia Ψ, definido como el cociente entre la componente volumétrica y desviadora de la tasa de deformación plástica, no coincide con el ángulo de rozamiento Φ. Esto implica la definición de una función potencial del tipo:

$$\mathcal{G} \equiv \sqrt{J_2} + \beta I_1, \tag{30}$$

donde $\beta(\Psi)$ es una función del ángulo de dilatancia. La tasa de deformación plástica se expresa, por tanto, como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \, \frac{\partial \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \tag{31}$$

siendo $\dot{\gamma}$ el parámetro de consistencia plástica.

Se adopta una ley de endurecimiento con la deformación plástica para α similar a la empleada en [54] y [17], caracterizada por un valor de saturación:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha(\bar{\varepsilon}_p) = \alpha_0 + (\alpha_{sat} - \alpha_0)\sqrt{1 - \dfrac{[\bar{\varepsilon}_p - (\bar{\varepsilon}_p)_{sat}]^2}{(\bar{\varepsilon}_p)^2_{sat}}} & \bar{\varepsilon}_p \leq (\bar{\varepsilon}_p)_{sat}; \\ \alpha(\bar{\varepsilon}_p) = \alpha_{sat} & \bar{\varepsilon}_p > (\bar{\varepsilon}_p)_{sat}. \end{array}\right\} \qquad (32)$$

Por tanto, el ángulo de rozamiento crece monotónicamente desde $\Phi_0 = \Phi(\alpha_0)$ a $\Phi_{sat} = \Phi(\alpha_{sat})$ a medida que aumenta la deformación plástica efectiva.

5.2.2 Modelización del mortero como material elasto-frágil

La fase de mortero proporciona cohesión a la fase granular (árido). Una característica diferenciadora del hormigón es la degradación de las propiedades elásticas como consecuencia de la microfisuración en el mortero. Esta microfisuración dota al hormigón de un marcado carácter anisótropo en su respuesta tensional. En la formulación que se describe a continuación, el mortero se representa como un material elasto-frágil, gobernado por un criterio simple pero consistente con la mecánica de la fractura para la propagación de la fisuración.

El modelo empleado para ello se basa en considerar que la fisura se propaga por eliminación de elementos de la malla. Esta técnica ha sido utilizada con anterioridad en [31] para cerámicas y en [38] para el hormigón.

Admitiendo que la energía de fractura viene completamente determinada por las condiciones tensionales existentes en el fondo de la fisura, se define el criterio de fractura como:

$$\mathcal{G}^e = \mathcal{G}^c \qquad (33)$$

siendo $\mathcal{G}^e$ la tasa de liberación de energía debido a la extensión de la fisura y $\mathcal{G}^c$ una constante del material denominada tasa crítica de liberación de energía (ambas por unidad de área).

La tasa de liberación de energía debido a la eliminación de un elemento Ω_e se puede estimar, admitiendo que se pierde su energía elástica de deformación, del siguiente modo:

$$\mathcal{G}^e_{\Omega_e} \approx \frac{1}{h}\int_{\Omega_e} \frac{1}{2} D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} d\Omega_e. \qquad (34)$$

El criterio adoptado para eliminar un elemento de la malla es por tanto:

$$\mathcal{G}^e_{\Omega_e} \geq \mathcal{G}^c. \qquad (35)$$

Para elementos paralelepipédicos ("bricks") isoparamétricos con integración $(2 \times 2 \times 2)$, la integral (34) puede aproximarse para un punto de integración como:

$$\mathcal{G}^e_{\Omega_e} \approx W_e h/8, \qquad (36)$$

siendo $W_e = \frac{1}{2} D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$ la densidad de energía de deformación en dicho punto.

5.3 Resultados numéricos

El modelo arriba descrito se puede implementar fácilmente en un código de elementos finitos no lineal. En nuestro caso lo hemos programado como un material de usuario en un código comercial de propósito general [15], que ha sido empleado para efectuar los “experimentos numéricos” de rotura. El objetivo ha sido simular ensayos de diferentes probetas de hormigón para reproducir el comportamiento en compresión uniaxial y biaxial y los mecanismos básicos de fallo.

Se ha dedicado una especial atención a la implementación de la función potencial de Drucker-Prager. La existencia de un vértice en el eje hidrostático de la superficie de fluencia, correspondiente a la rotura por cavitación, conduce a que el problema numérico se encuentre mal condicionado para ciertos estados de carga si no se adoptan precauciones especiales. El problema se ha resuelto redondeando la esquina mediante el ajuste de un casquete esférico, de forma similar a lo propuesto en [17].

