ENUNCIADO EJEMPLO 8

Se considera un sistema compuesto por una mesa y un disco que se apoya sobre ella. Además, existe un árbol vertical que gira con velocidad w . El disco, de masa m y radio R, está ligado al árbol por un eje de longitud l y masa despreciable de tal manera que pivota sin rozamiento en el punto O y puede deslizarse libremente por el eje vertical del árbol. El disco rueda y desliza sobre la mesa, se admite que no llega a levantarse sobre ella.

Paso 0. Reiniciación de las variables del sistema y llamada a los paquetes linalg, plots y plottools.

```
> restart:
```

```
> with(linalg):with(plots):with(plottools):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined
```

```
> libname:="C:/",libname:
```

```
> with(mecapac3d):
```

Paso 1. Definimos las coordenadas generalizadas del sistema en una lista que se denominará cg.

```
> cg:=[omega,alpha,phi];
```

$$cg := [\omega, \alpha, \phi]$$

Paso 2. Definición mediante variables de los elementos que forman el sistema mecánico.

```
> xg:=[l*sin(alpha)*cos(omega),l*sin(alpha)*sin(omega),R*sin(alpha)];
```

$$xg := [l \sin(\alpha) \cos(\omega), l \sin(\alpha) \sin(\omega), R \sin(\alpha)]$$

```
> rot1:=rota(phi,3):
```

```
> rot2:=rota(-alpha,2):
```

```
> rot3:=rota(omega,3):
```

```
> rot:=evalm((rot3&*rot2)&*rot1):
```

```
> d1:=[disco,xg,rot,m,R];
>
```

$$d1 := [disco, [l \sin(\alpha) \cos(\omega), l \sin(\alpha) \sin(\omega), R \sin(\alpha)], rot, m, R]$$

```
> H:=l*cos(alpha)+R*sin(alpha):
```

```
> s1:=[segmento,[0,0,H],[0,0,H+2],red];
```

$$s1 := [segmento, [0, 0, l \cos(\alpha) + R \sin(\alpha)], [0, 0, l \cos(\alpha) + R \sin(\alpha) + 2], red]$$

```
> s2:=[segmento,[0,0,H],xg,black];
```

$$s2 := [segmento, [0, 0, l \cos(\alpha) + R \sin(\alpha)], [l \sin(\alpha) \cos(\omega), l \sin(\alpha) \sin(\omega), R \sin(\alpha)], black]$$

```
> d2:=[disco,[0,0,0],rota(0,1),m,3*R]:
```

Paso 3. Definición de los elementos gráficos que definiran nuestro sistema de ejes.

```
> ejeX:=[vector,[0,0,0],[14,0,0],red]:
> ejeY:=[vector,[0,0,0],[0,14,0],green]:
> ejeZ:=[vector,[0,0,0],[0,0,12],blue]:
> TO := [texto,[0,0,-1],"O"]:
> TX := [texto,[        14,0,1],"Y"]:
> TY := [texto,[0,14,1],"Y"]:
> TZ := [texto,[0,0,13],"Z"]:
```

Paso 4. Definición de la variable sistema que agrupa en una lista todos los elementos anteriores

```
> sistema:=[d1,d2,s1,s2,ejeX,ejeY,ejeZ,TO,TX,TY,TZ]:
```

Paso 5. Obtención de la energía cinética del sistema mediante fT asignándola a la variable T.

```
> T:=fT(sistema);
```

$$T := \frac{1}{2} m \left((l \cos(\alpha)\, \alpha 1 \cos(\omega) - l \sin(\alpha) \sin(\omega)\, \omega 1)^2 + (l \cos(\alpha)\, \alpha 1 \sin(\omega) + l \sin(\alpha) \cos(\omega)\, \omega 1)^2 + R^2 \cos(\alpha)^2\, \alpha 1^2 \right) + \frac{1}{8} (-\sin(\phi)\, \alpha 1 + \sin(\alpha)\, \omega 1 \cos(\phi))^2 m R^2 + \frac{1}{8} (-\sin(\alpha)\, \omega 1 \sin(\phi) - \alpha 1 \cos(\phi))^2 m R^2 + \frac{1}{4} (\phi 1 + \cos(\alpha)\, \omega 1)^2 m R^2$$

Paso 6. Obtención de la energía potencial del sistema mediante fV asignándola a la variable V.

```
> V:=fV(sistema);
```

$$V := m\, g\, R \sin(\alpha)$$

Paso 7. Obtención de la lagrangiana como diferencia de energías entre la energía cinética y la potencial.

```
> L:=T-V;
```

$$L := \frac{1}{2} m \left((l \cos(\alpha)\, \alpha 1 \cos(\omega) - l \sin(\alpha) \sin(\omega)\, \omega 1)^2 + (l \cos(\alpha)\, \alpha 1 \sin(\omega) + l \sin(\alpha) \cos(\omega)\, \omega 1)^2 + R^2 \cos(\alpha)^2\, \alpha 1^2 \right) + \frac{1}{8} (-\sin(\phi)\, \alpha 1 + \sin(\alpha)\, \omega 1 \cos(\phi))^2 m R^2 + \frac{1}{8} (-\sin(\alpha)\, \omega 1 \sin(\phi) - \alpha 1 \cos(\phi))^2 m R^2 + \frac{1}{4} (\phi 1 + \cos(\alpha)\, \omega 1)^2 m R^2 - m\, g\, R \sin(\alpha)$$

