ENUNCIADO DEL EJEMPLO 4

Un pendulo formado por una masa puntual de valor m y un segmento de masa despreciable se encuentra ligado a un punto del perimetro de un disco homogeneo de masa m2 y radio R. Dicho disco se haya ensartado en un eje vertical en su punto central. Los unicos movimientos permitidos para el disco son la rotacion a traves de su eje y una translacion vertical.

El disco posee una velocidad de rotacion constante y se encuentra unido con el origen de coordenadas por medio de un resorte lineal.

Paso 0. Reiniciación de las variables del sistema y llamada a los paquetes linalg, plots y plottools.

```
> restart:
```

```
> with(linalg):with(plots):with(plottools):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined
```

```
> libname:="C:/",libname;
```

$$libname := \text{"C:/", "C:\textbackslash Archivos de programa\textbackslash Maple 9/lib"}$$

```
> with(mecapac3d):
```

Paso 1. Definimos las coordenadas generalizadas del sistema en una lista que se denominará cg.

```
> cg:=[theta,phi,z];
```

$$cg := [\theta, \phi, z]$$

Paso 2. Definición mediante variables de los elementos que forman el sistema mecánico.

```
> m1:=[punto,(R+l*sin(theta))*cos(phi),(R+l*sin(theta))*sin(phi),-(z+l*cos
(theta)),m];
```

$$m1 := [punto, (R + l\sin(\theta))\cos(\phi), (R + l\sin(\theta))\sin(\phi), -z - l\cos(\theta), m]$$

```
> d1:=[disco,[0,0,-z],rota(phi,3),m2,R];
```

$$d1 := \left[disco, [0, 0, -z], \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, m2, R\right]$$

```
> l1:=[segmento,[R*cos(phi),R*sin(phi),-z],[(R+l*sin(theta))*cos(phi),(R+l
*sin(theta))*sin(phi),-(z+l*cos(theta))],red];
```

$$l1 := [segmento, [R\cos(\phi), R\sin(\phi), -z], [(R + l\sin(\theta))\cos(\phi), (R + l\sin(\theta))\sin(\phi), -z - l\cos(\theta)], red]$$

```
> muelle1:=[muelle,[0,0,0],[0,0,-z],k,l0];
```

$$muelle1 := [muelle, [0, 0, 0], [0, 0, -z], k, l0]$$

Paso 3. Definición de los elementos gráficos que definiran nuestro sistema de ejes.

```
> ejex:=[vector,[0,0,0],[10,0,0],red]:
> ejey:=[vector,[0,0,0],[0,10,0],green]:
> ejez:=[vector,[0,0,0],[0,0,10],blue]:
> TO := [texto,[0,0,-1],"O"]:
> TX := [texto,[10,0,1],"X"]:
> TY := [texto,[0,10,1],"Y"]:
> TZ := [texto,[0,0,10],"Z"]:
```

Paso 4. Definición de la variable sistema que agrupa en una lista todos los elementos anteriores.

```
> sistema:=[m1,d1,l1,muelle1,ejex,ejey,ejez,TO,TX,TY,TZ]:
```

Paso 5. Obtención de la energía cinética del sistema mediante fT asignándola a la variable T.

```
> V:=fV(sistema);
```

$$V := m\,g\,(-z - l\cos(\theta)) - m2\,g\,z + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{z^2} - l0\right)^2$$

Paso 6. Obtención de la energía potencial del sistema mediante fV asignándola a la variable V.

```
> T:=fT(sistema);
```

$$T := \frac{1}{2}m\,((l\cos(\theta)\,\theta 1\cos(\phi) - (R + l\sin(\theta))\sin(\phi)\,\phi 1)^2 + (l\cos(\theta)\,\theta 1\sin(\phi) + (R + l\sin(\theta))\cos(\phi)\,\phi 1)^2 + (-z1 + l\sin(\theta)\,\theta 1)^2) + \frac{1}{2}m2\,z1^2 + \frac{1}{4}\phi 1^2\,m2\,R^2$$

Paso 7. Obtención de la lagrangiana como diferencia de energías entre la energía cinética y la potencial.

```
> L:=simplify(T-V);
```

$$L := m\,\phi 1^2\,R\,l\sin(\theta) + m2\,g\,z - \frac{1}{2}k\,z^2 + \frac{1}{2}m\,\phi 1^2\,R^2 - \frac{1}{2}m\,\phi 1^2\,l^2\cos(\theta)^2 + \frac{1}{2}m\,l^2\,\theta 1^2 + \frac{1}{2}m\,\phi 1^2\,l^2 + m\,g\,l\cos(\theta) + \frac{1}{2}m\,z1^2 - \frac{1}{2}k\,l0^2 + \frac{1}{2}m2\,z1^2 - m\,z1\,l\sin(\theta)\,\theta 1 + \frac{1}{4}\phi 1^2\,m2\,R^2 + k\,\mathrm{csgn}(z)\,z\,l0 + m\,g\,z$$