Los elementos utilizados emplean la formulación $\bar{B}$ ([16]) para prevenir el bloqueo bajo flujo plástico incompresible. Para el control de fuerzas y desplazamientos ha sido necesario emplear el método de longitud de arco modificado de Riks, debido a la respuesta altamente inestable.

Las características mecánicas del mortero son $E_{mortero} = 25\,\mathrm{GPa}$, $\nu = 0.2$, $\mathcal{G}^c = 160\,\mathrm{J}/m^2$ y $\alpha_{mortero} = 0.15$. El árido se caracteriza por $E_{arido} = 40\,\mathrm{GPa}$, $\nu = 0.2$, $\Phi_0 = 20°$, $\Phi_{sat} = 30°$ $(\bar{\varepsilon}_p \geq 0.5\%)$, $\Psi = 10°$ y $c = 0.4\,\mathrm{Mpa}$ y $\alpha_{arido} = 0.85$.

Las probetas modelizadas son cubos de 100 mm de lado, sometidos a solicitaciones fundamentalmente de compresión, bajo distintas combinaciones biaxiales y control de carga. Los modelos han empleado elementos finitos de 5 mm de lado, de forma que esta dimensión define una longitud característica que gobierna la localización, relacionada con el tamaño medio del árido. Se admite la existencia de un defecto crítico proveniente de una fisura interfacial en el centro de la probeta, materializado mediante la práctica anulación $(\times 10^{-3})$ de la rigidez del mortero en el elemento correspondiente.

Denominamos en lo que sigue por el índice 2 al eje principal de compresión (vertical en las figuras de la malla), 1 al eje transversal en el plano del papel (horizontal en las figuras) y 3 al eje transversal perpendicular al plano. De esta forma Δl_i será el desplazamiento impuesto sobre el eje i y σ_i la tensión impuesta sobre la cara correspondiente. las combinaciones de carga analizadas son:

1. *Ensayos con razón controlada de deformaciones,* $\Delta l_3/\Delta l_2 = (-0.33)/(-1.0)$ (biaxial), $(-0.10)/(-1.0)$ (biaxial) y $(0.0)/(-1.0)$ (compresión uniaxial en deformación plana);

2. *Ensayos con razón controlada de tensiones,* $\sigma_3/\sigma_2 = (-0.33)/(-1.0)$

(biaxial), $(-0.10)/(-1.0)$ (biaxial), $(0.2)/(-1.0)$ (biaxial con tracción) y $(0.0)/(-1.0)$ (compresión uniaxial en tensión plana);

Algunas de estas combinaciones de cargas corresponden a las configuraciones experimentales empleadas en [49], lo que ha permitido contrastar los resultados numéricos con los experimentales.

La figura 11 muestra la evolución del proceso de rotura en el mortero para una de las combinaciones biaxiales de carga, mientras que los resultados para la compresión uniaxial en deformación plana se muestran en la figura 12.

