ANÁLISIS DE LA CONTRIBUCION DE LOS MODOS INCOMPATIBLES EN PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN

Felipe Gabaldón, José María Goicolea y Francisco Martínez

E.T.S. Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Madrid,
Ciudad Universitaria, 28040 Madrid
e-mail: gabaldon@dumbo.caminos.upm.es
www: http://filemon.caminos.upm.es

Resumen

En este artículo se analiza la contribución energética que tienen los modos incompatibles de los elementos formulados con deformaciones supuestas, en la captura de bandas de localización de deformaciones. Mediante un programa de matemática simbólica se determina la relación entre la orientación de las bandas y las propiedades elastoplásticas de un material J2, para un estado tensional del corte puro. A continuación se evalúan de manera exacta, para un elemento, los autovalores y autovectores de la matriz de rigidez tangente para varias orientaciones de la banda. Se analiza la energía interna de campos de desplazamientos coincidentes con dichos autovectores, haciendo énfasis en la contribución de los modos incompatibles, y finalmente se aplican los resultados obtenidos a un problema de localización resuelto mediante elementos finitos.

1 ELEMENTOS CON DEFORMACIONES SUPUESTAS

Preámbulo .- Recientemente, Simó y colaboradores ([7], [8]) han propuesto la formulación de elementos con deformaciones supuestas mejoradas ("Enhanced Assumed Strain") que enmarca de forma natural el planteamiento de modos incompatibles de Wilson y Taylor dentro del principio variacional de Hu-Washizu. Una ventaja clave es su incorporación natural a problemas distintos de la elasticidad lineal como la plasticidad, en donde la resolución iterativa del problema no lineal está gobernada por incrementos de desplazamientos y por tanto de deformaciones.

Los elementos con deformaciones supuestas poseen además un gran potencial para representar la localización de deformaciones, como ha sido comprobado en [9], [10], obteniendo resultados comparables a elementos específicamente desarrollados para localización.

Formulación .- El planteamiento de la formulación mixta se basa en el funcional de Hu-Washizu, admitiendo que existe para cada punto $\boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathsf{R}^3$ una función $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ que define la densidad de energía interna por unidad de volumen, dependiente del tensor de deformaciones lineal $\boldsymbol{\varepsilon}$. Las incógnitas del problema corresponden al campo de desplazamientos $\boldsymbol{u}$, al campo de deformaciones infinitesimales $\boldsymbol{\varepsilon}$ y al campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ en Ω.

La idea clave es una reparametrización del campo de deformaciones de la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \boldsymbol{u} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}; \qquad \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s(\delta \boldsymbol{u}) + \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}. \tag{1}$$

Donde $\nabla^s \boldsymbol{u}$ (parte simétrica del gradiente de desplazamientos) es la componente *"compatible"* del campo de deformaciones, y $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ es la componente *"mejorada"* (incompatible) del mismo. Esta denominación responde a que, aunque para la solución exacta el campo $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ sea nulo, para la solución aproximada en una malla discreta, este campo permite mejorar dicha aproximación. No es preciso imponer ningún requerimiento de continuidad a priori al campo $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ entre los distintos elementos.

La aproximación se realiza mediante las funciones de forma $\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})$, referidas a coordenadas isoparamétricas $\boldsymbol{\xi}$:

$$\boldsymbol{u}_e^h = \mathbf{N}_e(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{d}_e, \qquad \nabla^s \boldsymbol{u}_e^h = \mathbf{B}_e(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{d}_e, \tag{2}$$

donde $\mathbf{d}_e$ son los desplazamientos nodales y $\mathbf{B}_e(\boldsymbol{\xi}) = \nabla^s \mathbf{N}_e(\boldsymbol{\xi})$ es el operador de interpolación de deformaciones del elemento.

