Análisis de la contribución de los modos incompatibles en problemas de elastoplasticidad y localización

Felipe Gabaldón[†], Jose María Goicolea[†] y Carlos García Garino[‡]

[†]E.T.S.Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Madrid (España)
[†]Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Cuyo (Argentina)

Resumen

En este artículo se analiza la contribución que tienen los modos incompatibles de los elementos con formulación EAS [6], en problemas de elastoplasticidad y localización, con grandes deformaciones. Se describe brevemente las ideas clave de la formulación con deformaciones supuestas, el modelo constitutivo utilizado [2] basado en la descomposición multiplicativa y el criterio de localización. El primer ejemplo analizado es la extensión de un elemento en deformación plana, haciendo énfasis en la inestabilidad de estos elementos cuando se integran con una regla estándar de cuatro puntos de Gauss. A continuación se analizan las prestaciones de los elementos mejorados comparándolos con otros estándar (elemento en desplazamientos Q4 y elemento mixto Q1/P0), para capturar bandas de localización. Para ello se analiza de forma numérica el determinante del tensor acústico en una prueba con un elemento. Finalmente se analiza el comportamiento de los elementos en un ensayo de tracción de una probeta en deformación plana, en un caso en el que aparecen bandas de localización.

Elementos con deformaciones supuestas

La formulación de elementos finitos con deformaciones supuestas se basa en la solución aproximada de las ecuaciones variacionales que derivan del funcional de Hu-Washizu. En el contexto de las grandes deformaciones, las variables básicas son los campos de desplazamientos, tensiones y gradiente de deformaciones. La idea básica es la reparametrización del gradiente de deformaciones $\boldsymbol{F}$ con una descomposición aditiva de la forma:

$$\boldsymbol{F} = \underbrace{\boldsymbol{\nabla}_X \boldsymbol{\varphi}}_{\text{compatible}} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{F}}}_{\text{mejorada}} \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{\nabla}_X$ es el operador gradiente y $\boldsymbol{\varphi}$ es la función *deformación* que transforma la configuración de referencia en la configuración deformada. En este trabajo se han empleado los elementos Q1/E4, Q1/ES4 y Q1/ET4 propuestos en [6, 1].

Modelo Constitutivo

El modelo constitutivo empleado es elastoplástico, basado en la descomposición multiplicativa del gradiente de deformaciones:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^e \boldsymbol{F}^p \tag{2}$$

La implementación está basada en la actualización multiplicativa de tensor de deformaciones de Finger $\boldsymbol{b}$, según se desarrolla en [2]. Este esquema de solución de las ecuaciones de la plasticidad tiene la ventaja de ser muy sencillo de implementar y eficiente desde el punto de vista del coste computacional.

Para adecuar dicha implementación a los elementos con deformaciones supuestas, la cinemática del elemento es *Lagrangiana Total* y la integración de las ecuaciones de la plasticidad es *Lagrangiana Actualizada*.

Las ecuaciones de la plasticidad se integran con un algoritmo predictor-corrector:

- Predictor elástico: conociendo en el paso de carga t la configuración Ω_t, el tensor elástico de Finger $\boldsymbol{b}_t^{e^{-1}}$ y el gradiente de deformaciones $\boldsymbol{F}_t$; para un incremento de desplazamientos $\Delta \boldsymbol{u}$ se evalua la configuración intermedia predictora $\Omega^{\mathrm{PR}}_{t+\Delta t}$:

$$\left(\boldsymbol{F}^e_{t+\Delta t}\right)^{\mathrm{PR}} = \boldsymbol{F}_{t+\Delta t}\boldsymbol{F}_t^{p^{-1}} = \boldsymbol{f}_{\Delta t}\boldsymbol{F}^e_t \tag{3}$$

siendo $\boldsymbol{f}_{\Delta t} = \boldsymbol{F}_{t+\Delta t}\boldsymbol{F}_t^{-1}$. La configuración intermedia predictora se obtiene expresando $\boldsymbol{F}^e$ en función del tensor de Finger:

$$\left(\boldsymbol{b}^{e^{-1}}_{t+\Delta t}\right)^{\mathrm{PR}} = \boldsymbol{f}^{-\mathrm{T}}_{\Delta t}\boldsymbol{b}^{e^{-1}}_t \boldsymbol{f}^{-1}_{\Delta t} \tag{4}$$