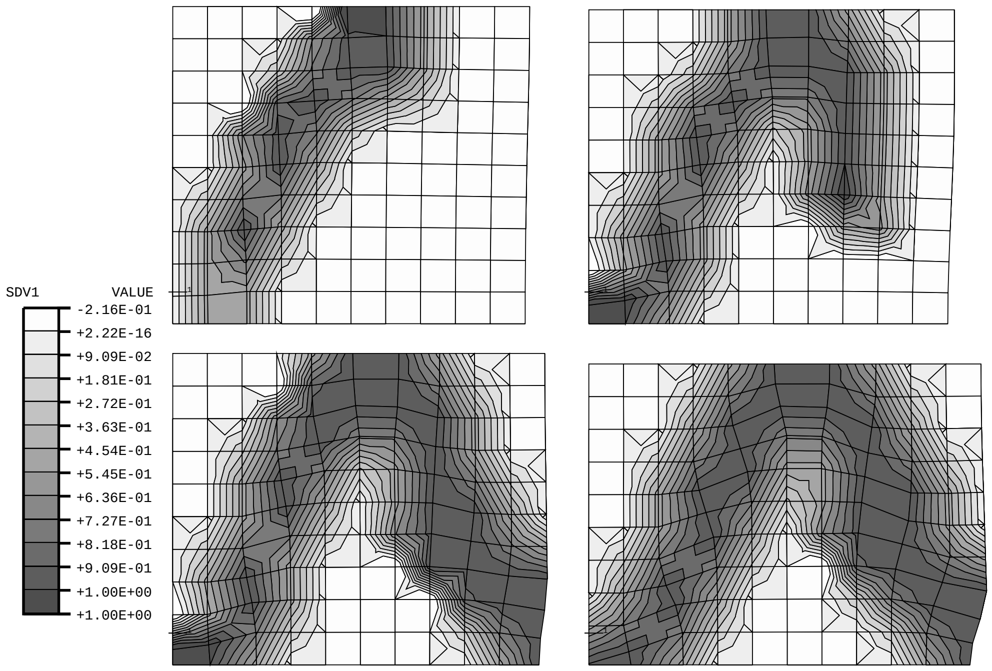


Figura 11: Secuencia de mallas deformadas (desplazamientos$\times 25$) para el caso de carga biaxial ($\Delta l_3/\Delta l_2 = (-0.33)/(-1.0)$). Los niveles de los isovalores indican el proceso de fisuración del mortero, indicativo de la localización de la banda de corte.

De las figuras se desprende que la orientación de la banda de rotura es marcadamante distinta en ambos casos. Resulta también claro que la respuesta global de la probeta está gobernada por una deformación "estructural" consistente en el desplazamiento de partes rígidas e intactas a lo largo de bandas de corte, más bien que una deformación plástica distribuida que responda a una ley tensión-deformación con reblandecimiento.

El desarrollo de la fisuración en el mortero y consecuentemente la formación de las bandas de corte en el árido queda gobernado por dos mecanismos interrelacionados. De una parte, la dilatancia asociada con la deformación a cortante de la fase del árido: debido a la condición de compatibilidad

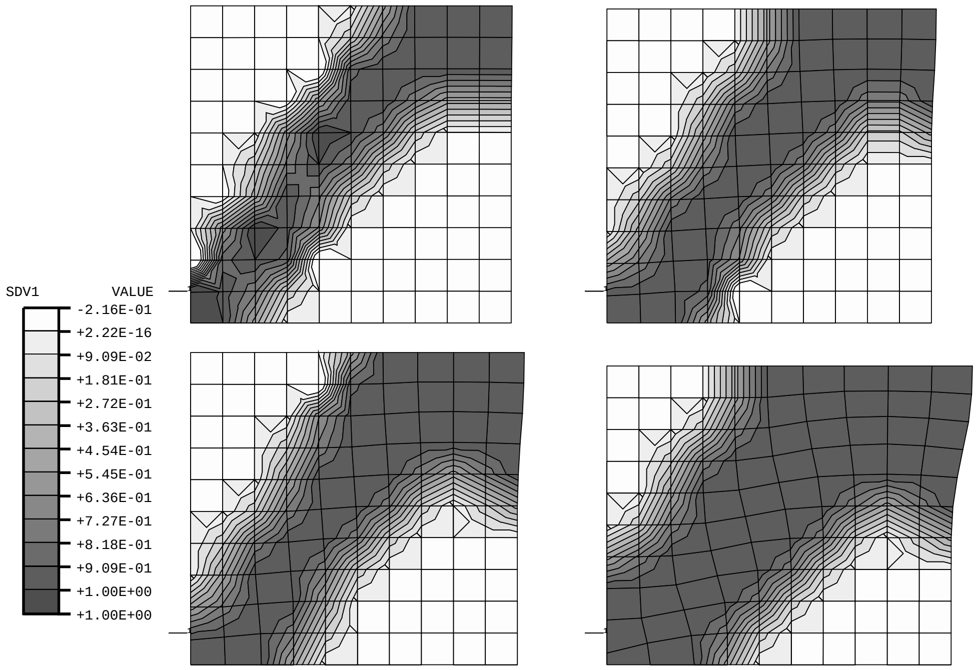


Figura 12: Secuencia de mallas deformadas (desplazamientos$\times 2$) para el caso de compresión uniaxial en deformación plana ($\Delta l_3/\Delta l_2 = (0.0)/(-1.0)$). Los niveles de los isovalores indican el proceso de fisuración del mortero, indicativo de la localización de la banda de corte.

volumétrica entre las dos fases (25), el aumento del volumen del árido genera tensiones de tracción elevadas en el mortero. Por otra parte, durante la apertura de las microfisuras en el mortero se produce un fenómeno de relajación de tensiones. De esta forma se transmiten tensiones hidrostáticas de tracción al árido, provocando su fallo por cavitación, lo que a su vez conduce a un aumento de la dilatancia. Este mecanismo retroalimentado gobierna el proceso de localización en el hormigón, que tiene su origen por lo tanto en su composición heterogénea (mortero + árido).