Para $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ se emplea una aproximación similar a la definida para el campo de deformaciones compatible. Sea $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^h(\boldsymbol{\xi}) \in \tilde{\mathcal{E}}^h \subset \tilde{\mathcal{E}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^h(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{G}_e(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\alpha}_e, \tag{3}$$

donde $\mathbf{G}_e(\boldsymbol{\xi})$ es el operador de interpolación de deformaciones "mejoradas" del elemento, y $\boldsymbol{\alpha}_e$ son grados de libertad internos del elemento que definen este campo.

Sustituyendo las aproximaciones (2), (3) en las ecuaciones variacionales y operando en la manera estándar resultan las ecuaciones algebraicas:

$$\left.\begin{aligned} \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{nel}[\mathbf{f}_e^{int}(\mathbf{d}_e, \boldsymbol{\alpha}_e) - \mathbf{f}_e^{ext}] = \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}_e = \mathbf{0}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

donde $\mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{nel}$ es el operador de ensamblaje de elementos de la malla, y

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e^{ext} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_e} \rho_0 \mathbf{N}_e^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{b}\, dV + \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{N}_e^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{t}\, dS, \\ \mathbf{f}_e^{int}(\mathbf{d}_e, \boldsymbol{\alpha}_e) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^{\mathrm{T}} \cdot \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W(\mathbf{B}_e \cdot \mathbf{d}_e + \mathbf{G}_e \cdot \boldsymbol{\alpha}_e)\, dV, \\ \mathbf{h}_e(\mathbf{d}_e, \boldsymbol{\alpha}_e) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_e} \mathbf{G}_e^{\mathrm{T}} \cdot \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W(\mathbf{B}_e \cdot \mathbf{d}_e + \mathbf{G}_e \cdot \boldsymbol{\alpha}_e)\, dV. \end{aligned}$$

Las ecuaciones (4) constituyen en general un sistema no lineal en función de las incógnitas $(\mathbf{d}_e,\, \boldsymbol{\alpha}_e)$, cuya resolución se puede efectuar mediante un procedimiento iterativo tipo Newton.

Las condiciones de convergencia y estabilidad del método se estudian en [7]

2 CONTRIBUCIÓN ENERGÉTICA DE LOS MODOS MEJORADOS EN PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN

Criterio de localización .- Para establecer bajo qué condiciones se produce una superficie S de discontinuidad de deformaciones, con normal $\boldsymbol{n}$ en cada punto, admitiremos las hipótesis correspondientes a las denominadas discontinuidades "débiles" (es decir, en deformaciones):

- El campo de velocidades, $\dot{\boldsymbol{u}}$, permanece continuo, incluso una vez iniciada la localización de deformaciones.
- Se admite que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^s \dot{\boldsymbol{u}}$ sea discontinuo a través de la superficie de localización.
- Al inicio de la localización, el material se encuentra en la misma rama de carga a ambos lados de la discontinuidad.

Se denomina *tensor acústico* del material a $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n}) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{n}$, dependiendo de los módulos tangentes $\boldsymbol{C}$ del material en cada punto, y de la orientación $\boldsymbol{n}$. La ecuación de localización es:

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}. \tag{5}$$

siendo $\boldsymbol{g}$ el vector de polarización. Para que esta ecuación homogénea tenga solución distinta de la trivial, el tensor acústico debe ser singular:

$$\det[\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n})] = 0. \tag{6}$$

El autovector asociado al autovalor nulo de $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n})$ será la dirección de polarización, $\boldsymbol{g}$. Se observa pues que el criterio matemático que establece la localización de deformaciones se sustenta en las características constitutivas del comportamiento del material. La singularidad del tensor acústico implica una pérdida del carácter elíptico de las ecuaciones de equilibrio del sólido.

