MECOM99
Mendoza
6-10 de septiembre de 1999

ANÁLISIS DINÁMICO DE MECANISMOS FLEXIBLES EN RÉGIMEN NO LINEAL

José M. Goicolea Ruigómez y Juan Carlos García Orden

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Madrid
Ciudad Universitaria, 28040 Madrid, España
e-mail: `goicolea@mecanica.upm.es`; *http:* `w3.mecanica.upm.es`

RESUMEN

La dinámica de sistemas multicuerpo flexibles generales, formados por componentes tanto rígidas como deformables, está caracterizada por la fuerte no linealidad de las ecuaciones y el carácter «stiff» de las mismas, lo que ocasiona importantes problemas de estabilidad. Se estudia aquí este tipo de sistemas no lineales, proponiendo un método de cálculo, en el que se presta especial importancia a las propiedades conservativas del algoritmo de integración temporal. Como se muestra, esta faceta juega un papel clave para la estabilidad y robustez de la simulación numérica.

Para definir la configuración de cada cuerpo se usa un conjunto de variables dependientes, las coordenadas cartesianas inerciales de un conjunto dado de puntos de cada componente, sujetas a restricciones que se imponen mediante penalización. Los cuerpos flexibles, discretizados mediante elementos finitos, están representados por modelos hiperelásticos que pueden sufrir grandes deformaciones, giros y desplazamientos.

Se propone el uso de un algoritmo de integración temporal energía-momento, que consigue una estabilidad y robustez notables con conservación exacta de la energía total. Este método resuelve de forma adecuada las ecuaciones con carácter «stiff» que resultan como consecuencia bien de la penalización, bien de la inclusión de elementos flexibles. Por último, se describen algunos ejemplos resueltos para sistemas flexibles.

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo se refiere a la dinámica no lineal de sistemas multicuerpo flexibles generales, entendidos como conjuntos de componentes, rígidas o deformables, unidas por distintos tipos de juntas o restricciones, pudiendo incluir asimismo elementos activos tales como resortes, amortiguadores, etc.

El método que se propone aquí se basa en los siguientes ingredientes fundamentales:

1. *Coordenadas cartesianas inerciales* de puntos de referencia en cada cuerpo para determinar la configuración de cada cuerpo. Para un cuerpo rígido, estas coordenadas forman un conjunto dependiente, por

tanto sujeto necesariamente a restricciones internas, además de las restricciones externas originadas por las juntas y apoyos. Esta idea fue originada en las llamadas coordenadas naturales [3].

2. *Penalización* para imponer las restricciones, imponiendo fuerzas de recuperación asociadas a la violación de las mismas. Al ser necesario que la rigidez de los penalizadores sea elevada, se introducen frecuencias altas en el sistema, que sin embargo no resultan un inconveniente grave para la formulación propuesta.
3. *Integración temporal conservativa* mediante el método energía-momento, consiguiendo conservación algorítmica exacta en el régimen no lineal.

En varios trabajos recientes se han empleado algoritmos de integración que conservan tanto el momento como la energía en problemas no lineales [1, 2, 4, 5], métodos que gozan en la actualidad de un interés considerable. Uno de las principales ventajas es la fiabilidad para los resultados de simulaciones prolongadas en sistemas conservativos. Aunque la conservación de la energía no garantiza por sí sola la estabilidad incondicional en el régimen no lineal [7], en la práctica dicha estabilidad resulta muy favorecida en la dinámica no lineal de sólidos.

El método aquí seguido, en relación con otras formulaciones energía-momento [1, 4, 8, 11, 12], difiere en dos aspectos clave: 1) el uso de coordenadas dependientes para los cuerpos rígidos, basadas en las coordenadas cartesianas inerciales; 2) una formulación basada en la penalización para imponer las restricciones. Como se detallará más abajo, esto permite obtener una implementación numérica a la vez simple y robusta.

Un aspecto esencial de los sistemas multicuerpo flexibles es la presencia de movimientos grandes y lentos (gobernados por la inercia de los sólidos), combinados con movimientos internos pequeños y de alta frecuencia (gobernados por la transmisión de ondas de tensión). Adicionalmente, estas frecuencias altas aumentan conforme se refina la malla. Por su parte, el efecto de los penalizadores es análogo a introducir elementos adicionales muy rígidos entre los grados de libertad restringidos.

Por otra parte, el empleo de coordenadas cartesianas inerciales con penalización tiene dos ventajas principales: facilita la definición del sistema, y lleva a un problema formulado como un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's), con el mismo número de ecuaciones que variables del sistema. En el caso de emplear multiplicadores de Lagrange, se llegaría por el contrario a un sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales (EAD's) con variables adicionales (multiplicadores).

Si se desea representar de forma realista las restricciones, es necesario limitar la violación de las mismas a valores pequeños, imponiendo constantes elevadas de penalización. Esto lleva consigo la introducción de frecuencias muy elevadas, adquiriendo las ecuaciones un marcado carácter «stiff». La mayoría de los integradores temporales existentes sufre graves problemas en este tipo de situaciones, siendo necesario disminuir de forma drástica el paso de tiempo de integración, ya que en caso contrario se alcanzan situaciones de bloqueo numérico o de inestabilidad. En muchos casos reales, en términos prácticos, resulta inviable la simulación numérica en intervalos de tiempo prolongados, si se emplean integradores convencionales. Los resultados aquí presentados muestran unas prestaciones del algoritmo energía-momento notablemente superiores otros integradores, permitiendo el empleo práctico de una formulación basada en la penalización.

En relación con las propiedades de conservación, el método de penalización tiene adicionalmente una característica útil: las fuerzas de restricción derivan de un potencial, la energía de restricción. La *energía total* del sistema, que incluye por definición esta energía de restricción, se conserva por la propia construcción del algoritmo energía-momento. Debe observarse que la *energía verdadera* no coincide exactamente con esta energía total, correspondiendo la diferencia a la energía de las restricciones. Esta última está siendo continuamente intercambiada con la del resto del sistema. Sin embargo, empleando factores de penalización suficientemente elevados, la violación de las restricciones y su energía asociada puede mantenerse suficientemente pequeña para la mayoría de las aplicaciones prácticas. Algunos autores describen esta situación como *preservación de la energía,* ya que si las restricciones desapareciesen —como de hecho ocurre en las ligaduras unilaterales de los contactos— la energía verdadera se recuperaría de forma exacta.