Las curvas de tensión media - deformación media (equivalentes a las que se medirían al ensayar las probetas, a partir de las fuerzas y desplazamientos de la prensa) se presentan en las figuras 13 y 14. Estas curvas representan la respuesta global de las probetas, que obedece al desarrollo "estructural" de las bandas de localización. Tan pronto como esta banda de corte llega a la superficie lateral de la probeta, la carga sufre una caída abrupta desde el nivel de carga que correspondía a la distribución uniforme de deformaciones, obteniéndose una respuesta con un reblandecimiento acusado.

Debe mencionarse también que la rama de reblandecimiento aquí obtenida es más abrupta que la obtenida en los ensayos experimentales. Obsérvese que las curvas en ocasiones presentan pendiente negativa, lo que ocasiona

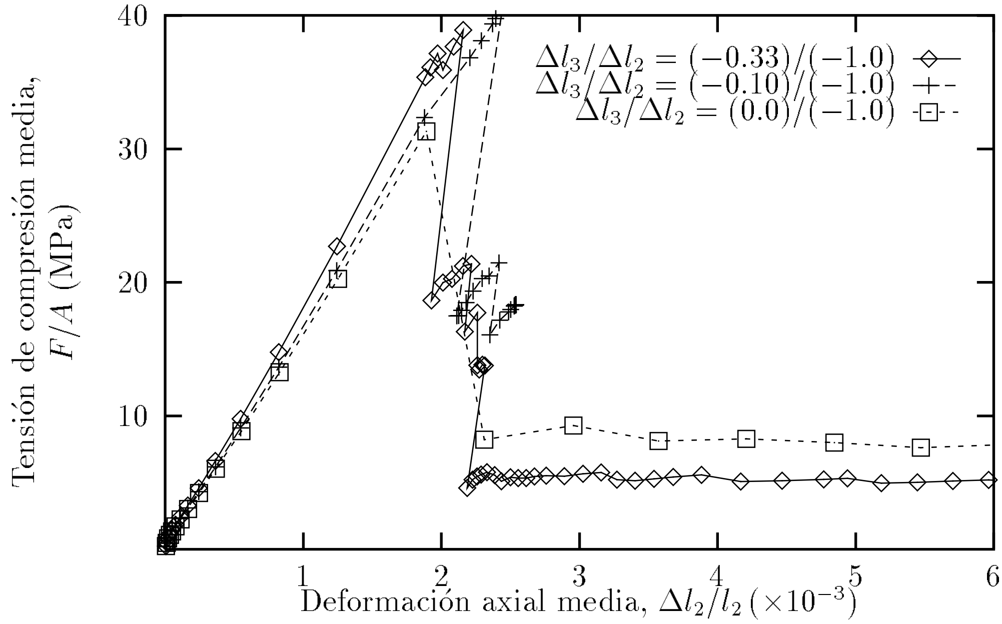


Figura 13: Curvas de tensión axial media frente a deformación axial media para distintos casos biaxiales y uniaxiales con razón de deformaciones controlada.