En el caso de un material con plasticidad de Von Mises y endurecimiento isotrópico H, la expresión analítica de las componentes tensor acústico para un estado tensional de corte puro en deformación plana es:

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\left(1+\cos^2\theta\left(\frac{1}{1-2\nu}+\frac{E}{E+2H(1+\nu)}\right)\right)\\
Q_{12} &= \frac{1}{2}\frac{E(\nu(E-H)-(E+H))}{(1+\nu)(2\nu-1)(E+2H+2H\nu)}\\
Q_{21} &= Q_{12}\\
Q_{22} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\left(1+\operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{1}{1-2\nu}+\frac{E}{E+2H(1+\nu)}\right)\right)
\end{aligned}$$

siendo θ el ángulo que forma el vector $\boldsymbol{n}$ con la dirección 1 del elemento, es decir $\boldsymbol{n} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Imponiendo la condición (6) se obtiene la relación entre el módulo de endurecimiento isotrópico y el ángulo de la normal a la banda de localización:

$$H = -\frac{E\cos^2(2\theta)}{4(1-\nu^2)} \tag{7}$$

Esta relación se representa en la figura 1.

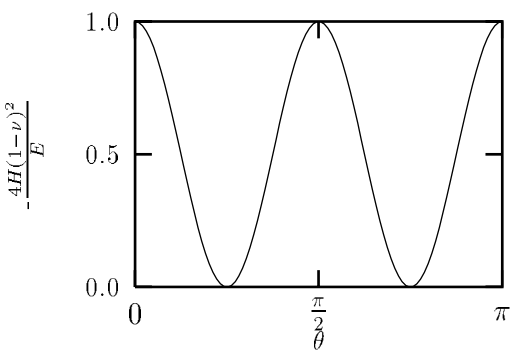

Figura 1: Relación entre el módulo de endurecimiento y la dirección de la banda de localización

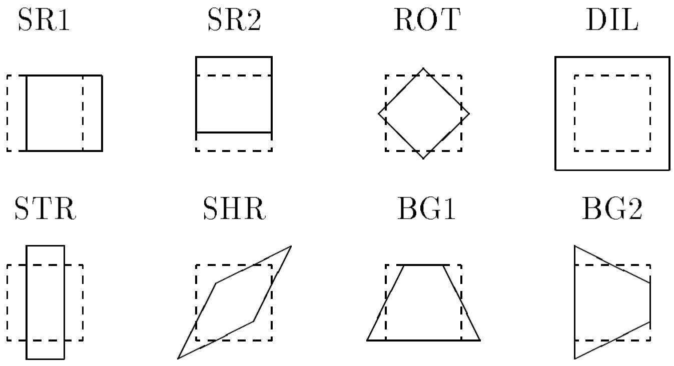

Figura 2: *Modos de deformación.*

Análisis espectral de la matriz de rigidez tangente .- A partir de la expresión analítica [6] del módulo elastoplástico tangente:

$$C_{ijkl} = C^e_{ijkl} - \frac{1}{\mu + H}\frac{\mu^2 s_{ij} s_{kl}}{J_2}$$

se ha evaluado de manera exacta la matriz de rigidez tangente de un elemento mediante el programa de matemática simbólica MAPLE V.3 [4, 5].

A continuación se obtienen los autovectores y autovalores de manera exacta con el programa MAPLE, para diversos valores del ángulo que forman el vector normal a la banda $\boldsymbol{n}$ y el vector de polarización $\boldsymbol{g}$, con elementos de cuatro nodos cuadrados biunitarios

Se han considerado dos estados de corte puro rotados 45°, definidos respectivamente por los tensores de tensiones:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Steinmmann y Willam [9, 10] han realizado análisis espectrales de este tipo con el fin de evaluar las prestaciones de varios elementos para capturar bandas de localización.

Como propiedades del material se han adoptado $E = 1.0$, $\nu = 0.3$ y el valor del endurecimiento calculado para anular el tensor acústico. Los resultados obtenidos son los mismos para los elementos Q1/E4, Q1/E5 y Q1/E7 [1, 7] dado que la geometría de los mismos es la de un paralelogramo. Los modos de deformación de la matriz de rigidez se muestran en la figura 2 resultando independientes del módulo de endurecimiento.

Los autovalores obtenidos para cada modo de deformación y cada configuración se recogen en la tabla (1). Asimismo se incluyen en dicha tabla los autovalores de los elementos isoparamétricos de cuatro nodos con formulación en desplazamientos.