- Corrector Plástico. La regla de flujo se define en la configuración intermedia [8]:
$$\dot{\boldsymbol{C}}^{p} = 2\dot{\gamma}\boldsymbol{N} \tag{5}$$
siendo $\boldsymbol{C}^p$ la componente plástica del tensor derecho de Cauchy y $\boldsymbol{N}$ el vector normal a la superficie de fluencia. La ecuación (5) se integra con un algoritmo de Euler hacia detrás y posteriormente se le aplica el operador Push-Forward [4], obteniendose el corrector plástico:
$$\boldsymbol{b}^{e^{-1}}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{b}^{e^{\mathrm{PR}-1}}_{t+\Delta t} + 2\gamma \boldsymbol{n}_{t+\Delta t} \tag{6}$$
donde el multiplicador plástico γ se evalúa con un algoritmo de retorno radial [9]

Este modelo se ha aplicado para el caso particular de plasticidad de Von Mises (J2).

Criterio de Localización

En este trabajo las bandas de localización de deformaciones se tratan como discontinuidades débiles: las condiciones para que se desarrolle una banda S con normal $\boldsymbol{n}$ se establecen con las siguientes hipótesis:

1. El campo de velocidades $\dot{\boldsymbol{u}}$ es suave en todo momento.
2. El tensor de deformaciones puede ser discontinuo en las caras de S
3. Cuando se produce la localización, el estado de carga del material es el mismo en ambas caras de S.

Con estas hipótesis, la ecuación de localización es:
$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{g} = 0 \tag{7}$$
siendo:

- $\boldsymbol{g}$ el vector de polarización
- $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{C}_{\mathrm{ep}} \cdot \boldsymbol{n}$ el tensor acústico
- $\boldsymbol{C}_{\mathrm{ep}}$ el tensor de módulos tangentes elastoplásticos

La solución de la ecuación (7) es distinta de la trivial si:
$$\det(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n})) = 0 \tag{8}$$

La condición de localización se ha resuelto de manera exacta con un programa de matemática simbólica [3], para el caso de tracción en deformación plana con plasticidad de Von-Mises, con endurecimiento isotrópico constante H. El tensor de tensiones imponiendo la condición de incompresibilidad del flujo plástico es:
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}Y \end{pmatrix} \tag{9}$$

y el tensor elastoplástico:
$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{ep}} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda\mu + \lambda H + \mu^2 + 2\mu H}{\mu + H} & \frac{\lambda\mu + \lambda H + \mu^2}{\mu + H} & 0 \\ \frac{\lambda\mu + \lambda H + \mu^2}{\mu + H} & \frac{\lambda\mu + \lambda H + \mu^2 + 2\mu H}{\mu + H} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{10}$$

Tomando como expresión del vector normal a la banda: $\boldsymbol{n} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, las componentes del tensor acústico son:
$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{\lambda\,\mu\cos^2\theta + \lambda\,H\cos^2\theta + \cos^2\theta\,\mu\,H + \mu^2 + \mu\,H}{\mu + H} \\ Q_{12} &= \frac{\cos\theta\sin\theta\,(\lambda\,\mu + \lambda\,H + 2\,\mu^2 + \mu\,H)}{\mu + H} \\ Q_{22} &= \frac{\lambda(\mu + H)\sin^2\theta + \mu\,H\sin^2\theta + \mu\,(\mu + H)}{\mu + H} \end{aligned}$$

Sustituyendo dichas componentes en (8) , la condición de localización resulta:
$$H = -\frac{\mu\,(2\cos^2\theta - 1)^2\,(\mu + \lambda)}{\lambda + 2\,\mu} \tag{11}$$
que relaciona el módulo de endurecimiento H con la dirección de las bandas de localización.

Ensayo de extensión de un elemento

Con este ejemplo básico se estudia la influencia del orden de la cuadratura de Gauss en la estabilidad de los elementos con deformaciones supuestas. Los elementos con formulación EAS quedan subintegrados si se integran con una regla de cuatro puntos, apareciendo modos de energía nula para valores altos de la deformación. Por esta razón es necesario emplear cuadraturas de orden superior [7]. En este artículo se analiza la evolución de la energía interna y se compara con los resultados obtenidos con elementos que reproducen la solución exacta (Q4 y Q1/P0).