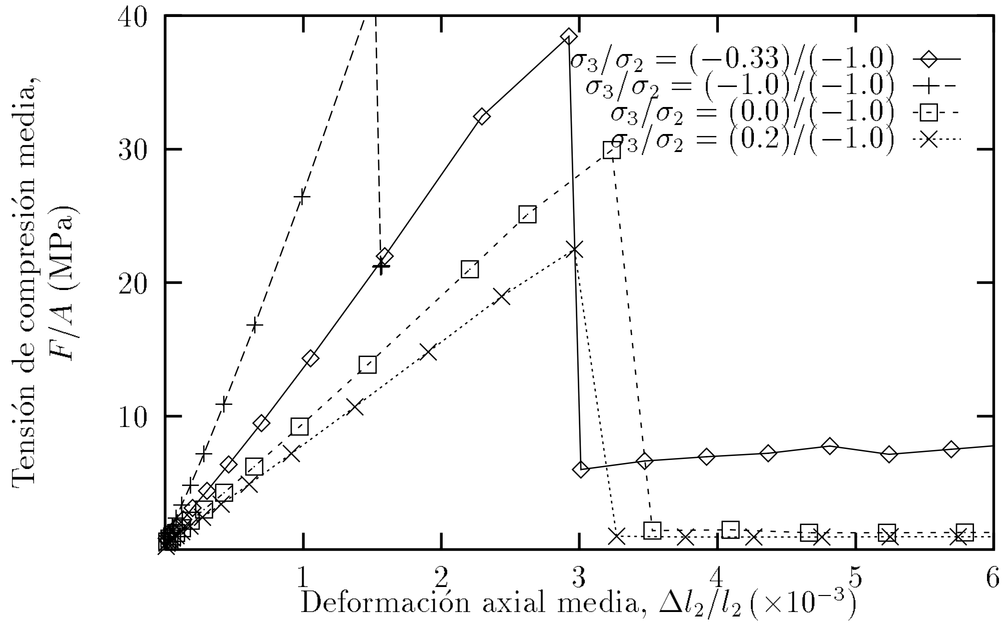


Figura 14: Curvas de tensión axial media frente a deformación axial media para distintos casos biaxiales y uniaxiales con razón de tensiones controlada.

dificultades numéricas que se han resuelto mediante técnicas de continuación basadas en la longitud de arco. Sin embargo, conviene subrayar que en los ensayos físicos la rama de reblandecimiento es también muy sensible a las condiciones de borde impuestas por la fricción entre las placas de carga y la probeta [55]. Otro factor importante es la rigidez del sistema de carga. Nuestras simulaciones numéricas se han desarrollado bajo la hipótesis de placas rígidas sin fricción.

La comparación de las tres curvas en la figura 13 confirma la evidencia experimental [49] de un aumento de la carga máxima del orden del 25% en los ensayos biaxiales en relación con los ensayos uniaxiales de compresión. Después del descenso de carga esta se mantiene aproximadamente constante, siendo la resistencia del árido la que determina esta resistencia residual del hormigón.

Deben mencionarse también algunos aspectos chocantes de los resultados, como que la resistencia residual en el ensayo de compresión uniaxial es mayor que en los ensayos biaxiales para los casos de razón de deformaciones controlada (figura 13). Esta aparente discrepancia con los datos experimentales sólo se puede explicar por el comportamiento estructural de la probeta como consecuencia de las distintas orientaciones de las bandas, evidente de la observación de las figuras 11 y 12.

En efecto, se puede estimar la tensión última de compresión $\bar{\sigma}$, en el caso ideal de un medio granular atravesado por una banda de corte recta de espesor constante y orientación θ, como ([29]):

$$\bar{\sigma} = \frac{c\,\alpha\cot\Phi}{(\sqrt{3}\sin\theta - \alpha\cos\theta)\cos\theta} \tag{37}$$

Midiendo de forma aproximada la orientación obtenida de las bandas para los dos casos mencionados, las tensiones últimas que arroja la ecuación (37) son respectivamente 2 Mpa y 3 Mpa. Estos valores indican la influencia crítica del modo de fallo en la respuesta post-pico.

Por el contrario, resulta razonable en los ensayos de razón de tensiones controlada (figura 14), que para los casos en que se impone carga nula o de tracción en la dirección transversal ($\sigma_3/\sigma_2 = (0.0)/(-1.0)$, $\sigma_3/\sigma_2 = (0.2)/(-1.0)$) la resistencia residual es prácticamente nula.

Finalmente, la figura 15 presenta las curvas tensión-deformación en puntos de distintas zonas de la probeta, dentro y fuera de la banda de rotura. Los resultados muestran la respuesta no homogénea dentro de la probeta: en los puntos de dentro de la banda de corte el camino tensional sigue una rama de reblandecimiento, mientras que el resto de la probeta sufre una descarga elástica. Esto confirma la interpretación de que la probeta se comporta, más allá de la carga última, como bloques rígidos deslizando según las bandas de corte.