Como se presenta en los siguientes apartados, el empleo de coordenadas cartesianas inerciales y penalización conduce a un marco muy conveniente para aplicar las ideas originadas en [4, 5], extendiendo estos resultados a la formulación de sistemas multicuerpo. Los contactos se pueden tratar de forma similar, conduciendo a resultados acordes con los obtenidos en [6, 9].

A continuación se expone en primer lugar un ejemplo simple pero representativo, que evidencia las dificultades que experimentan integradores estándar para resolución de sistemas dinámicos lineales, frente a un problema no lineal y carácter «stiff». A continuación se presenta la formulación aquí propuesta, comenzando por las ecuaciones de la dinámica, tanto para las cuerpos rígidos como flexibles, o sistemas multicuerpo completos. Se resume después la representación de las restricciones y contactos en el modelo. Seguidamente, se discuten y desarrollan los algoritmos conservativos empleados para integración temporal. Por último, se resumen las características básicas de un programa de ordenador en el que han sido implementados los modelos anteriores, y se describen varias aplicaciones representativas.

2. EJEMPLO: PÉNDULO FLEXIBLE

El sistema consta de una partícula pesada de masa m, unida a un punto fijo mediante un resorte de longitud natural l_0 y constante elástica k. Inicialmente la partícula se lanza desde la vertical del punto fijo, con velocidad horizontal v_0. Los valores numéricos son: $m = 1$ kg, $l_0 = 3{,}0443$ m, $g = 9{,}8$ m/s^2, $k = 32848274$ N/m, y $v_0 = 7{,}725$ m/s.

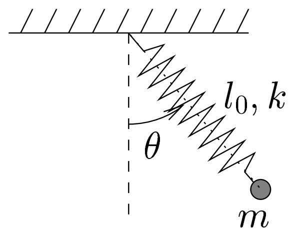

Figura 1: *Péndulo simple flexible*

Este ejemplo ha sido estudiado en [14] y [8] para mostrar los problemas de estabilidad de la regla trapezoidal en el régimen no lineal. Resulta particularmente interesante en el contexto de este trabajo, ya que físicamente el efecto del muelle es idéntico al de imponer con penalización que la distancia del la partícula al punto fijo es constante. La alta rigidez del muelle se asimilaría a un parámetro de penalización elevado, resultando en un sistema de ecuaciones «stiff».

La configuración del sistema se define mediante la pareja de coordenadas (s, θ), que representan respectivamente la elongación del muelle ($s = l - l_0$) y el ángulo que forma éste con la vertical. Las ecuaciones linealizadas del movimiento se pueden reescribir de forma compacta como un sistema de primer orden dado por: $\dot{\boldsymbol{y}} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{y} = \left(s, \dot{s}, \theta, \dot{\theta}\right)$. Los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$ resultan $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{g/l_0} = \pm i\,1{,}7941$ y $\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{k/m} = \pm i\,5731{,}34$. Estos valores permiten calcular los dos periodos de oscilación $T_1 = 2\pi\sqrt{l_0/g} = 3{,}5019$ s y $T_2 = 2\pi\sqrt{m/k} = 0{,}00109$ s. El periodo más largo (T_1) corresponde al movimiento pendular, mientras que el corto (T_2) corresponde al movimiento vibratorio del muelle. Ambos periodos son muy dispares ($T_1/T_2 = 3212$), por lo que el sistema no lineal que gobierna el movimiento puede caracterizarse como «stiff». Por otra parte, las condiciones iniciales especificadas producen oscilaciones de gran amplitud, lo que genera un acusado carácter no lineal.

Los métodos de integración ensayados son: regla trapezoidal (β-Newmark), HHT, regla del punto medio, y el método energía-momento aquí propuesto. Todos ellos son incondicionalmente estables en régimen lineal. En primer lugar se adopta un paso de tiempo $h = 0{,}02\,\mathrm{s} \simeq (T_1/175) \simeq 18T_2$. Con este valor se alcanza una simulación razonable para todos los métodos (figura 2). Cabe observar que otros métodos aquí no representados, como Runge-Kutta explícito de orden 4 o métodos multipaso Adams-Moulton/ Adams-Bashford resultan inestables en régimen lineal para este paso [16].

Para un paso de tiempo de $h = 0{,}1\,\mathrm{s} \simeq (T_1/35) \simeq 90T_2$ se produce un peculiar fenómeno de bloqueo en la regla trapezoidal, y también algo similar en la regla del punto medio, tal y como se muestra en la Figura 2, a pesar de la estabilidad incondicional de dicho método en régimen lineal. Este bloqueo está causado por la no linealidad del sistema. El algoritmo energía-momento, no obstante, muestra una excelente estabilidad, que permite aumentar el paso de tiempo incluso hasta cuatro veces más ($h = 0{,}4\,\mathrm{s} \simeq 360T_2$, es decir un paso de tiempo cada 360 periodos de la oscilación longitudinal del muelle).

La figura 3 muestra que el bloqueo de la regla trapezoidal está asociado a un crecimiento brusco de la energía total del sistema, debido a un aumento de la energía de deformación del resorte en detrimento de la energía cinética asociada al movimiento pendular. El fenómeno desaparece al hacer uso del método HHT con $\alpha = -0{,}1$, a costa de introducir un pequeño amortiguamiento numérico (casi no perceptible en la figura 3).