Se considera un elemento cuadrado de lado 2 sometido al estiramiento que se indica en la figura 1, siendo $\lambda_2 = 3$. El material es elastoplástico de Von-Mises con endurecimiento definido por una ley de saturación. Las propiedades mecánicas adoptadas son:
$$\begin{aligned} E &= 206.9 \\ \nu &= 0.29 \\ \sigma_Y &= 0.45 + 0.26\left(1 - e^{-16.93\varepsilon_p}\right) \\ &\quad +0.13\varepsilon_p \end{aligned}$$

En la figura 2 se muestran las deformadas obtenidas con cuatro puntos de Gauss. Para un cierto valor del

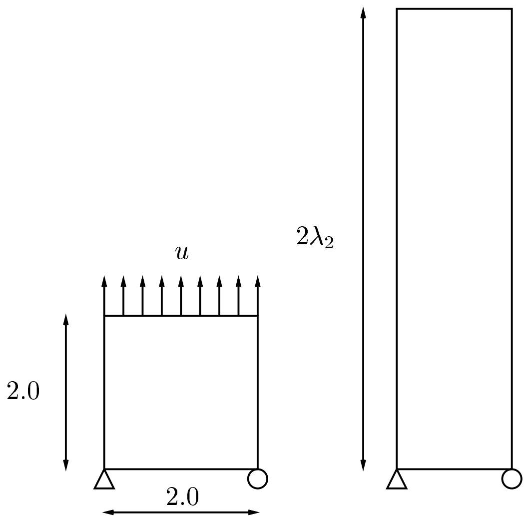

Figura 1: *Extensión simple de un elemento*

estiramiento se presenta el fenómeno de *hourglassing*, debido a que la matriz de rigidez elemental queda subintegrada. Los modos mejorados se activan de manera espurea para los elementos Q1/E4, Q1/ES4 y Q1/ET4, cuando el estiramiento λ_2 vale 1.52, 1.42 y 1.35 respectivamente. Este hecho se muestra claramente al dibujar la energía interna frente al alargamiento (figura 3). El problema de subintegración se alivia con 5 y 9 puntos, aunque tambien se presenta un ligero hourglassing.

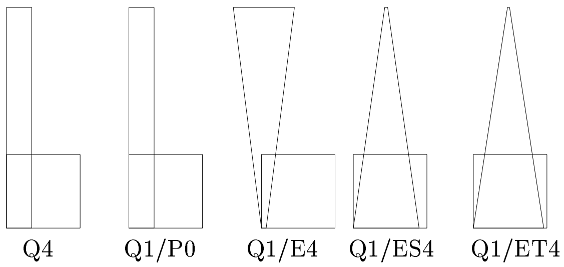

Figura 2: *Extensión simple de un elemento. Deformadas para la regla de integración de cuatro puntos de Gauss.*

Ensayo de localización de un elemento

Este ensayo, propuesto inicialmente para pequeñas deformaciones en [5] y generalizado posteriormente para grandes deformaciones en [10], evalúa las prestaciones de los elementos para capturar bandas de localización. En la figura 4 se define la geometría y condiciones de contorno impuestas. El desplazamiento aplicado al vértice superior es $u = 10$. Las características mecánicas elásticas son $E = 206.9$ y $\nu = 0.29$. La tensión de fluencia es

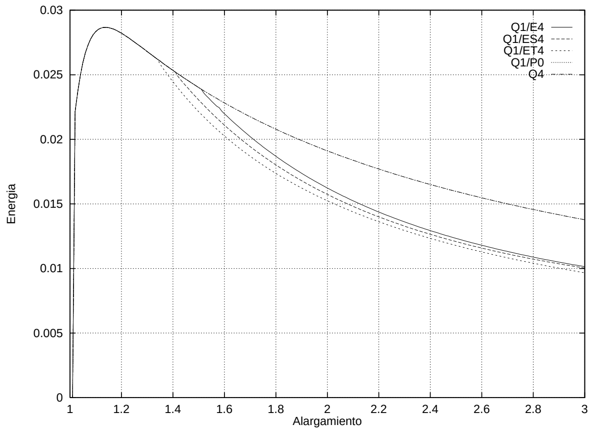

Figura 3: *Energía de deformación (incremental) para 4 puntos de Gauss*

0.45 y la ley de endurecimiento es la de saturación con ablandamiento propuesta en [6].