Paso 8. Obtención de las ecuaciones de lagrange para las dos coordenadas generalizadas mediante el operador Ec_lag

```
> ecua:=map(ec_lag(),cg):
```

Paso 9. Asignación de valores numéricos a los parámetros que queden sun asignar para poder proceder a la integración numérica.

```
> R:=3; l:=4; m:=1; g:=9.8;
```

$$R := 3$$

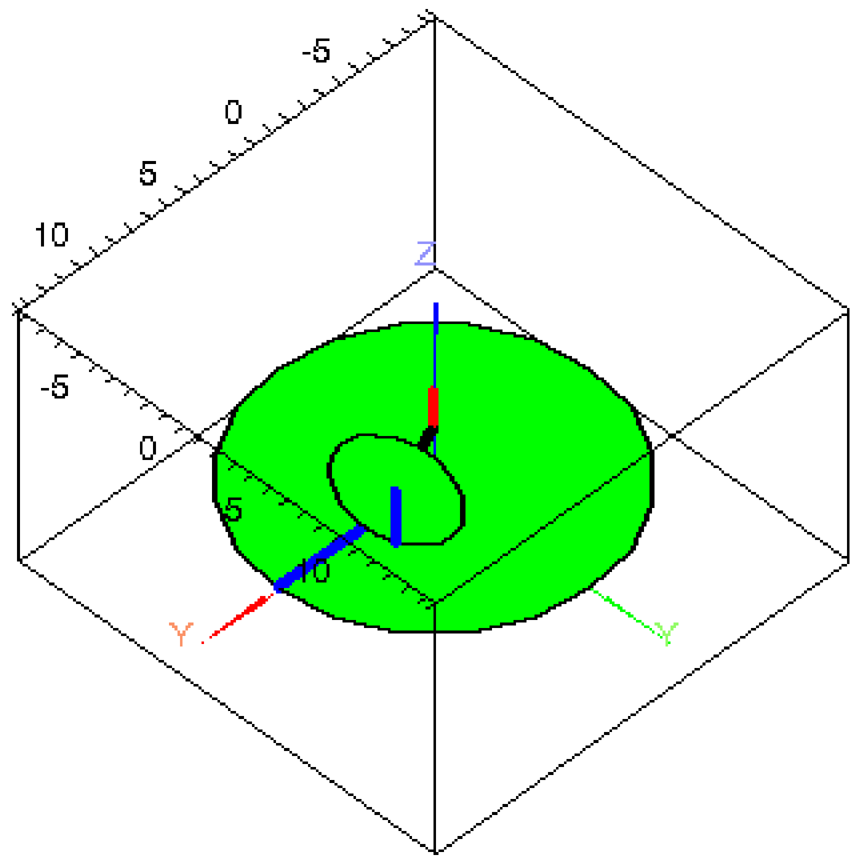
$$l := 4$$

$$m := 1$$

$$g := 9.8$$

Paso 10. Visualizamos las condiciones iniciales del problema.

```
> fG([evalf(Pi/8),Pi/2,evalf(Pi)]);
```



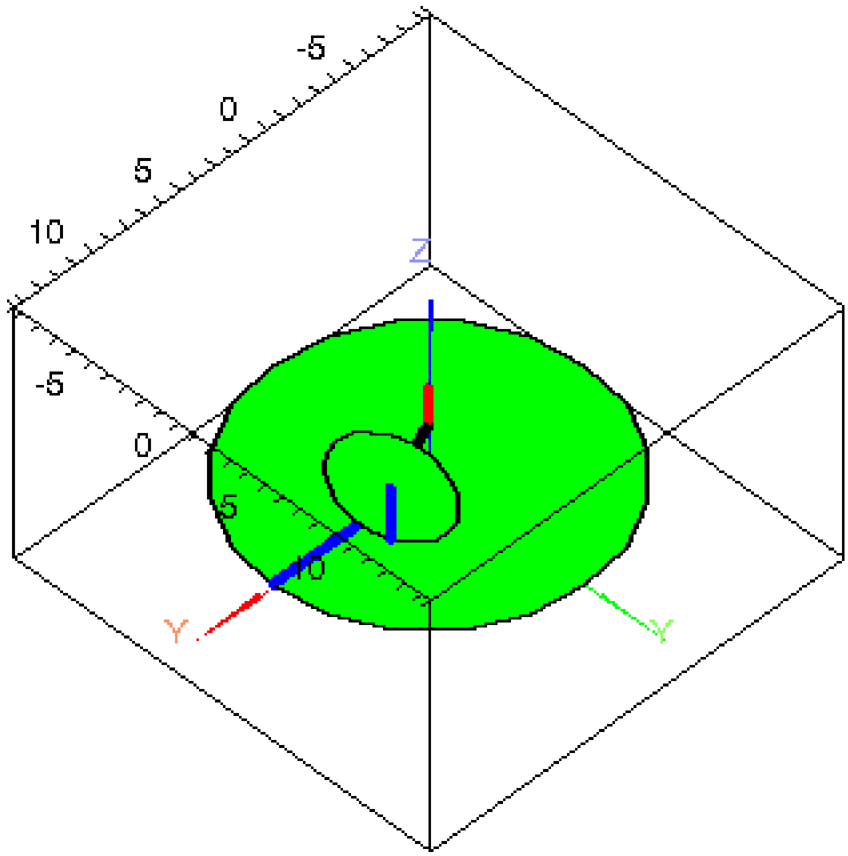
Paso 11. Integración numérica del problema mediante la función fint asignando el resultado a la variable res.

```
> res:=fint([Pi/8,1,Pi/2,1,Pi,1]);
```