Paso 8. Obtención de las ecuaciones de lagrange para las dos coordenadas generalizadas mediante el operador Ec_lag

```
> ecua:=map(simplify,ec_lag());
```

$$ecua :=$$

$$m\,l\left(l\left(\frac{d^{2}}{dt^{2}}\theta(t)\right)-\left(\frac{d^{2}}{dt^{2}}z(t)\right)\sin(\theta(t))-\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)^{2}R\cos(\theta(t))-\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)^{2}l\cos(\theta(t))\sin(\theta(t))+g\sin(\theta(t))\right),$$

$$2\,m\left(\frac{d^{2}}{dt^{2}}\phi(t)\right)R\,l\sin(\theta(t))+2\,m\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)R\,l\cos(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)+m\left(\frac{d^{2}}{dt^{2}}\phi(t)\right)R^{2}-m\left(\frac{d^{2}}{dt^{2}}\phi(t)\right)l^{2}\cos(\theta(t))^{2}+2\,m\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)l^{2}\cos(\theta(t))\sin(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)+m\left(\frac{d^{2}}{dt^{2}}\phi(t)\right)l^{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{d^{2}}{dt^{2}}\phi(t)\right)m2\,R^{2},$$

$$m\left(\frac{d^{2}}{dt^{2}}z(t)\right)+m2\left(\frac{d^{2}}{dt^{2}}z(t)\right)-m\,l\cos(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)^{2}-m\,l\sin(\theta(t))\left(\frac{d^{2}}{dt^{2}}\theta(t)\right)-m2\,g+k\,z(t)-k\,\mathrm{csgn}(1,z(t))\,z(t)\,l0-k\,\mathrm{csgn}(z(t))\,l0-m\,g\Bigg]$$

Paso 9. Asignación de valores numéricos a los parámetros que queden sun asignar para poder proceder a la integración numérica.

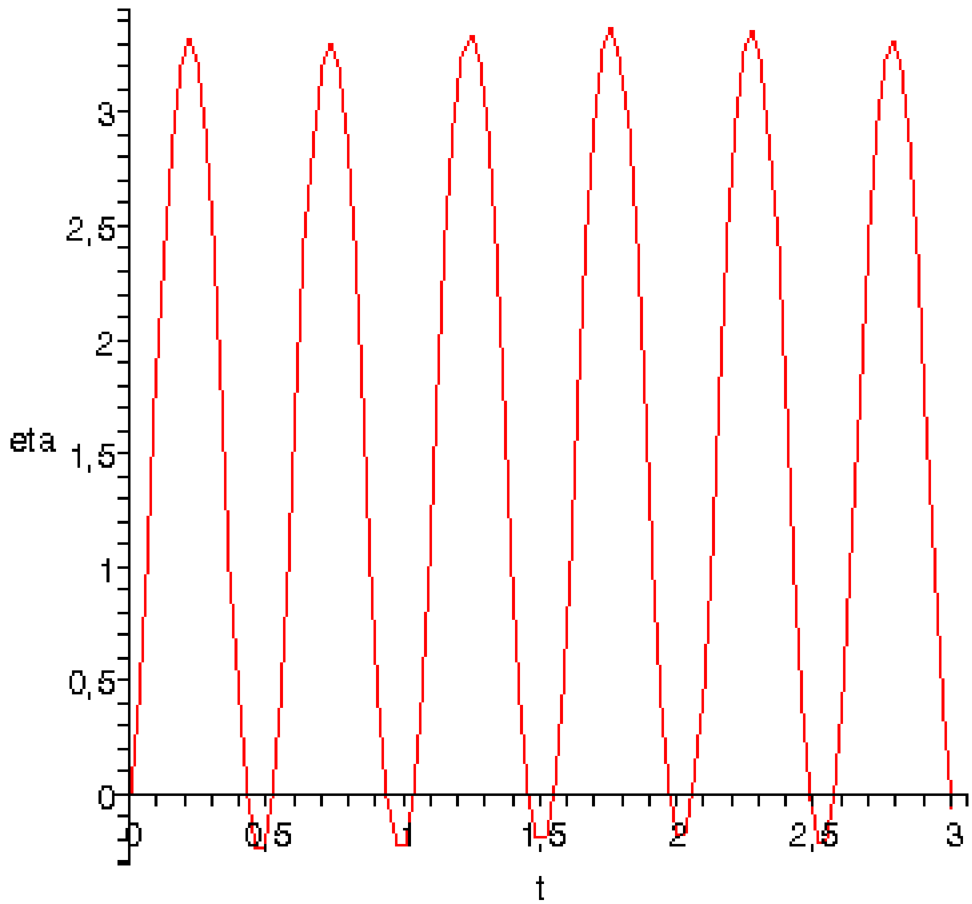
```
> R:=6:l:=3:m:=4:m2:=4:g:=9.8:k:=50:l0:=0:
```

Paso 10. Integración numérica del problema mediante la función fint asignando el resultado a la variable res.

