ENUNCIADO EJEMPLO 16

Un disco de masa M y radio R puede girar libremente alrededor de su eje de revolución vertical OZ. En el disco existe una acanaladura radial sin masa y lisa por la que desliza una rótula cilíndrica de masa m, que a su vez es el punto de suspensión de un péndulo simple de longitud l y masa m. La rótula actúa obligando al péndulo a moverse en el plano vertical que contiene a la acanaladura.

Paso 0. Reiniciación de las variables del sistema y llamada a los paquetes linalg, plots y plottools.

```
> restart:
> with(linalg):with(plots):with(plottools):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined

> libname:="c:/",libname:
> with(mecapac3d):
```

Paso 1. Definimos las coordenadas generalizadas del sistema en una lista que se denominará cg.

```
> cg:=[phi,theta,s];
```

$$cg := [\phi, \theta, s]$$

Paso 2. Definición mediante variables de los elementos que forman el sistema mecánico.

```
> rotula:=[punto,s*cos(phi),s*sin(phi),0,m]:
> punt:=[punto,(s+l*sin(theta))*cos(phi),(s+l*sin(theta))*sin(phi),-l*cos(
theta),m]:
> xg:=[0,0,0]:
> roti:=rota(phi,3):
> disc:=[disco,xg,roti,M,R]:
```

Paso 3. Definición de los elementos gráficos que definiran nuestro sistema de ejes.

```
> aphi:=[angulo,[1,0,0],[0,0,0],[cos(phi),sin(phi),0],1]:
> atheta:=[angulo,[s*cos(phi),s*sin(phi),-1],[s*cos(phi),s*sin(phi),0],[(s
+sin(theta))*cos(phi),(s+sin(theta))*sin(phi),-cos(theta)],1]:
> aca:=[segmento,[0,0,0],[R*cos(phi),R*sin(phi),0],black]:
> var:=[segmento,[s*cos(phi),s*sin(phi),0],[(s+l*sin(theta))*cos(phi),(s+l
*sin(theta))*sin(phi),-l*cos(theta)],red]:
> ejeX:=[vector,[0,0,0],[R+2,0,0],red]:
> ejeY:=[vector,[0,0,0],[0,R+2,0],green]:
> ejeZ:=[vector,[0,0,0],[0,0,R+2],blue]:
> TO := [texto,[0,1,0],"O"]:
```

```
> TX := [texto,[       R+3,0,0],"X"]:
> TY := [texto,[0,R+3,0],"Y"]:
> TZ := [texto,[0,0,R+3],"Z"]:
```

Paso 4. Definición de la variable sistema que agrupa en una lista todos los elementos anteriores.

```
> sistema:=[punt,rotula,disc,aca,var,atheta,aphi,ejeX,ejeY,ejeZ,TO,TX,TY,T
  Z]:
```

Paso 5. Obtención de la energía cinética del sistema mediante fT asignándola a la variable T.

```
> T:=fT(sistema);
```

$$T := \frac{1}{2} m \left(\left((s1 + l \cos(\theta)\,\theta 1) \cos(\phi) - (s + l \sin(\theta)) \sin(\phi)\,\phi 1 \right)^2 + \left((s1 + l \cos(\theta)\,\theta 1) \sin(\phi) + (s + l \sin(\theta)) \cos(\phi)\,\phi 1 \right)^2 + l^2 \sin(\theta)^2\,\theta 1^2 \right) + \frac{1}{2} m \left((s1 \cos(\phi) - s \sin(\phi)\,\phi 1)^2 + (s1 \sin(\phi) + s \cos(\phi)\,\phi 1)^2 \right) + \frac{1}{4} \phi 1^2 M R^2$$

Paso 6. Obtención de la energía potencial del sistema mediante fV asignándola a la variable V.

```
> V:=fV(sistema);
```

$$V := -m\, g\, l \cos(\theta)$$

Paso 7. Obtención de la lagrangiana como diferencia de energías entre la energía cinética y la potencial.

```
> L:=simplify(T-V);
```

$$L := m\, s1^2 + \frac{1}{4} \phi 1^2 M R^2 + m\, s1\, l \cos(\theta)\,\theta 1 + m\, s\, \phi 1^2\, l \sin(\theta) + m\, s^2\, \phi 1^2 + \frac{1}{2} m\, l^2\, \theta 1^2 - \frac{1}{2} m\, \phi 1^2\, l^2 \cos(\theta)^2 + \frac{1}{2} m\, \phi 1^2\, l^2 + m\, g\, l \cos(\theta)$$