$res :=$ **proc**(x_rkf45) ... **end proc**

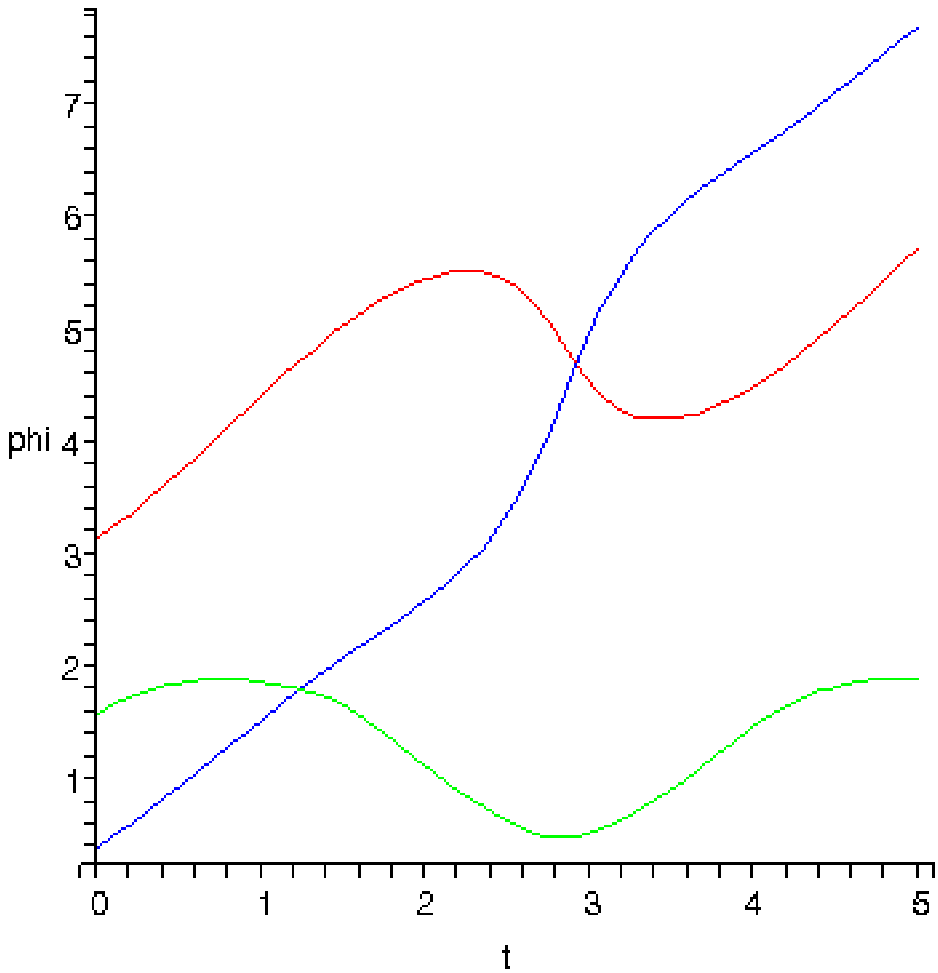
Paso 12. Procedemos a realizar una animación del movimiento del conjunto por medio de la función dibu3.

```
> dibu3(1,40);
```



Paso 13. Representación gráfica de las evoluciones temporales de la evolución temporal de phi, omega y alpha mediante odeplot.

```
> p1:=odeplot(res,[t,phi(t)],0..5,color=red):
> p2:=odeplot(res,[t,omega(t)],0..5,color=blue):
> p3:=odeplot(res,[t,alpha(t)],0..5,color=green):
> display({p1,p2,p3});
```


phi
1
2
3
4
5
6
7
0
1
2
3
4
5
t

>