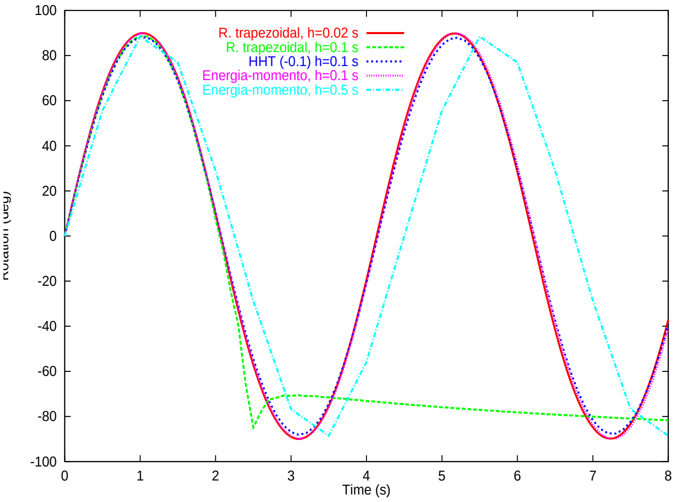

Figura 2: *Péndulo flexible: Ángulo vs. tiempo*

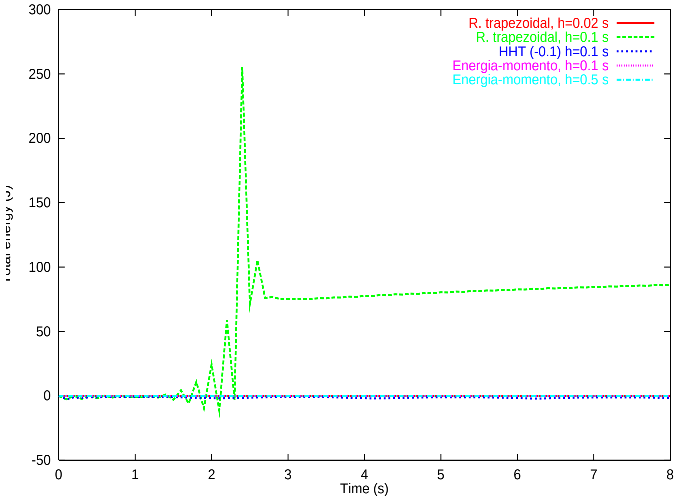

Figura 3: *Péndulo flexible: Energía total vs. tiempo*

3. FORMULACIÓN DE LAS ECUACIONES

A continuación se introduce la notación y se desarrollan de forma breve las ecuaciones del movimiento. En primer lugar se tratan los cuerpos rígidos, identificados por el subíndice $(\cdot)_{\mathrm{R}}$; a continuación, los cuerpos flexibles elásticos, identificados por $(\cdot)_{\mathrm{E}}$; por último, se expresan las ecuaciones para el sistema multicuerpo completo, en forma matricial particionada. Para una descripción más detallada, consultar [16].

3.1. Cuerpos Rígidos

Consideramos un cuerpo rígido $\mathcal{B}_{\mathrm{R}}$, siendo $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{x}$ respectivamente las coordenadas convectivas (o materiales) y espaciales en un marco de referencia inercial de un punto arbitrario del cuerpo. La cinemática del sólido $\mathcal{B}_{\mathrm{R}}$ está definida por $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_G + \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_G)$, siendo $\boldsymbol{x}_G$ la traslación del centro de masa y $\boldsymbol{\Lambda} \in SO(3)$ (grupo de rotaciones propias). Consecuentemente, el campo de velocidades queda definido mediante $(\dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\boldsymbol{x}}_G) = \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_G)$, donde la velocidad angular espacial $\boldsymbol{\omega}$ es el vector axial del tensor hemisimétrico $\widehat{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}$. El tensor central de inercia convectivo es constante, y definido por $\mathbb{J}_G = \int_{\mathcal{B}_{\mathrm{R}}} \left[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_G)^2 \mathbf{1} - (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_G) \otimes (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_G)\right] \rho \, \mathrm{d}V$, donde $\mathbf{1}$ es el tensor unitario de orden 2, y $\otimes$ indica producto tensorial (diádico). El tensor de inercia espacial (no constante) se calcula mediante $\mathbb{I}_G = \boldsymbol{\Lambda}\mathbb{J}_G\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}$. La masa del sólido se denota por $M_{\mathrm{R}} = \int_{\mathcal{B}_{\mathrm{R}}} \rho \, \mathrm{d}V$.

Suponemos que el sólido se halla sometido a r restricciones holónomas, función de p parámetros de enlace, lo que se expresa de forma compacta como $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}_\Phi) = \boldsymbol{0}$ (de forma que $\mathbb{R}^p \ni \boldsymbol{q}_\Phi \longmapsto \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}_\Phi) \in \mathbb{R}^r$). La expresión débil de las ecuaciones de la dinámica puede hacerse empleando las variables independientes básicas $(\boldsymbol{x}_G, \boldsymbol{\theta})$, siendo $\boldsymbol{\theta} = \theta\boldsymbol{n}$ el vector de rotación que parametriza el tensor de rotación $\boldsymbol{\Lambda}$ (fórmula de Rodrigues):

$$\boldsymbol{\Lambda} = \exp(\theta\widehat{\boldsymbol{n}}) = \cos(\theta)\mathbf{1} + (1 - \cos(\theta))\,\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} + \operatorname{sen}(\theta)\,\widehat{\boldsymbol{n}}. \tag{1}$$

(Al igual que antes, se emplea la notación $\widehat{(\cdot)}$ para indicar el tensor hemisimétrico asociado al vector axial correspondiente.) Empleando también el vector de multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^r$, la dinámica del cuerpo rígido puede expresarse de la siguiente forma:[1]

$$\delta \boldsymbol{x}_G \cdot M_{\mathrm{R}} \ddot{\boldsymbol{x}}_G + \delta\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbb{I}_G \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathrm{D}\boldsymbol{\Phi} \cdot \delta \boldsymbol{q}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi} \cdot \delta\boldsymbol{\lambda} - \delta \boldsymbol{x}_G \cdot \boldsymbol{f}_{\mathrm{R}} - \delta\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{m}_{\mathrm{R}} = 0, \qquad \forall(\delta \boldsymbol{x}_G, \delta\boldsymbol{\theta}, \delta\boldsymbol{\lambda}), \tag{2}$$

siendo $\boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}$ y $\boldsymbol{m}_{\mathrm{R}}$ las resultantes de fuerzas y momentos externos en G, y D el operador derivada. Admitiendo que el vector de parámetros de enlace $\boldsymbol{q}_\Phi$ esté formado por coordenadas inerciales de puntos del sólido $\{\boldsymbol{q}_\Phi^i, i = 1\dots p/3\}$, cabe observar que las variaciones $\delta\boldsymbol{q}_\Phi$ en (2) están relacionadas cinemáticamente con las variables independientes básicas $(\boldsymbol{x}_G, \boldsymbol{\theta})$ mediante:

$$\delta \boldsymbol{q}_\Phi^i = \delta \boldsymbol{x}_G + \delta\boldsymbol{\theta} \wedge (\boldsymbol{q}_\Phi^i - \boldsymbol{x}_G).$$