Paso 8. Obtención de las ecuaciones de lagrange para las dos coordenadas generalizadas mediante el operador Ec_lag

```
> ecua:=ec_lag();
```

$$ecua := \left[\vphantom{\frac{d^2}{dt^2}} \right.$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) \right) M R^2 + 2 m \left(\frac{d}{dt} s(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) l \sin(\theta(t)) + 2 m\, s(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) \right) l \sin(\theta(t)) + 2 m\, s(t) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) l \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) + 4 m\, s(t) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \left(\frac{d}{dt} s(t) \right) + 2 m\, s(t)^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) \right)$$

$$- m \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) \right) l^2 \cos(\theta(t))^2 + 2\, m \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) l^2 \cos(\theta(t)) \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) + m \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) \right) l^2,$$

$$m \left(\frac{d^2}{dt^2} s(t) \right) l \cos(\theta(t)) + m\, l^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) - m\, s(t) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 l \cos(\theta(t))$$

$$- m \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 l^2 \cos(\theta(t)) \sin(\theta(t)) + m\, g\, l \sin(\theta(t)),$$

$$2\, m \left(\frac{d^2}{dt^2} s(t) \right) - m\, l \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 + m\, l \cos(\theta(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) - m \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 l \sin(\theta(t))$$

$$\left. - 2\, m\, s(t) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 \right]$$

Paso 9. Asignación de valores numéricos a los parámetros que queden sun asignar para poder proceder a la integración numérica.

```
> R:=3: l:=2 :m:=5: M:=10: g:=9.8:
```

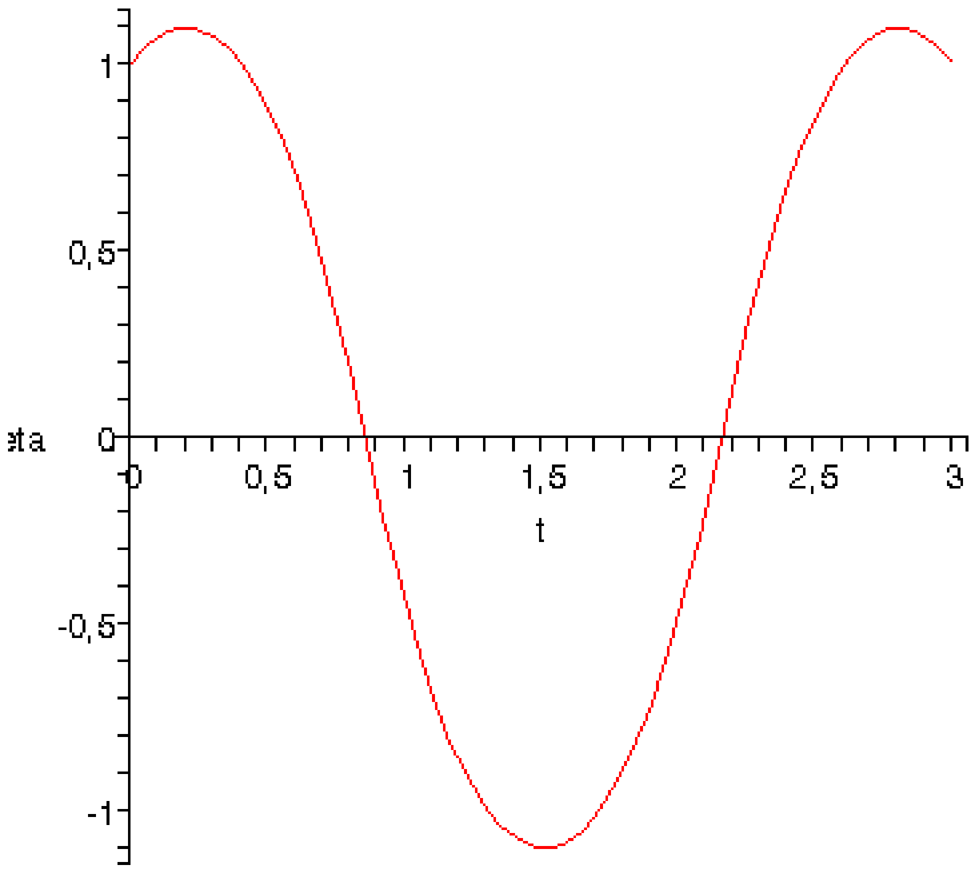
Paso 10. Integración numérica del problema mediante la función fint asignando el resultado a la variable res.

```
> res:=fint([1.0,evalf(Pi/8),1.0,1.0,0.0,0]):
```