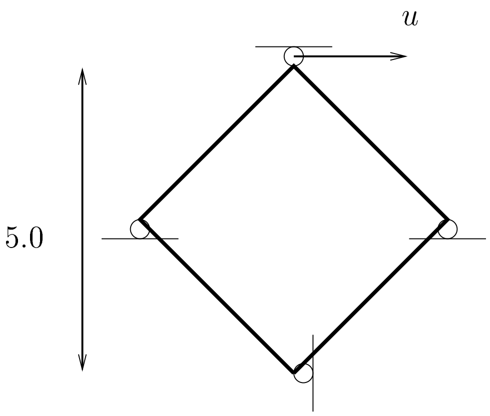

Figura 4: *Ensayo de localización de un elemento*

La figura 5 muestra las deformadas de los elementos mejorados integrados con cinco puntos, así como las obtenidas con los elementos estándar Q4 y Q1/P0.

Para investigar las prestaciones para capturar bandas de localización de estos elementos se ha analizado el valor del determinante del tensor acústico, a lo largo del proceso de carga. En una primera fase se ha comprobado que los valores mínimos de $\det(\boldsymbol{Q})$ se presentan cuando las bandas se desarrollan según las diagonales del elemento. Para estas direcciones, en la figura 5 se muestra la evolución de $\det(\boldsymbol{Q})$ frente al desplazamiento u.

De la interpretación de los resultados se concluye que cuando comienza el flujo plástico, el tensor acústico se hace decreciente para el elemento Q4, y presenta un mínimo para los demás elementos considerados. Dicho mínimo se alcanza antes para los elementos con deformaciones supuestas que para el elemento mixto Q1/P0.