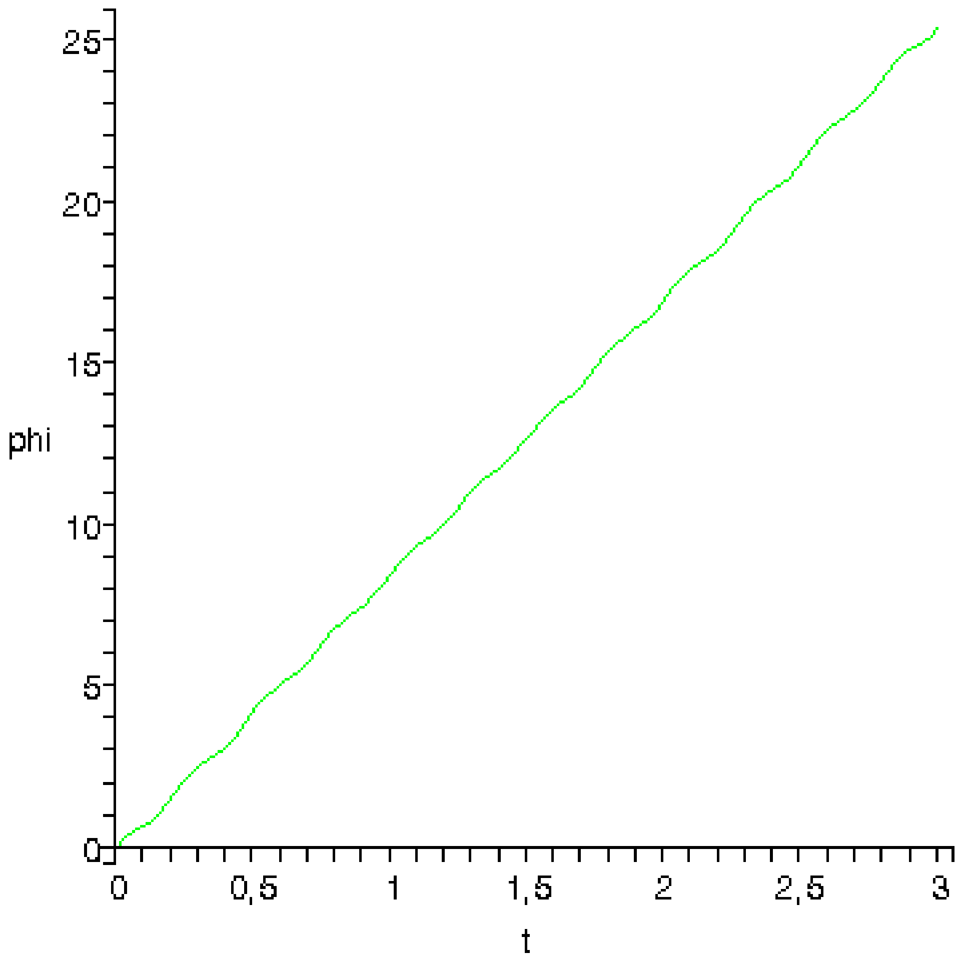
```
> res:=fint([0,10,0,10,0,10]):
```

Paso 11. Representación gráfica de las evoluciones temporales de la evolución temporal de theta, phi y z mediante odeplot.