Se propone aquí emplear, en lugar de las variables independientes básicas $(\boldsymbol{x}_G, \boldsymbol{\theta})$, un conjunto de variables dependientes consistentes en los vectores posición (coordenadas inerciales) de m puntos del cuerpo $\boldsymbol{q}_{\mathrm{R}} \in \mathbb{R}^{3m}$. En este caso, la energía cinética tiene una expresión cuadrática homogénea en $\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{R}}$,

$$T_{\mathrm{R}} = \int_{\mathcal{B}_{\mathrm{R}}} \dot{\boldsymbol{x}}^2 \rho \, \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{R}} \cdot (\mathbf{M}_{\mathrm{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{R}}), \tag{3}$$

en función de una matriz de masa $\mathbf{M}_{\mathrm{R}}$, cuyas componentes son constantes siempre que sea $m \geq 4$, tal y como se detalla en el apartado 3.2. En función de estas coordenadas dependientes, y admitiendo sin pérdida de generalidad que se emplean como parámetros de enlace las propias coordenadas $\boldsymbol{q}_\Phi = \boldsymbol{q}_{\mathrm{R}}$, la forma débil de las ecuaciones resulta:

$$\delta \boldsymbol{q}_{\mathrm{R}} \cdot (\mathbf{M}_{\mathrm{R}} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{R}}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda} \cdot [\mathrm{D}\boldsymbol{\Phi} \cdot \delta \boldsymbol{q}_{\mathrm{R}}] + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi} \cdot \delta\boldsymbol{\lambda} - \delta \boldsymbol{q}_{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{Q}_{\mathrm{R}} = 0, \quad \forall \delta \boldsymbol{q}_{\mathrm{R}} \in \mathcal{V}^{3m-r}, \ \forall \delta\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^r, \tag{4}$$

donde $\mathcal{V}^{3m-r} \subset \mathbb{R}^{3m}$ es la variedad $(3m-r)$-dimensional de las variaciones $\delta\boldsymbol{q}_{\mathrm{R}}$ compatibles con las restricciones $\boldsymbol{\Phi}$. Éstas se imponen mediante penalización, lo que resulta equivalente a sustituir en (4) $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{R}})$, donde $\boldsymbol{\alpha}$ es una matriz $(r \times r)$ de constantes de penalización. De esta forma, se pueden considerar $\delta\boldsymbol{q}_{\mathrm{R}}$ arbitrarias, lo que conduce a las ecuaciones diferenciales siguientes,

$$\mathbf{M}_{\mathrm{R}} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{R}} + \underbrace{[\mathrm{D}\boldsymbol{\Phi}]^{\mathrm{T}} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Phi})}_{-\mathbf{f}_{\Phi_{\mathrm{R}}}} - \mathbf{Q}_{\mathrm{R}} = \mathbf{0}. \tag{5}$$

En caso de un sistema multicuerpo con varios sólidos rígidos, $\{\mathcal{B}_{\mathrm{R}_i}, \ i = 1, \dots, N\}$, basta con ensamblar en $\boldsymbol{q}_{\mathrm{R}}$ todas las variables de cada cuerpo.

3.2. Matriz de Masa para el Sólido Rígido

El tipo de coordenadas escogidas determina el desarrollo de los términos de inercia en la formulación. En nuestro caso, tomando para cada sólido rígido las coordenadas inerciales de 4 puntos, $\boldsymbol{q}_{\mathrm{R}} = (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) \in \mathcal{B}_{\mathrm{R}}$, se obtiene una formulación de gran sencillez, mediante una matriz de masa constante. Estos puntos permiten además establecer una referencia convectiva S', que por lo general no será ortonormal, ligada al sólido:

$$\{O; \boldsymbol{t}_i \mid O \equiv \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{t}_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_0, i = 1, 2, 3\}, \tag{6}$$

con la única condición $(\boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{t}_2) \cdot \boldsymbol{t}_3 \neq 0$. De esta manera, el vector posición de un punto genérico del sólido, relativo al punto de referencia $O \in \mathcal{B}_{\mathrm{R}}$, puede expresarse como

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = X_1' \boldsymbol{t}_1 + X_2' \boldsymbol{t}_2 + X_3' \boldsymbol{t}_3. \tag{7}$$

[1]En esta ecuación y en lo que sigue emplearemos preferentemente la notación de negrita recta $(\mathbf{M}, \mathbf{a})$ así como corchetes o llaves $([\mathbf{A}], \{\mathbf{f}\})$ para cantidades matriciales y negrita inclinada $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f})$ para cantidades tensoriales o vectoriales. Los puntos $(\cdot)$ se emplearán para productos entre matrices así como para productos escalares entre vectores.

Esto permite interpretar las coordenadas de $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$ en el sistema S' como un vector-columna de coordenadas convectivas del punto,

$$\{\boldsymbol{X}'\} = (X_1', X_2', X_3')^{\mathrm{T}}. \tag{8}$$

De la expresión de la energía cinética (3) se deduce directamente la matriz de masa,

$$\mathbf{M}_{\mathrm{R}} = \int_{\mathcal{B}_R} \left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{q}_{\mathrm{R}}}\right]^{\mathrm{T}} \cdot \left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{q}_{\mathrm{R}}}\right] \rho\, dV \tag{9}$$

donde

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{q}_{\mathrm{R}}}\right] = \left(\ X_0'\mathbf{I}_3 \mid X_1'\mathbf{I}_3 \mid X_2'\mathbf{I}_3 \mid X_3'\mathbf{I}_3\ \right), \tag{10}$$

siendo $X_0' = 1 - \sum_{j=1}^{3} X_j'$ y $\mathbf{I}_3$ la matriz unidad de dimensión 3×3. Al desarrollar la integral (9), mediante el empleo de las relaciones (7), resultan expresiones en función de las coordenadas convectivas X_i'. Para interpretarlas, emplearemos el tensor planar de inercia convectivo (componentes constantes):

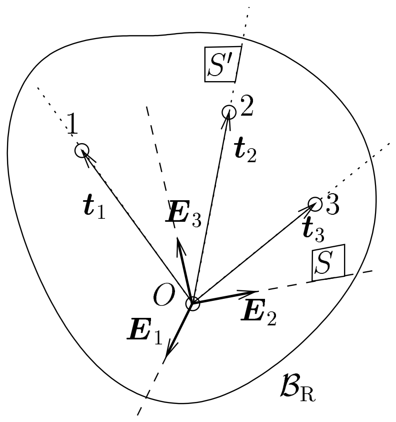

Figura 4: *Sistemas de referencia del cuerpo en un sólido rígido tridimensional.*

$$\mathbb{P}_O = \int_{\mathcal{B}_R} (\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{X})\,\rho\, dV = J_O\mathbf{1} - \mathbb{J}_O \tag{11}$$

En la expresión anterior se supone que el vector convectivo $\boldsymbol{X}$ expresa la posición relativa a O, punto de referencia del sólido. $J_O = \int_{\mathcal{B}_R} \boldsymbol{X}^2 \rho\, dV$ es el momento polar de inercia, y $\mathbb{J}_O = \int_{\mathcal{B}_R}\left(\boldsymbol{X}^2\mathbf{1} - \boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{X}\right)\rho\, dV$ el tensor de inercia convectivo en O.