Como conclusiones importantes de estos resultados son de destacar:

1. Unicamente se obtienen autovalores nulos para modos distintos de los de sólido rígido (SR1, SR2, ROT) en el caso en que $H = 0$ y para el tensor de

$H = -E/4(1-\nu^2) \qquad \theta = 0° \qquad (\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{g}}) = 0°$

MODO	SR1	SR2	ROT	DIL	STR	SHR	BG1	BG2
λ_1	0	0	0	25/13	−25/13	10/13	$-\infty$	$-\infty$
λ_2	0	0	0	25/13	0	10/13	50/273	50/273
$\lambda_1(u)$	0	0	0	25/13	−25/13	10/13	5/39	5/39
$\lambda_2(u)$	0	0	0	25/13	0	10/13	35/78	35/78

$H = -3E/16(1-\nu^2) \qquad \theta = 15° \qquad (\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{g}}) = 63.67°$

MODO	SR1	SR2	ROT	DIL	STR	SHR	BG1	BG2
λ_1	0	0	0	25/13	−150/169	10/13	−100/91	−100/91
λ_2	0	0	0	25/13	−50/299	10/13	50/273	50/273
$\lambda_1(u)$	0	0	0	25/13	−150/169	10/13	305/1014	305/1014
$\lambda_2(u)$	0	0	0	25/13	−50/299	10/13	755/1794	755/1794

$H = -E/16(1-\nu^2) \qquad \theta = 30° \qquad (\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{g}}) = 80.64°$

MODO	SR1	SR2	ROT	DIL	STR	SHR	BG1	BG2
λ_1	0	0	0	25/13	−50/299	10/13	−100/819	−100/819
λ_2	0	0	0	25/13	−150/169	10/13	50/273	50/273
$\lambda_1(u)$	0	0	0	25/13	−50/299	10/13	755/1794	755/1794
$\lambda_2(u)$	0	0	0	25/13	−150/169	10/13	305/1014	305/1014

$H = 0 \qquad \theta = 45° \qquad (\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{g}}) = 90°$

MODO	SR1	SR2	ROT	DIL	STR	SHR	BG1	BG2
λ_1	0	0	0	25/13	0	10/13	0	0
λ_2	0	0	0	25/13	−25/13	10/13	50/273	50/273
$\lambda_1(u)$	0	0	0	25/13	0	10/13	35/78	35/78
$\lambda_2(u)$	0	0	0	25/13	−25/13	10/13	5/39	5/39

Tabla 1: *Autovalores de la matriz de rigidez tangente elastoplástica, para diversos valores del reblandecimiento H ligado en cada caso a una orientación de la banda de localización. λ_1 y λ_2 corresponden a la formulación con deformaciones supuestas para los estados tensionales 1 y 2; $\lambda_1(u)$ y $\lambda_2(u)$ corresponden a la formulación en desplazamientos. Resultados exactos obtenidos con el programa MAPLE*

tensiones $\boldsymbol{\sigma}_1$. Si se acepta el criterio expuesto en [10], llegaríamos a la conclusión de que los elementos con deformaciones supuestas únicamente capturan la orientación de las bandas de localización para este valor del endurecimiento, con un ángulo $\theta = 45°$.

2. La contribución de la parte mejorada de la matriz de rigidez afecta únicamente a los modos de flexión (BG1, BG2).

3. Los únicos autovalores que dependen del endurecimiento son los correspondientes a los modos de estiramiento (STR), y de flexión (BG1, BG2). Para $\boldsymbol{\sigma}_1$ disminuyen en valor absoluto a medida que el ángulo entre la normal a la banda y el vector de polarización crece. Sin embargo, para $\boldsymbol{\sigma}_2$ los modos de flexión se excitan uniformemente con independencia de la orientación.