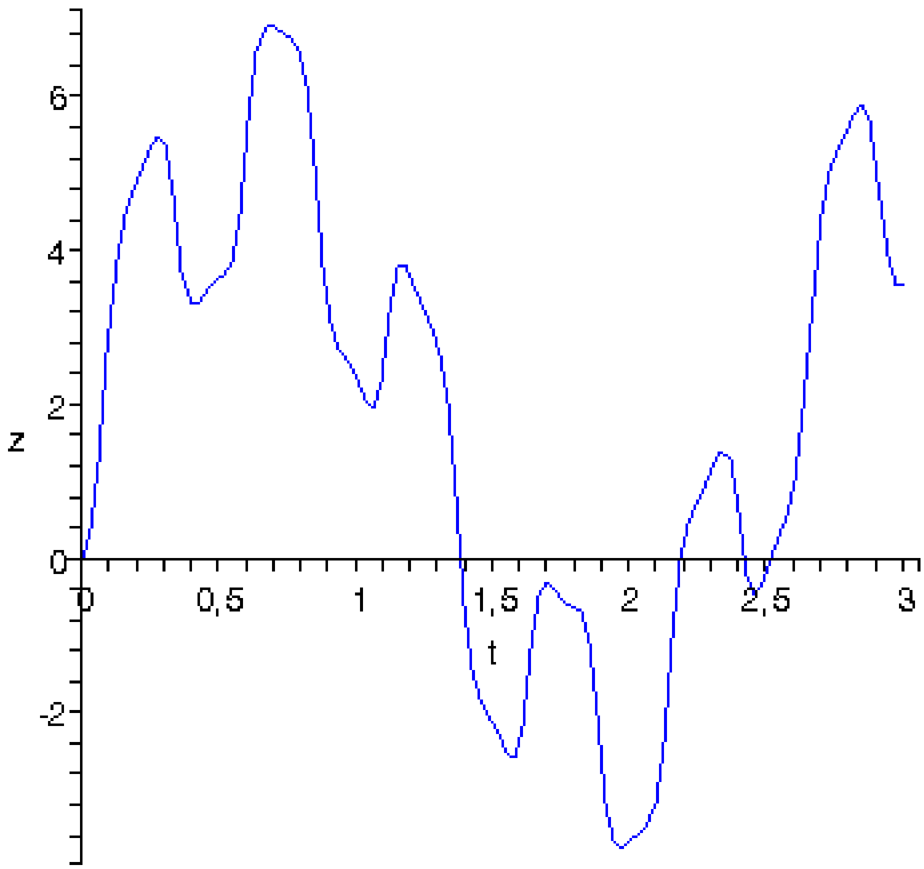
```
> odeplot(res,[t,theta(t)],0..3,color=red,numpoints=100);
```




```
> odeplot(res,[t,phi(t)],0..3                ,color=green    ,numpoints=100);
```

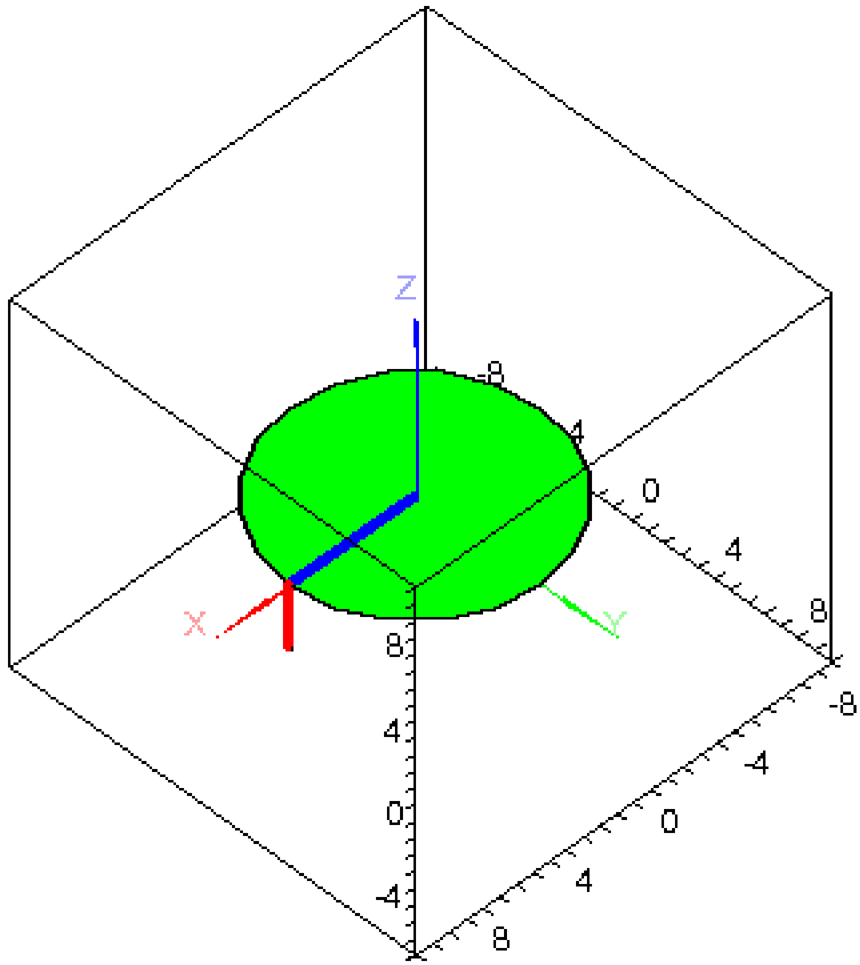



```
> odeplot(res,[t,z(t)],0..3                ,color=blue     ,numpoints=100);
```



Paso 12. Procedemos a realizar una animación del movimiento del conjunto por medio de la función dibu3.

```
> dibu3(3,70);
```


Z
X
Y
-8
4
0
4
8
8
4
0
-4
-8
-4
0
4
8

>