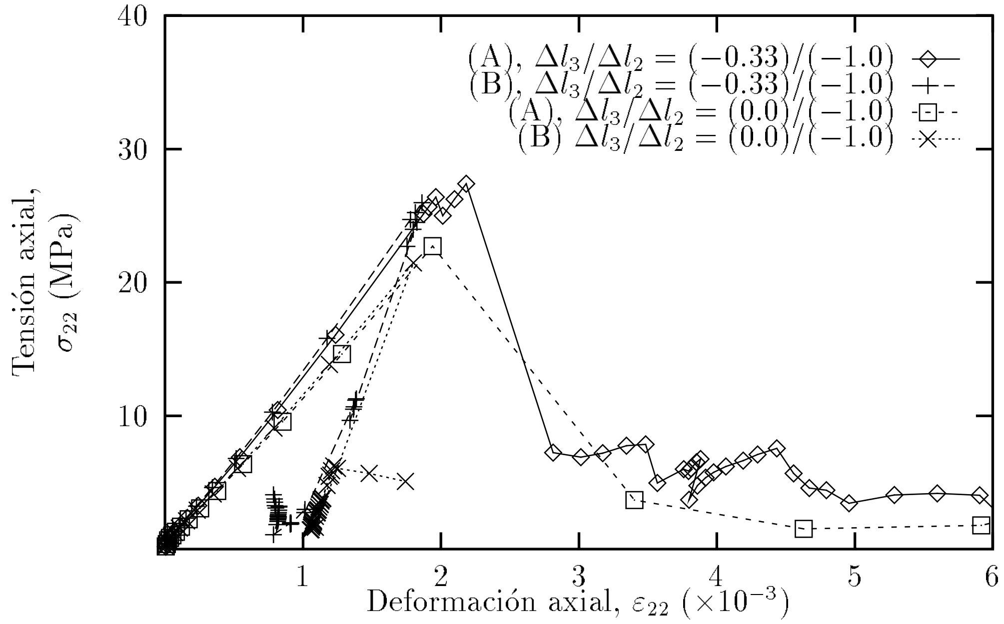


Figura 15: Caminos de tensión axial frente a deformación axial en dos zonas distintas de la probeta: (A) fuera de la banda de rotura, (B) dentro de la banda de rotura, en carga biaxial y deformación plana uniaxial

6 Conclusiones

- El tratamiento de la localización de deformaciones mediante elementos finitos es posible si se toman las precauciones adecuadas para representar la cinemática de las bandas de localización y regularizar la respuesta.
- Los métodos mixtos basados en deformaciones supuestas mejoradas proporcionan un marco general en el que se pueden incuir numerosos elementos propuestos para localización. Los elementos Q1/E4 de modos incompatibles (Wilson-Taylor) proporcionan una buena representación para la localización.
- El modelo de hormigón presentado tiene el atractivo de estar basado en leyes simples y bien conocidas para cada componente. Los resultados obtenidos resultan prometedores al explicar la rotura del hormigón bajo compresión uni- y multiaxial como un fenómeno *estructural* originado por la compatibilidad entre las fases de mortero y agregado.

Referencias

[1] Andelfinger, U y Ramm, E. (1992). *EAS-Elements for 2D- 3D-, plate and shell structures and their equivalence to HR-Elements.* Submitted

to Int. J. Num. Meth. Eng.

[2] Armero, F. y Garikipati, K. (1995). *Recent Advances in the Analysis and Numerical Simulation of Strain Localization in Inelastic Solids.* Computational Plasticity, 4th Intl. Conf., Barcelona.

[3] Bai, Y. y Dodd, B. (1992). *Adiabatic Shear Localization. Occurrance, Theories and Applications.* Pergamon Press.Oxford.

[4] Bazant, Z. P. y Pijaudier-Cabot, G. (1988). *Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence.* J. Appl. Mech. Vol 55. pp 287-293.

[5] Belytschko, T. y Lasry, D. (1989). *Localization limiters and numerical strategies for strain softening materials.* Mazars, J. and Bazant, Z. (eds). "Strain localization and size effect due to cracking and damage". Proc. of France-US workshop.

[6] Belytschko, T; Fish, J. y Engelmann, B. E. (1988). *A finite element with embedded localization zones.* Comp. Meth. in Appl. Mech and Eng. 70. pp 57-89.

[7] Camacho, G.T., Marusich, T.D. y Ortiz, M. (1995). *Modelling of High-Speed Machining and Ballistic Penetration* Computational Plasticity, 4th Intl. Conf., Barcelona.

[8] Cosserat, E. y Cosserat, F. (1909). *Théorie des Corps Deformables.* Herman. Paris

[9] Cundall, P. (1991). *Shear by initiation and evolution in frictional materials.* Proc. Conf. Mechanics Computing in 1990's and beyond. pp 1279-1289. Struct. and Mat. Mech. ASME.