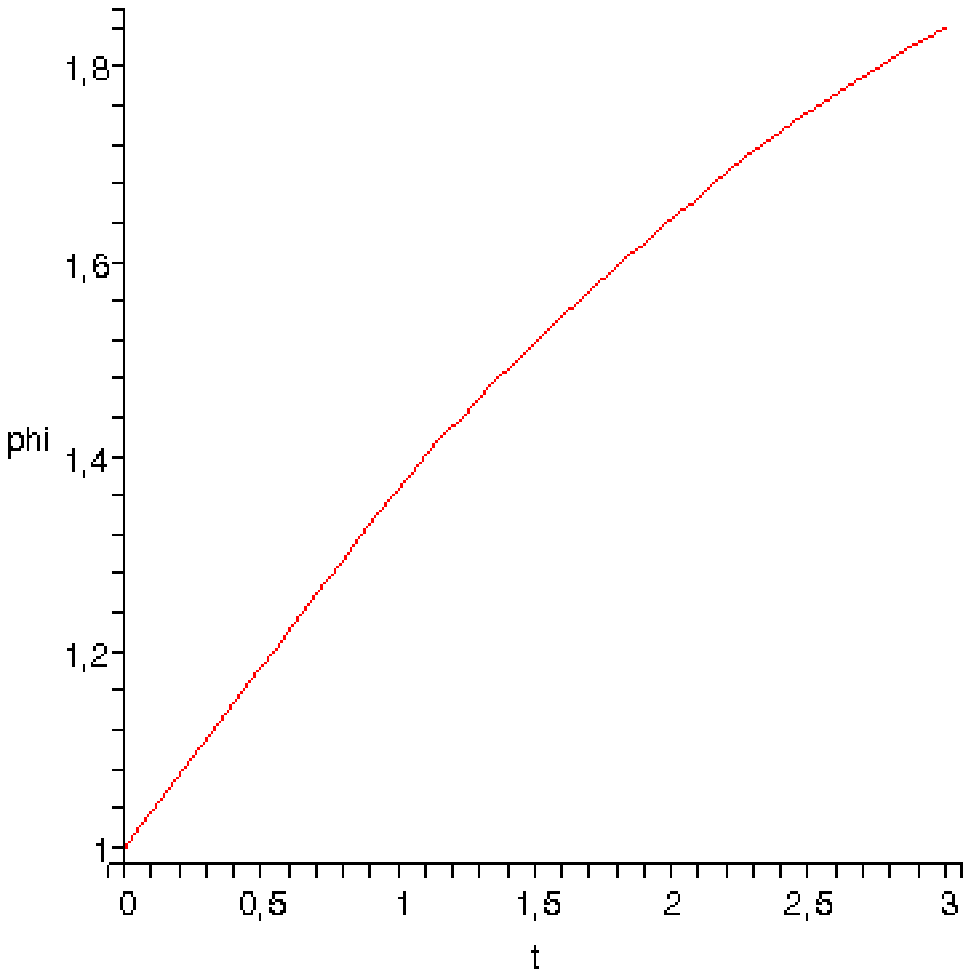
```
> res(0.1):
```

Paso 11. Representación gráfica de las evoluciones temporales de z mediante odeplot.

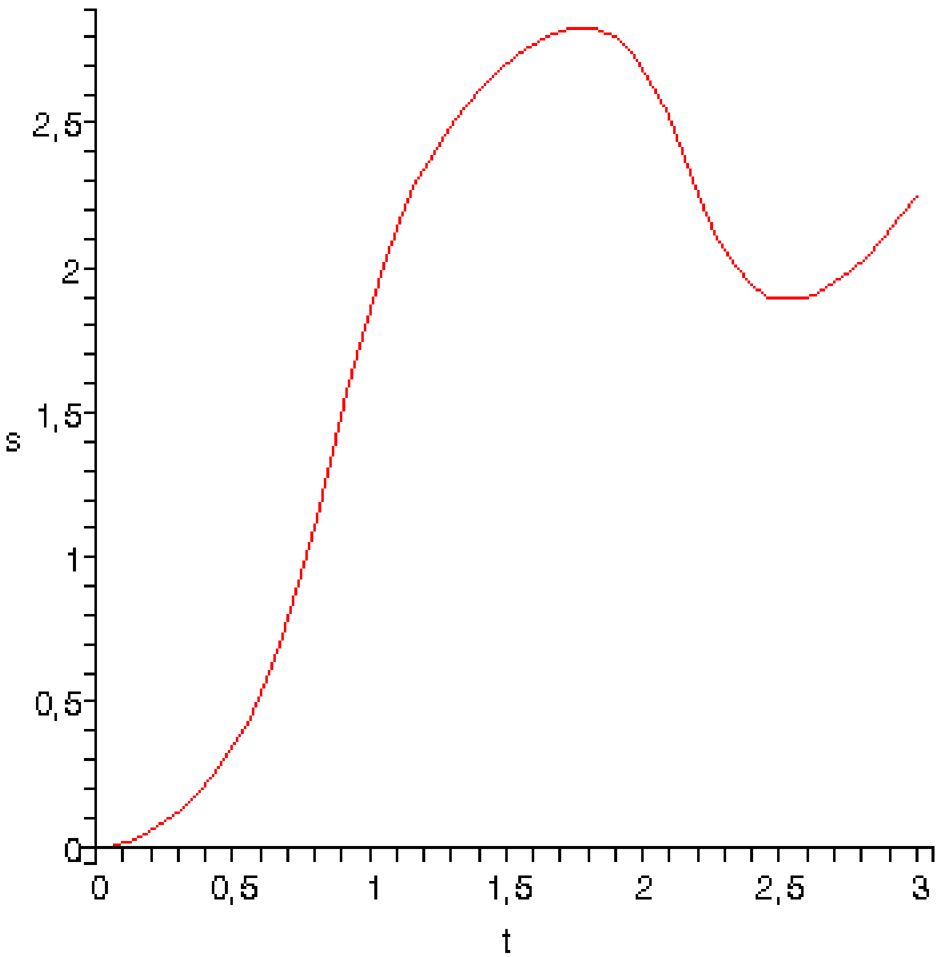
```
> odeplot(res,[t,theta(t)],0..3);
```




```
> odeplot(res,[t,phi(t)],0..3);
```