Usualmente se conocerán las componentes del tensor de inercia $[\mathbb{J}_O]$ en un sistema de referencia ortonormal convectivo $S = \{O; \boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3\}$ (figura 4). Para transformar éstas al sistema no ortonormal S' basta con emplear la matriz de cambio de coordenadas $\mathbf{T}$ entre ambos sistemas,

$$[\mathbb{P}_O'] = \int_{\mathcal{B}_R} \{\boldsymbol{X}'\}\{\boldsymbol{X}'\}^{\mathrm{T}}\rho\, dV = \mathbf{T}^{-1}(J_O\mathbf{1} - [\mathbb{J}_O])\mathbf{T}^{-\mathrm{T}}. \tag{12}$$

Definimos ahora la matriz

$$[\mathbb{M}] = \left(\begin{array}{c|ccc} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ \hline m_{01} & & & \\ m_{02} & & [\mathbb{P}_O'] & \\ m_{03} & & & \end{array}\right) \tag{13}$$

donde

$$m_{00} = M^{\mathrm{R}}\left(1 - 2\sum_{i=1}^{3} X_{G_i}'\right) + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\mathbb{P}_{ij}', \tag{14}$$

$$m_{0i} = M^{\mathrm{R}} X_{G_i}' - \sum_{j=1}^{3}\mathbb{P}_{ij}', \tag{15}$$

y X_{G_i}' tienen la misma interpretación que X_i' de (7), ahora para el centro de masas del sólido. Finalmente, la matriz de masa es

$$\mathbf{M}_{\mathrm{R}} = [\widetilde{\mathbb{M}}], \tag{16}$$

donde la notación $[\widetilde{\cdot}]$ indica la matriz «inflada», en la que se sustituye cada componente escalar $(\cdot)_{ij}$ por la matriz 3×3 $(\cdot)_{ij}\mathbf{I}_3$, resultando finalmente una matriz de masa de dimensión 12×12.

3.3. Cuerpos Flexibles

El movimiento general en un cuerpo elástico $\mathcal{B}_\mathrm{E}$ se define por una aplicación diferenciable $\varphi : \boldsymbol{X} \longmapsto \boldsymbol{x}$, donde $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{x}$ son las coordenadas convectivas y espaciales respectivamente de un punto del cuerpo. El gradiente de deformación $\boldsymbol{F}$ es la derivada de esta aplicación, $\boldsymbol{F} = \mathrm{D}\varphi = \partial\boldsymbol{x}/\partial\boldsymbol{X}$. Trataremos con materiales hiperelásticos en los cuales existe una función de densidad de energía de deformación del tipo $W(\boldsymbol{C})$, siendo $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^\mathrm{T}\boldsymbol{F}$, a partir de la cual se puede expresar el tensor de tensiones simétrico de Piola-Kirchhoff como $\boldsymbol{S} = 2\,\mathrm{D}W(\boldsymbol{C})$. La energía potencial elástica del cuerpo flexible será $\Pi = \int_{\mathcal{B}_{\mathrm{E}_0}} W\,\mathrm{d}V_0$.

Introduciendo la notación para el producto interno en L_2, $\langle\cdot,\cdot\rangle_\square = \int_\square(\cdot)(\cdot)\,\mathrm{d}\square$, la variación de Π para un desplazamiento virtual arbitrario es $\delta\Pi = \langle\boldsymbol{F}\boldsymbol{S}, \mathrm{D}(\delta\boldsymbol{x})\rangle_{\mathcal{B}_{\mathrm{E}_0}} = \langle\boldsymbol{S}, \delta\boldsymbol{E}\rangle_{\mathcal{B}_{\mathrm{E}_0}}$, donde se ha empleado el tensor de deformaciones de Green-Lagrange, $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I})$. En este trabajo nos hemos limitado a emplear un modelo de comportamiento de St. Venant-Kirchhoff, definido por una densidad de energía elástica función cuadrática de $\boldsymbol{E}$,

$$W = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{C} : \boldsymbol{E}, \quad \mathbb{C} = \lambda(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}) + 2\mu\mathbb{I}, \tag{17}$$

donde (λ, μ) son las constantes de Lamé y $\mathbb{I}$ es el tensor unitario de orden 4.

La forma débil de las ecuaciones del movimiento es:

$$G_\mathrm{E}(\boldsymbol{x})[\delta\boldsymbol{x}] = \langle\rho\ddot{\boldsymbol{x}}, \delta\boldsymbol{x}\rangle_{\mathcal{B}_\mathrm{E}} - \langle\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{S}, \mathrm{D}(\delta\boldsymbol{x})\rangle_{\mathcal{B}_{\mathrm{E}_0}} - \langle\boldsymbol{f}, \delta\boldsymbol{x}\rangle_{\mathcal{B}_\mathrm{E}} - \langle\boldsymbol{t}, \delta\boldsymbol{x}\rangle_{\partial\mathcal{B}_{\mathrm{E},t}} = 0, \qquad \forall\delta\boldsymbol{x}\in\mathcal{V}, \tag{18}$$

donde $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{t}$ son respectivamente las fuerzas volumétricas y las tracciones en el contorno. En este caso, $\mathcal{V}$ es el espacio de dimensión infinita de variaciones de $\boldsymbol{x}$ compatibles con las restricciones, caso de existir éstas.