[10] Dvorkin, E; Cuitiño, M. y Goiag. (1990). *Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions.* Int. J. Num. Meth. Eng. Vol 30. pp 541-564.

[11] Dvorkin, E. y Assanelli, A. (1991). *2D finite elements with displacement interpolated embedded localization lines: The analysis of fracture in frictional materials.* Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 90. pp 829-844.

[12] Fish, J. y Belytschko, T. (1990). *A finite element with unidirectionally enriched strain field for localization analysis.* Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 78. pp 181-200.

[13] Hadamard, J. (1903). *Leçons sur le propagation des ondes et las equations de l'hydrodynamique, Chap. 6.* Hermann. Paris.

[14] Hillerborg, A; Modeer, M. y Petersson, P. (1976). *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements.* Cem. and Concr. Res. Vol 6. No 6. pp 773-782.

[15] Hibbit, Karlsson & Sorensen. (1989). *ABAQUS User's manual.* HKS, Inc.

[16] Hughes, T. J. R. (1980). *Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media.* Int. J. Num. Meth. Eng. Vol 15. pp 1413-1418.

[17] Leroy, Y. y Ortiz, M. (1990). *Finite element analysis of transient strain localization phenomena in frictional solids.* Int. J. for Num. and Analyt. Meth. in Geomech. vol 14. pp 93-124.

[18] Loret, B. y Prevost, J. H. (1990). *Dynamic strain localization in elasto-(visco-) plastic solids, Part I. General formulation and one-dimensional examples.* Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng. 83. pp 247-273.

[19] Mandel, J. (1966). *Conditions de stabilité et postulat de Drucker.* In *Rheology and Soil Mechanics.* Ed. by Krautchenko y P. M. Siriays. pp 58-68. Springer. New York.

[20] Martínez, F. (1993). *Análisis de fenómenos de localización de deformaciones en materiales cohesivo-friccionales.* Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid.

[21] Martínez, F. y Goicolea, J.M. (1994). *Estudio de algunos problemas básicos de localización de deformaciones mediante elementos finitos.* Revista Int. Met. Numer. Calc. Dis. Ing., Vol 10, pp 209–236.

[22] Muhlhaus, H. B. y Vardoulakis. (1987). *The thickness of shear bands in granular materials.* Geotech. 37. No 3. pp 271-283.

[23] Nacar, A; Needleman, A. y Ortiz, M. (1989). *A finite element method for analyzing localization in rate dependent solids at finite strains.* Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 73. pp 235-258.

[24] Nagtegaal, J. C; Parks, D. M. y Rice J. R. (1974). *On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range.* Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 4. pp 153-177.

[25] Needleman, A. (1988). *Material rate dependance and mesh sensivity in localization problems.* Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng. 67 pp. 69-85.

[26] Oliver, J. (1995). *Continuum Modelling of Strong Discontinuities in Solid Mechanics.* Computational Plasticity, 4th Intl. Conf., Barcelona.

[27] Ortiz, M. y Popov, E. P. (1982). *Plain concrete as a composite material.* Mech. of Mat. 1. pp 139-150.

[28] Ortiz, M. (1985). *A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete.* Mech. of Mat. 4. 67.

[29] Ortiz, M; Leroy, Y. y Needleman, A. (1987). *A finite element method for localized failure analysis.* Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. 61. pp 189-214.

[30] Ortiz, M. y Quigley IV, J.J. (1989). *Element design and adaptive meshing in strain localization problems.* Proc. 2nd Int. Cong. on Computational Plasticity. Barcelona.

[31] Ortiz, M. y Giannakopoulos, A. E. (1990). *Crack propagation in monolithic ceramics under mixed mode loading.* Int. J. of Fract. 44. pp 233-258.

[32] Ortiz, M. y Quigley IV, J.J. (1991). *Adaptive mesh refinement in strain localization problems.* Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 90. pp 781-804.

[33] Ortiz, M. (1992). *Implicit integration of Drucker-Prager model: Rate independent constitutive model and rate-dependent extension.* Private Communication.

[34] Pian, T. H. y Sumihara, K. (1984). *Rational approach for assumed stress finite elements.* Int. J. Num. Meth. Eng. Vol 20. pp 1685-1695.

[35] Pietruszczak, St. y Mroz, Z. (1981). *Finite element analysis of deformation of strain-softening materials.* Int. J. Num. Meth. Eng. Vol 17. pp 327-334.