Análisis de la contribución energética de los modos mejorados.- El objetivo de los resultados de este análisis es identificar en problemas resueltos mediante elementos finitos con deformaciones supuestas, en que zonas de la malla y con que intensidad se excitan los campos de deformaciones mejoradas.

Partiendo de la primera ley de la termodinámica y aplicando el teorema de localización [2], se obtiene su forma local, conocida como *Ecuación Reducida de la Energía*:

$$\dot{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} + R - \mathrm{div}\boldsymbol{Q} \tag{8}$$

donde $\mathcal{E}$ es la energía interna, $\boldsymbol{v}$ es el campo de velocidades, R son las fuentes de calor por unidad de volumen y $\mathbf{Q}$ es el flujo de calor.

Haciendo ahora la hipótesis de que el problema es puramente mecánico, se pueden despreciar los efectos térmicos, y la tasa de la densidad de energía interna del sistema es:

$$\dot{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{9}$$

habiendo sustituido el gradiente de velocidades por la tasa del tensor de deformaciones.

Para obtener la norma energética de los autovectores de la matriz de rigidez tangente se han seguido los siguientes pasos:

1. Para cada autovector $\boldsymbol{d}_e$ se calculan las correspondientes deformaciones compatibles y mejoradas :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_e(\boldsymbol{u}) &= \mathbf{B}_e \boldsymbol{d}_e \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e &= \boldsymbol{G}_e \mathbf{H}_e^{-1} \boldsymbol{d}_e \end{aligned}$$

2. Se calcula la energía interna total y la energía interna asociada al campo de deformaciones compatibles del elemento:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varepsilon}_e\| &= \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\varepsilon}_e(\boldsymbol{u}) + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e)^{\mathrm{T}} \mathbf{C}^{\mathrm{e}} (\boldsymbol{\varepsilon}_e(\boldsymbol{u}) + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e)\, d\Omega \\ \|\boldsymbol{\varepsilon}_e(\boldsymbol{u})\| &= \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}_e(\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \mathbf{C}^{\mathrm{e}} \boldsymbol{\varepsilon}_e(\boldsymbol{u})\, d\Omega \end{aligned}$$

   siendo $\mathbf{C}^{\mathrm{e}}$ la matriz constitutiva elástica.

3. Se obtiene la contribución a la energía interna del campo mejorado de deformaciones como la diferencia de los dos anteriores:

$$\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e\| = \|\boldsymbol{\varepsilon}_e\| - \|\boldsymbol{\varepsilon}_e(\boldsymbol{u})\| = \int_{\Omega_e} \left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{\mathrm{T}} \mathbf{C}^{\mathrm{e}} \boldsymbol{\varepsilon}_e(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\varepsilon}_e(\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \mathbf{C}^{\mathrm{e}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{\mathrm{T}} \mathbf{C}^{\mathrm{e}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \right) d\Omega \tag{10}$$

La figura 3 es un diagrama polar para los modos de flexión obtenidos con $\boldsymbol{\sigma}_1$. La coordenada angular representa el ángulo θ que forma la normal con el lado 1 del elemento. La coordenada radial representa las contribuciones unitarias de las deformaciones compatibles y mejoradas a la energía interna total. No se han considerado otros autovectores, por la razón antes comentada de que la unica contribución de los modos mejorados se produce en los modos de flexión. Obsérvese, que para valores de $\theta = 0°$, $\theta = 90°$, la contribución energética del campo mejorado es del 100% Esto es debido a que el término W_{enh} tiende a infinito mientras que W_{comp} tiene un valor acotado.