El cuerpo elástico continuo se discretiza en el espacio mediante subdominios, $\mathcal{B}_\mathrm{E} = \bigcup_{e=1}^{\mathrm{numel}}\Omega^e$, mediante técnicas estándar de elementos finitos. Tanto las coordenadas materiales $(\boldsymbol{X})$ como las espaciales $(\boldsymbol{x})$ de un punto arbitrario dentro de cada elemento Ω^e se interpolan a partir de las coordenadas nodales, mediante funciones de forma N_i:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} N_i\boldsymbol{x}_i^e = \underbrace{\begin{pmatrix} N_1\mathbf{I}_3 \,|\, N_2\mathbf{I}_3 \,|\, \dots \,|\, N_n\mathbf{I}_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{N}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^e \\ \hline \boldsymbol{x}_2^e \\ \hline \dots \\ \hline \boldsymbol{x}_n^e \end{pmatrix} = \mathbf{N}\cdot\boldsymbol{q}_\mathrm{E}^e \tag{19}$$

$$\boldsymbol{X} = \mathbf{N}\cdot\boldsymbol{q}_{\mathrm{E}_0}^e, \tag{20}$$

donde $\mathbf{I}_3$ representan matrices unidad (3×3). Empleando elementos isoparamétricos, las variaciones se interpolan de forma similar, de manera que $\delta\boldsymbol{x} = \mathbf{N}\cdot\delta\boldsymbol{q}_\mathrm{E}^e$. La aproximación de las deformaciones, dentro del subdominio de un elemento (e), está relacionada con las variables nodales mediante el operador no lineal de interpolación de deformaciones, $\mathbf{B}(\boldsymbol{q}_\mathrm{E}^e)$:

$$\delta\boldsymbol{E}^{e,h} = \mathbf{B}(\boldsymbol{q}_\mathrm{E}^e)\cdot\delta\boldsymbol{q}_\mathrm{E}^e \tag{21}$$

Así, sustituyendo en (18) se obtiene la contribución de un elemento Ω^e a la formulación débil aproximada, en términos de las variaciones definidas en un espacio de dimensión finita, $\delta\boldsymbol{q}_\mathrm{E}^e\in\mathcal{V}^{n_h}$, como:

$$\begin{aligned} G_\mathrm{E}^{h,e}(\boldsymbol{q}_\mathrm{E}^e)[\delta\boldsymbol{q}_\mathrm{E}^e] &= (\delta\boldsymbol{q}_\mathrm{E}^e)\cdot\left[\left(\int_{\Omega^e}\rho\mathbf{N}^\mathrm{T}\cdot\mathbf{N}\,\mathrm{d}V\right)\cdot\ddot{\boldsymbol{q}}_\mathrm{E}^e - \left(\int_{\Omega_0^e}\mathbf{B}\boldsymbol{S}^e\,\mathrm{d}V_0\right) - \mathbf{Q}_\mathrm{E}^e\right] \\ &= \delta\boldsymbol{q}_\mathrm{E}^e\cdot[\mathbf{M}_\mathrm{E}^e\cdot\ddot{\boldsymbol{q}}_\mathrm{E}^e - \mathbf{f}_\mathrm{int}^e - \mathbf{Q}_\mathrm{E}^e] \end{aligned} \tag{22}$$

Sumando la contribución de todos los elementos, se obtienen las matrices globales $\mathbf{M}_\mathrm{E}$, $\mathbf{f}_\mathrm{int}$, $\mathbf{Q}_\mathrm{E}$, mediante ensamblaje de las matrices elementales $\mathbf{M}_\mathrm{E}^e$, $\mathbf{f}_\mathrm{int}^e$, $\mathbf{Q}_\mathrm{E}^e$. Adicionalmente, se obtiene un vector de fuerzas de las restricciones $\mathbf{f}_{\Phi_\mathrm{E}}$ de forma similar al calculado antes para los cuerpos rígidos, $\mathbf{f}_{\Phi_\mathrm{R}}$.

3.4. Sistema Multicuerpo Flexible

Para un sistema multicuerpo formado tanto por cuerpos rígidos ($\mathcal{B}_{\mathrm{R}}$) como flexibles ($\mathcal{B}_{\mathrm{E}}$), estos últimos discretizados mediante elementos finitos, la forma débil de la ecuación dinámica con el método de penalización puede expresarse como:

$$\begin{aligned} G^h(\boldsymbol{q}_{\mathrm{E}}, \boldsymbol{q}_{\mathrm{R}})[\delta\boldsymbol{q}_{\mathrm{E}}, \delta\boldsymbol{q}_{\mathrm{R}}] = {} & \delta\boldsymbol{q}_{\mathrm{R}} \cdot (\mathbf{M}_{\mathrm{R}} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{R}}) + \delta\boldsymbol{q}_{\mathrm{R}} \cdot \big([\mathrm{D}\boldsymbol{\Phi}]^{\mathrm{T}} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Phi})\big) - \delta\boldsymbol{q}_{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{Q}_{\mathrm{R}} \\ & + \delta\boldsymbol{q}_{\mathrm{E}} \cdot (\mathbf{M}_{\mathrm{E}} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{E}}) - \delta\boldsymbol{q}_{\mathrm{E}} \cdot \mathbf{f}_{\mathrm{int}} - \delta\boldsymbol{q}_{\mathrm{E}} \cdot \mathbf{Q}_{\mathrm{E}} = 0, \qquad \forall\delta\boldsymbol{q}_{\mathrm{R}} \in \mathcal{V}^{3m},\ \forall\delta\boldsymbol{q}_{\mathrm{E}} \in \mathcal{V}^{n_h} \end{aligned} \tag{23}$$

Finalmente, definiendo un nuevo vector $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^{3m+n_h}$ que reune los $\boldsymbol{q}_{\mathrm{R}}$ y $\boldsymbol{q}_{\mathrm{E}}$, cuyas variaciones $\delta\boldsymbol{q}$ son arbitrarias, la dinámica del conjunto viene expresada mediante el conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes, escritas en forma matricial particionada:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{M}_{\mathrm{R}} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{M}_{\mathrm{E}} \end{array}\right)}_{\mathbf{M}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} \ddot{\mathbf{q}}_{\mathrm{R}} \\ \hline \ddot{\mathbf{q}}_{\mathrm{E}} \end{array}\right\}}_{\ddot{\boldsymbol{q}}} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c} \mathbf{f}_{\Phi_{\mathrm{R}}} \\ \hline \mathbf{f}_{\Phi_{\mathrm{E}}} \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} \mathbf{f}_{\Phi_{\mathrm{RE1}}} \\ \hline \mathbf{f}_{\Phi_{\mathrm{RE2}}} \end{array}\right\}}_{\mathbf{f}_{\Phi}} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{f}_{\mathrm{int}} \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} \mathbf{Q}_{\mathrm{R}} \\ \hline \mathbf{Q}_{E} \end{array}\right\}}_{\mathbf{Q}} \tag{24}$$

donde los términos $\mathbf{f}_{\Phi_{\mathrm{RE}i}}$ corresponden a las restricciones que acoplan los subsistemas rígido y flexible entre sí.