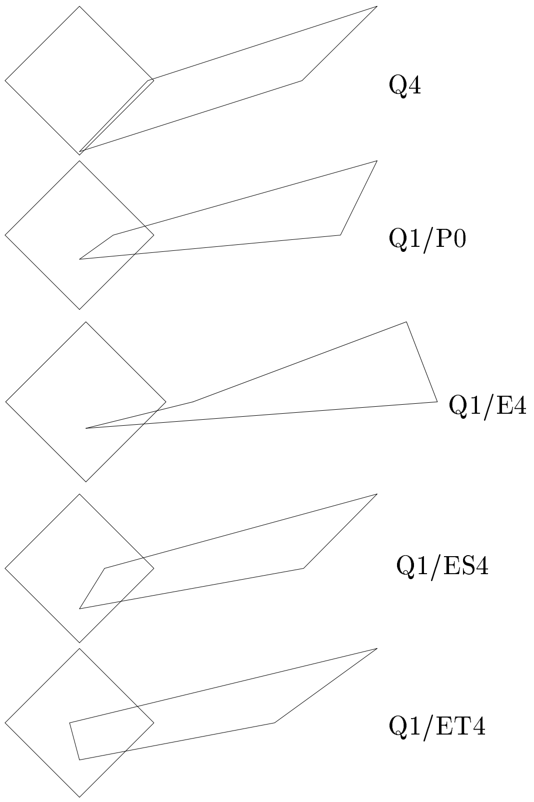

Figura 5: *Ensayo de localización de un elemento. Deformadas*

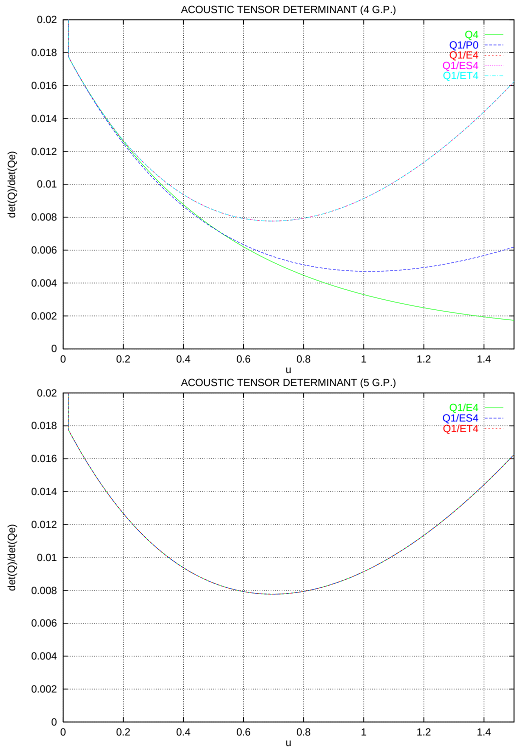

Figura 6: *Ensayo de localización de un elemento. Evolución del tensor acústico utilizando cuadraturas de 4, y 5 puntos de Gauss*

El resultado obtenido con los elementos Q1/E4, Q1/ES4 y Q1/ET4 es el mismo.

Localización en el ensayo de tracción de una probeta

Este ejemplo analiza la formación de bandas de localización en una probeta traccionada, considerando deformación plana. La definición del problema es la descrita en [6, 7]. En este caso, la ley de endurecimiento es la doble parábola propuesta en [5]. En este trabajo se comparan los resultados obtenidos con los elementos Q1/E4, Q1/ES4 y Q1/ET4 utilizando 4, 5 y 9 puntos de integración. No se consideran los elementos Q4 y Q1/P0 dado que tal como están formulados, no capturan las bandas de localización.

En la figura 7 se muestra un detalle de las bandas obtenidas con cinco puntos de Gauss para cada uno de los elementos considerados. Como puede observarse las bandas se capturan nítidamente con los elementos Q1/E4 y Q1/ES4 y están más difusas con Q1/ET4.

En la figura 8 el detalle corresponde a las bandas capturadas con el elemento Q1/E4 integrando con distintos números de puntos de Gauss. Las bandas son nítidas con los tres tipos de cuadratura, pero según se aumenta el orden de la misma dicha nitidez se va reduciendo. Esto es debido a que la rigidez de la solución aumenta con el orden de la cuadratura. La variación de la rigidez con el orden de la cuadratura, y con el tipo de elementos se puede observar en las curvas Fuerza - Desplazamiento de las figuras 9 y 10.

Conclusiones

Para estudiar la contribución de los modos mejorados de los elementos EAS, en problemas de localización y plasticidad con grandes deformaciones, la metodología empleada ha sido:

- Analizar la evolución de la energía interna en problemas en los que aparecen inestabilidades numéricas.

- Analizar el determinante del tensor acústico en problemas de localización.

De los resultados obtenidos se puede concluir:

1. La inestabilidad de los elementos Q1/E4, Q1/ES4 y Q1/ET4 es similar.

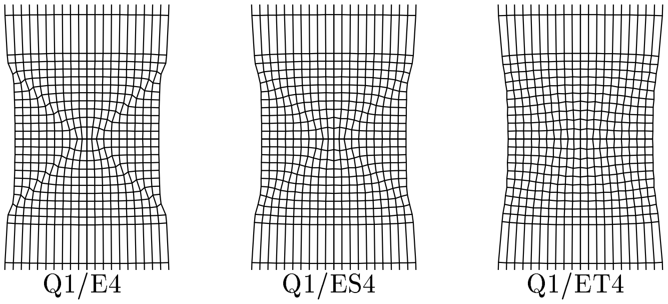

Figura 7: *Detalle de las bandas de localización capturadas con 5 puntos de Gauss*

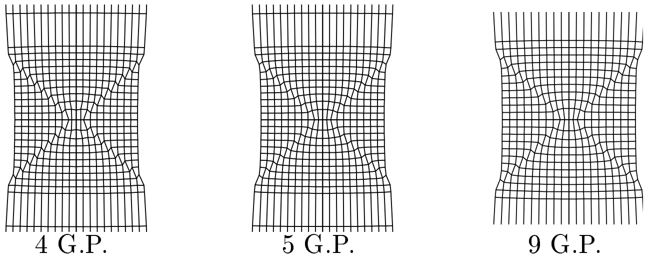

Figura 8: *Detalle de las bandas de localización capturadas con el elemento Q1/E4*

2. En problemas de localización los elementos mejorados capturan adecuadamente las bandas. En este sentido, la cinemática del elemento Q1/ET4 da lugar a que se formen bandas algo más dispersas.