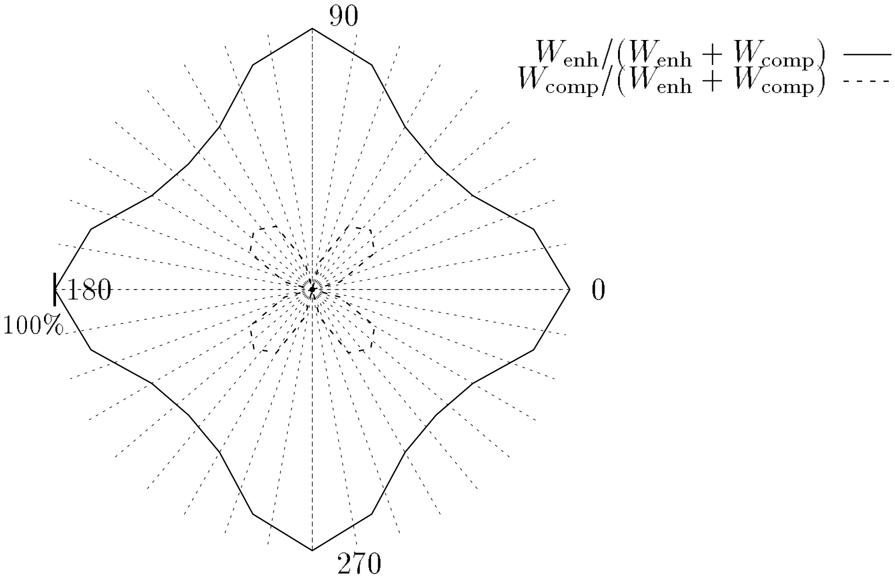

Figura 3: *Contribución energética unitaria de los campos de deformaciones compatible y mejorado*

EJEMPLO DE APLICACION

Se considera el problema de formación de una banda de cortante originado por una distribución periódica de inhomogeneidades. Para representar la falta de homogeneidad, se eliminan dos elementos de la diagonal de acuerdo con la figura 4. Las características mecánicas del material son: $E = 2\,10^{11}$, $\nu = 0.3$, $\sigma_{\rm Y} = 2\,10^{9}$, $H = 0$. El análisis se realiza con movimientos impuestos en la dirección de la diagonal. Para estudiar la contribución energética de los modos de mejorados de deformación en cada elemento, esta se evalúa con:

$$\dot{W}^{e}_{\rm enh} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} d\Omega \tag{11}$$

Se ha estudiado la evolución de la contribución de los modos mejorados a la energía interna de los elementos indicados en la figura 4: el elemento 1 es el elemento situado en la esquina, el elemento 45 es el situado en la banda de localización y el elemento 44 es adyacente al 45.

Para ello, una vez realizado el análisis se han extraído las historias de desplazamientos nodales de cada elemento y se han expresado en cada instante como combinación lineal de los modos básicos obtenidos anteriormente con el análisis espectral (figura 2).

En la figura 5 se muestra la historia de la participación porcentual de los dos modos de flexión (BG1, BG2) en cada uno de los tres elementos considerados. A partir de un cierto instante se produce una banda en la cual se localizan las deformaciones, en la diagonal que une los elementos eliminados. A partir de dicho instante comienza a aumentar la participación de los modos de flexión en los elementos 44 y 45, fenómeno que se justifica en [10]. El elemento 1 prácticamente no tiene flexión.

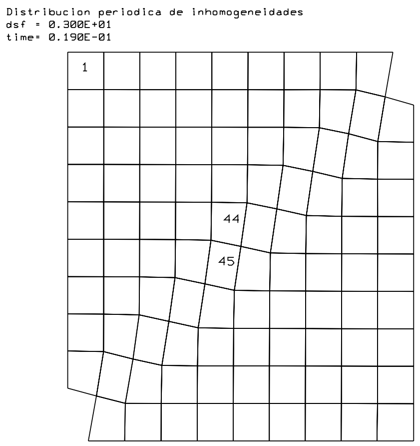

Figura 4: *Deformada de la malla y situación de los elementos considerados en el estudio (1, 44, 45).*

En el elemento 44 el movimiento de localización es predominantemente de flexión, mientras que en el elemento 45 lo es el de rotación de sólido rígido. Este hecho queda reflejado en la figura 6 en la cual se recoge la historia de la contribución energética del campo de deformaciones mejoradas. En el elemento adyacente a la banda (44) dicha contribución es mayor por serlo la participación de los modos de flexión.