Debe hacerse notar que en la expresión anterior la matriz de masa global $\mathbf{M}$ será siempre constante, debido a la elección hecha de coordenadas cartesianas inerciales tanto para los cuerpos rígidos como flexibles. El vector de fuerzas aplicadas, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, proviene tanto de las fuerzas externas como de las internas (cargas aplicadas, fuerzas internas de los cuerpos elásticos, resortes o amortiguadores discretos, etc.).

El uso de la técnica de penalización para imponer las restricciones conduce a tres ventajas claves, en relación con el método de los multiplicadores de Lagrange:

1. La dinámica queda expresada mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (24), en lugar de un sistema algebraico-diferencial;
2. La dimensión del problema no aumenta con variables adicionales como pueden ser los multiplicadores de Lagrange: la única incógnita es el vector de coordenadas $\boldsymbol{q}$;
3. Las fuerzas de restricción derivan de un potencial cuadrático, $V_\Phi = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi}\cdot(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\Phi})$, lo que es un ingrediente esencial para aplicar el método energía-momento que se explicará más abajo.

Si a ecuación (24) se reordena de forma que todos los términos que provienen de un potencial se recolectan en un único vector, $\mathbf{Q}^C = -\mathrm{D}V(\boldsymbol{q})$, y los términos no conservativos se incluyen en $\mathbf{Q}^{NC}$, puede expresarse de forma compacta como:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} = -\mathrm{D}V(\boldsymbol{q}) + \mathbf{Q}^{NC}, \qquad \text{con } V = V^* + V_\Phi + \Pi^h, \tag{25}$$

siendo $\Pi^h = \Pi^h(\boldsymbol{q})$ la aproximación discreta de la energía elástica de los cuerpos deformables (suponiendo comportamiento hiperelástico), V_Φ el potencial de las restricciones y V^* el potencial de otras posibles fuerzas conservativas, como por ejemplo la gravedad.

4. RESTRICCIONES Y CONTACTOS

4.1. Pares mecánicos estándar

Para representar mecanismos generales o sistemas multicuerpo reales es preciso modelizar los diversos tipos de juntas o pares mecánicos. Estos se pueden representar como combinaciones a partir de una *librería de restricciones básicas:*

(a) distancia constante entre dos puntos;
(b) vector de posición relativa constante entre dos puntos (como caso particular, distancia nula);
(c) alineamiento de tres puntos;
(d) ángulo constante entre dos direcciones definidas por cuatro puntos;
(e) punto contenido en un plano definido por otros tres.

Como combinación de éstas, algunas de las ligaduras y pares cinemáticos más comunes se pueden modelizar como sigue:

1. Ligaduras de distancia constante para puntos de cuerpos rígidos: (a)
2. Par esférico: (a).
3. Par de revolución: (b)+(d).
4. Par deslizadera: (c)+(d).
5. Par prismático: (c)+(d)+(d).
6. Apoyo plano: (e).

4.2. Contactos

Los contactos con superficies rígidas pueden ser considerados como ligaduras unilaterales, e impuestos mediante penalización, de forma similar al resto de las restricciones. Los contactos aquí considerados tienen en cuenta superficies rígidas sin rozamiento, tanto para cuerpos rígidos como flexibles. Si la superficie rígida queda definida mediante $\{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3 \,;\, P(\boldsymbol{z}) = 0\}$, con $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, la aplicación del punto más cercano ($\boldsymbol{y}$: $\mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$) y la función de separación ($g : \mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} \longmapsto g(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$) verifican:

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} = g(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{\nu}, \qquad P(\boldsymbol{y}) = 0,$$

siendo $\boldsymbol{\nu}$ la normal unitaria en cada punto. Como ejemplo, si la superficie rígida es plana, definida por $P \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, $\boldsymbol{\nu}$ es constante, y la función de separación viene dada por:

$$g(\boldsymbol{x}) = -\frac{P(\boldsymbol{x})}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

El potencial de penalización para los contactos y la fuerza de penalización resultante vienen dados por:

$$V_c(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} k_c g(\boldsymbol{x})^2; \qquad \boldsymbol{f}_c = -\mathrm{D}V_c = k_c g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\nu},$$

donde k_c es el factor de penalización correspondiente.

5. INTEGRACIÓN TEMPORAL

La expresión (24) constituye, en general, un conjunto de ecuaciones diferenciales altamente no lineales y acopladas. Por otra parte, numéricamente están mal condicionadas debido a los valores altos de los factores de penalización. Estos aspectos caracterizan un conjunto de ecuaciones «stiff», en el que coexisten frecuencias muy distintas en el movimiento global: bajas frecuencias para los movimientos de cuerpo rígido y altas frecuencias para los cuerpos deformables y las restricciones impuestas mediante penalización.

Resulta necesario el uso de métodos implícitos, con objeto de vencer las limitaciones de estabilidad para pasos de tiempo moderadamente grandes. Esto lleva aparejado que en cada uno de los pasos deben realizarse iteraciones hasta alcanzar la convergencia.

Dentro de los métodos posibles para integración temporal, hemos experimentado tanto con métodos multi-paso (Adams-Bashford, Adams-Moulton, HHT) como métodos de paso único, como la regla trapezoidal, y una variación de esta última adquiere especial relevancia en el caso de sistemas no lineales, la regla del punto medio implícita. A su vez, esta última da lugar, mediante una adaptación, al método energía-momento aquí propuesto. En todos los métodos implícitos empleados, las ecuaciones algebraicas discretas se resuelven mediante linealización consistente obteniéndose tasas de convergencia cuadráticas.