3. El aumento del orden de la cuadratura de Gauss mejora la estabilidad, pero rigidiza ligeramente el comportamiento post-fallo de los elementos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por la Universidad Politécnica de Madrid, en el marco del Plan de Actividades con Latinoamérica, dentro del proyecto AL98-0440-2.15 (Investigación en el Desarrollo de Modelos de Elementos Finitos para Grandes Deformaciones y Plasticidad).

Referencias

[1] Armero F. and Glaser S. On the formulation of enhanced strain finite elements in finite deformations. Engieneering computations. Vol 14. pp 759-791. 1997.

[2] García Garino, C. Un modelo numérico para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones. Tesis Doctoral. Univ. Politécnica de Cataluña. 1993.

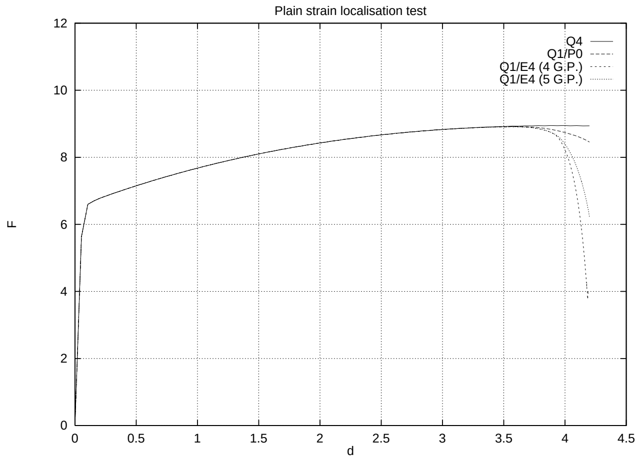

Figura 9: *Curva Fuerza-Desplazamiento para los elementos Q4, Q1/P0 y E4 (con 4 y 5 puntos de Gauss)*

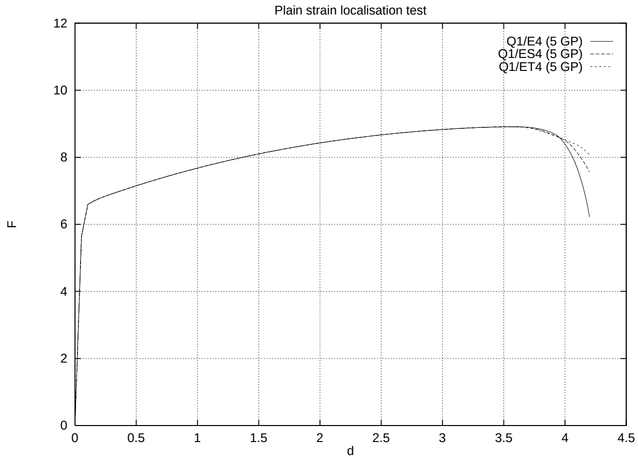

Figura 10: *Curva Fuerza-Desplazamiento para los elementos mejorados integrados con 5 puntos de Gauss*

[3] MAPLE V. Library Reference Manual. Springer Verlag. 1993

[4] Marsden, J. y Hughes T.J.R. Mathematical Foundations of Elasticity. Dover. 1996

[5] Ortiz M., Leroy I. y Needleman A. A finite element method for localized failure analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol 61, pp 189-214. 1988.

[6] Simo J.C. y Armero F. Geometrically nonlinear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 110. pp 359-386. 1993

[7] Simo J.C., Armero F. and Taylor R.L. Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear ele-

ments for 3D finite deformation problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol 110. pp 359-386. 1993.

[8] Simo J.C. A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: parts I and II. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol 66. pp 199-219 and Vol 68. pp 1-31

[9] Simo J.C. Topics on the numerical analysis ans simulation of plasticity. Handbook of numerical analysis, Vol III. Ed. by P.G. Ciarlet and J.L. Lions. North Holland.

[10] Steinmann P. y Willam K. Finite elements for capturing localized failure. Arch. Appl. Mech. Vol 61, pp 259-275. 1990.