Finalmente en la figura 7 se muestran los contornos de deformación plástica efectiva y de energía de los modos mejorados de deformación.

CONCLUSIONES

En este artículo se ha analizado la contribución energética que tienen los modos incompatibles de la formulación mixta descrita en [7] en problemas de localización de deformaciones. La metodología empleada se ha basado en el problema de matemática simbólica MAPLE [4, 5], para el cálculo análitico exacto de la matriz de rigidez tangente y de sus autovalores.

Del análisis espectral realizado se concluye que los modos incompatibles contribuyen unicamente a los movimientos de flexión, siendo nulos los autovalores correspondientes sólo en el caso de plasticidad perfecta. Asimismo, se ha comprobado que en elementos con forma de paralelogramo, los resultados obtenidos para los elementos Q4/E4, Q4/E5 [1, 7] son idénticos.

Posteriormente se ha evaluado la energía interna asociada a cada autovector, identificando la contribución a la misma de los modos incompatibles. Finalmente se ha resuelto por elementos finitos un ejemplo de localización, con objeto de aplicar los resultados anteriormente obtenidos.

Actualmente se está investigando la influencia de la orientación de los elementos y la sensibilidad a la distorsión de los mismos, así como la posible relación de las medidas energéticas descritas con la calidad de la solución en problemas elastoplásticos en general.