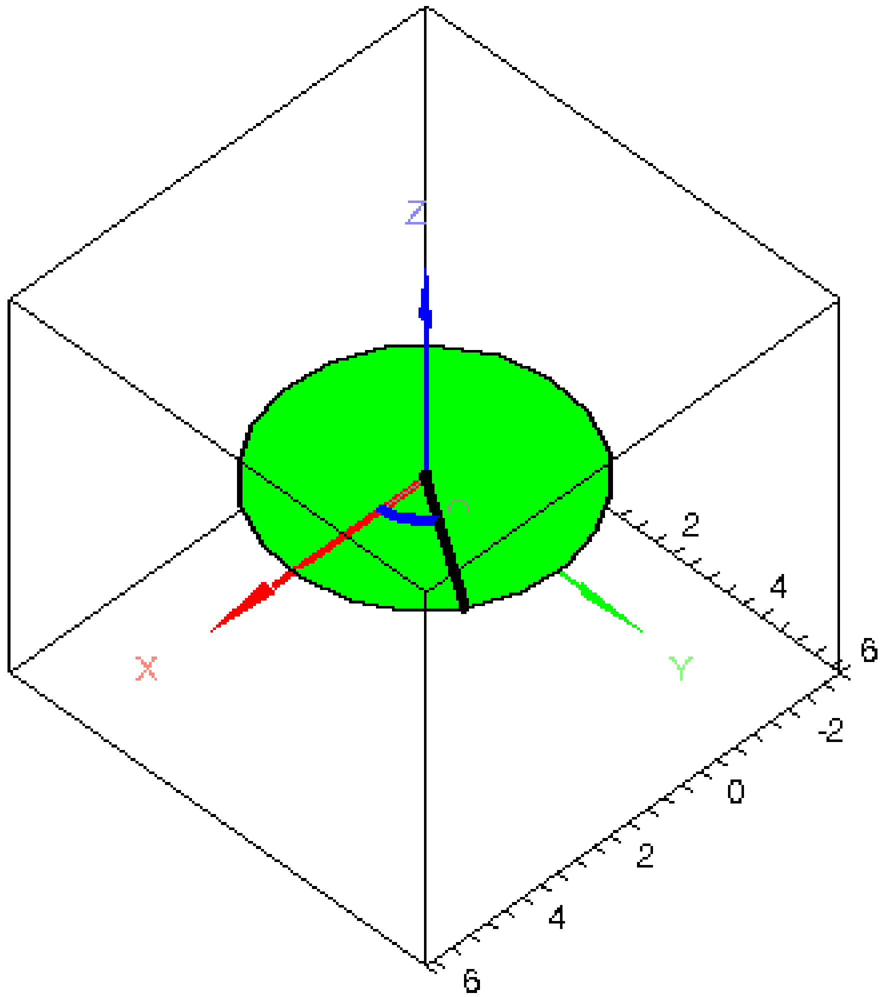


> **odeplot(res,[t,s(t)],0..3);**



Paso 12. Procedemos a realizar una animación del movimiento del conjunto por medio de la función dibu3.

```
> dibu3(2,50);
```


Z
X
Y
2
4
6
-2
0
2
4
6

>