[36] Prevost, J. H. y Loret, B. (1990). *Dynamic strain localization in elasto-(visco-) plastic solids, Part II. Plane strain examples.* Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng. 83. pp 275-294.

[37] Rice, J. R. (1977). *The localization of plastic deformation.* Theoretical and applied Mechanics. Proc. 14th Int. Congress Theoret. and Appl. Mech. W.T. Koiter ed. North Holland. Amsterdam. pp 207-220.

[38] Rots, J. G. (1992). *Removal of finite elements in smeared crack analysis.* Proc. 3rd. Int. Conf. on Comp. Plast. Barcelona.

[39] Simo, J. C. y Hughes, T. J. R. (1986). *On the variational foundations of assumed strain methods.* J. Appl. Mech. ASME. 53. pp 51-54.

[40] Simo, J. C. y Rifai, M. S. (1990). *A class of mixed assumed methods and the method of incompatible modes.* Int. J. Num. Meth. Eng. Vol 29. pp 1595-1638.

[41] Simo, J. C. y Armero, F. (1992). *Geometrically nonlinear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes.* Int. J. Num. Meth. Eng. 33, pp 1413-1449.

[42] Simo, J.C., Armero, F. y Taylor, R.L. (1993). *Improved versions of assumed strain tri-linear elements for 3D finite deformation problems.* Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 110, pp. 359-386.

[43] Simo, J.C. y Oliver, J. (1994). *A new Approach to the Analysis and Simulation of Strain-Softening in Solids.* Fracture and Damage in Quasi-Brittle Materials, ed. by Bazant et al., Prague.

[44] Simo, J.C., Oliver, J. y Armero, F. (1993). *An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids.* Computational Mechanics, 12, pp. 277-296.

[45] Steinmann, P. y Willam, K. (1991). *Performance of enhanced finite element formulations in localized failure computations.* Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 90. pp 845-867.

[46] Steinmann, P. y Willam, K. (1991). *Finite elements for capturing localized failure.* Arch. Appl. Mech. 61. pp 259-275

[47] Sture, S. y Ko, H. Y. (1978). *Strain-softening of brittle geologic materials.* Int. J. Num. and Anal. Meth. in Geomech. Vol 2. pp 237-253.

[48] Tvergaard, V; Needleman, A; y Lo, K. (1981). *Flow localization in the plane strain tensile test.* J. Mech. Phys. Solids. Vol 29. No 2. pp 115-142.

[49] Van Mier, J. G. (1984). *Strain softening of concrete under multiaxial loading conditions.* Phd Thesis. Technische Hogeschool Eindhoven.

[50] Van Mier, J. G. (1986). *Multiaxial strain softening of concrete: Part I Fracture.* Materiaux et Constructions. Vol 19. No 111.

[51] Vardoulakis, I.; Goldsheider, M. y Gudehus, G. (1978). *Formation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem.*Int. J. for Num. and Anal. Meth. in Geomech. Vol 2. pp 99-128.

[52] Vardoulakis, I. (1979). *Bifurcation analysis of the triaxial test on sand samples.* Acta Mech. 32, pp 35-39.

[53] Vardoulakis, I y Aifantis, E. C. (1989).*Gradient dependent dilatancy and its implications in shear banding and liquefaction.* Ing.-Archiv. 59. pp 197-208.

[54] Vermeer, P. A. y Borst, R. (1984). *Non-associated plasticity for soils, concrete and rocks.* Heron. Vol 29. No 3. Delft.

[55] Vonk, R. A. *A micromechanical investigation of softening of concrete loaded in compression.* Heron. Vol 38. No 3. 1993.

[56] Washizu, K. (1968). *Variational Methods in Elasticity and Plasticity.* Pergamon Press. Oxford.

[57] Wawersik, W. R. y Brace, W. F. (1971). *Post failure behavior of a granite and a diabase.* Rock Mech. 3. pp 61.

[58] Wilson, E. L; Taylor, R. L; Doherty, W. P. y Ghaboussi, J. (1973). *Incompatible displacement models.* Num. and Comp. Meth. in Struct. Mech. (eds. S. T. Fenves et al). pp 43-57. Academic Press.

[59] Zener, C. y Holloman, J. H. (1944). *Effect of strain rate upon plastic flow of steel.* J. Appl. Phys. Vol 15. pp 22-32.