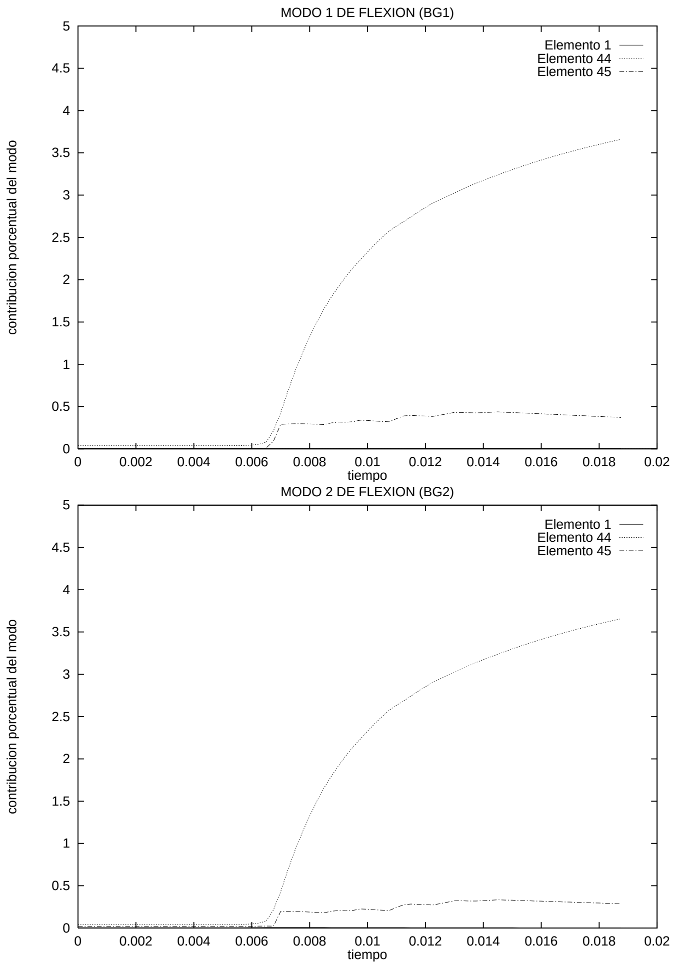

Figura 5: *Contribución porcentual de los modos de flexión*

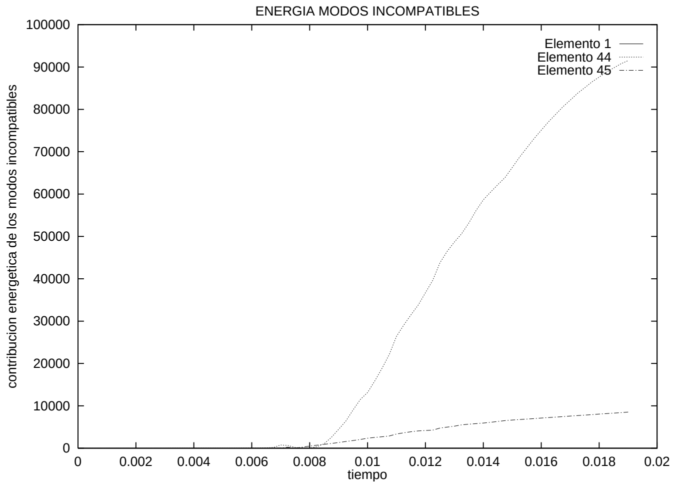

Figura 6: *Contribución energética de los modos mejorados.*

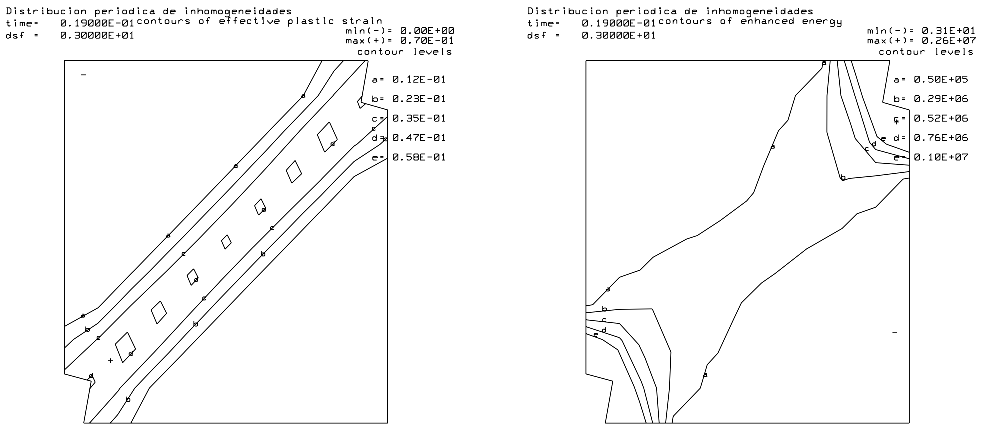

Figura 7: *Contornos de deformación plastica efectiva y de la contribución energética de los modos de deformación mejorada.*

Referencias

[1] Andelfinger, U; Ramm, E. y Roehl, D. (1992). *2D- y 3D- Enhanced assumed strain elements and their application in plasticity.* 3rd Int. Conf. on Comp. Plast. Barcelona.

[2] Gurtin M.E. An introduction to continuum mechanics. Academic Press. 1981.

[3] Hadamard, J. (1903). *Leçons sur le propagation des ondes et las equations de l'hydrodynamique, Chap. 6.* Hermann. Paris.

[4] Char B.W. et al. *Maple V Language Reference Manual.* Springer-Verlag. 1991

[5] Char B.W. et al. *Maple V Library Reference Manual.* Springer-Verlag. 1991

[6] Martínez, F. (1993). *Análisis de fenómenos de localización de deformaciones en materiales cohesivo-friccionales.* Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid.

[7] Simo, J. C. y Rifai, M. S. (1990). *A class of mixed assumed methods and the method of incompatible modes.* Int. J. Num. Meth. Eng. Vol 29. pp 1595-1638.

[8] Simo, J. C. y Armero, F. (1992). *Geometrically nonlinear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes.* Int. J. Num. Meth. Eng. 33, pp 1413-1449.

[9] Steinmann, P. y Willam, K. (1991). *Performance of enhanced finite element formulations in localized failure computations.* Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 90. pp 845-867.

[10] Steinmann, P. y Willam, K. (1991). *Finite elements for capturing localized failure.* Arch. Appl. Mech. 61. pp 259-275