5.1. Esquemas de integración en el tiempo

El punto de partida general puede formularse como un sistema Hamiltoniano, con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \mathbf{M} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \qquad \text{(momentos)} \\ T &= \frac{1}{2} \boldsymbol{p} \cdot \left(\mathbf{M}^{-1} \cdot \boldsymbol{p} \right) \qquad \text{(energía cinética)} \\ H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{p} \cdot \left(\mathbf{M}^{-1} \cdot \boldsymbol{p} \right) + V(\boldsymbol{q}) \qquad \text{(función Hamiltoniana)} \end{aligned} \tag{26}$$

La evolución dinámica se describe en el espacio de las fases P, mediante la variable $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \in P \subset \mathbb{R}^{2n}$, resultando el sistema Hamiltoniano $(P, \mathbf{J}, H)$ definido por las ecuaciones canónicas

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \mathbf{J} \cdot \mathrm{D}H(\boldsymbol{z}), \qquad \text{con } \mathbf{J} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array} \right), \tag{27}$$

donde $\mathbf{J}$ un operador hemisimétrico que introduce una estructura simpléctica constante, construido a partir de las matrices nula y unidad de dimensión $n \times n$ respectivamente $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$, Las ecuaciones (27) se pueden desarrollar como

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{p}} = -\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} = -\mathrm{D}V(\boldsymbol{q}), \\ \dot{\boldsymbol{q}} = \dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \boldsymbol{p}. \end{cases} \tag{28}$$

Comprobamos que (28_1) es la misma ecuación (25), bajo la hipótesis de fuerzas conservativas ($\boldsymbol{Q}^{NC} = \mathbf{0}$). La segunda ecuación (28_2) indica únicamente la relación de variables entre momentos y velocidades.

La denominada regla trapezoidal es uno de los algoritmos más empleados en mecánica estructural de sistemas lineales, resultando de la particularización del método β-Newmark con $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{4}$. Realizando una discretización temporal con un paso de tiempo $h = t_{n+1} - t_n$, aplicada a las ecuaciones (28) resultan las expresiones

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_{n+1} - \boldsymbol{p}_n &= -h \frac{1}{2} \left[\mathrm{D}V(\boldsymbol{q}_n) + \mathrm{D}V(\boldsymbol{q}_{n+1}) \right] \\ \boldsymbol{q}_{n+1} - \boldsymbol{q}_n &= h \frac{1}{2} \left(\dot{\boldsymbol{q}}_n + \dot{\boldsymbol{q}}_{n+1} \right) \end{aligned} \tag{29}$$

Para sistemas lineales, la regla trapezoidal es estable y conserva la energía. Sin embargo, para sistemas no lineales no se cumple ninguna de estas dos propiedades. Un esquema alternativo, con un comportamiento generalmente mejor para casos no lineales, es la regla del punto medio implícita, en la cual se sustituye la primera de las ecuaciones del método trapezoidal (29_1) por

$$\boldsymbol{p}_{n+1} - \boldsymbol{p}_n = -h \mathrm{D}V(\boldsymbol{q}_{n+\frac{1}{2}}), \tag{30}$$

donde $\boldsymbol{q}_{n+\frac{1}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\boldsymbol{q}_n + \boldsymbol{q}_{n+1})$. La regla del punto medio implícita resulta en un algoritmo simpléctico cuando se aplica a un sistema Hamiltoniano arbitrario[10]. Sin embargo, tampoco conserva la energía en casos no lineales, pudiendo resultar inestable o bloquearse en determinados sistemas «stiff» [4].

5.2. Método energía-momento

Últimamente se ha prestado bastante atención a los algoritmos que hereden las propiedades básicas de la formulación Hamiltoniana subyacente para los sistemas conservativos, específicamente los integradores *simplécticos* que conservan dicha estructura, o los integradores *conservativos* (también llamados *energía-momento*), que conservan dichas magnitudes en los casos en que éstas sean integrales primeras del movimiento. No es posible diseñar un algoritmo que sea simultáneamente simpléctico y conservativo, por lo que surge la cuestión de cuál de estas dos características es preferible. Algunos trabajos recientes [1, 5] muestran que la conservación de energía y momento es más importante en la práctica para obtener algoritmos robustos en los sistemas «stiff» que surgen en la dinámica no lineal. Los resultados aquí presentados abundan en esta misma línea para los sistemas multicuerpo flexibles que se consideran.

El algoritmo energía-momento aquí expuesto sigue el formalismo propuesto en [5], definiendo una *derivada discreta* para la Hamiltoniana entre dos puntos $(\boldsymbol{z}_n, \boldsymbol{z}_{n+1})$ de la manera siguiente:

$$\mathsf{D}f(\boldsymbol{z}_n, \boldsymbol{z}_{n+1}) = \mathrm{D}f(\boldsymbol{z}_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{f(\boldsymbol{z}_{n+1}) - f(\boldsymbol{z}_n) - \mathrm{D}f(\boldsymbol{z}_{n+\frac{1}{2}}) \cdot (\boldsymbol{z}_{n+1} - \boldsymbol{z}_n)}{\|\boldsymbol{z}_{n+1} - \boldsymbol{z}_n\|^2}(\boldsymbol{z}_{n+1} - \boldsymbol{z}_n), \tag{31}$$

siendo $\boldsymbol{z}_{n+\frac{1}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\boldsymbol{z}_n + \boldsymbol{z}_{n+1})$.

Empleando la derivada discreta en el sistema Hamiltoniano $(P, \mathbf{J}, H)$, obtenemos el sistema Hamiltoniano discreto $(P, \mathbf{J}, \mathsf{D}, H)$, definido por la expresión en diferencias:

$$\boldsymbol{z}_{n+1} - \boldsymbol{z}_n = h\,\mathbf{J} \cdot \mathsf{D}H(\boldsymbol{z}_n, \boldsymbol{z}_{n+1}); \qquad \boldsymbol{z}_n, \boldsymbol{z}_{n+1} \in P. \tag{32}$$

Una propiedad esencial de la derivada discreta (31) es la direccionalidad. En efecto, aplicada al sistema discreto $(P, \mathbf{J}, \mathsf{D}, H)$, se verifica fácilmente que:

$$\mathsf{D}H(\boldsymbol{z}_n, \boldsymbol{z}_{n+1}) \cdot (\boldsymbol{z}_{n+1} - \boldsymbol{z}_n) = H(\boldsymbol{z}_{n+1}) - H(\boldsymbol{z}_n) \tag{33}$$

Las integrales primeras son funciones del movimiento que se conservan, lo que se puede expresar en el sistema Hamiltoniano continuo $(P, \mathbf{J}, H)$ como sigue:

$$0 = \dot{f}(\boldsymbol{z}) = \mathrm{D}f(\boldsymbol{z}) \cdot \dot{\boldsymbol{z}} = \mathrm{D}f(\boldsymbol{z}) \cdot [\mathbf{J} \cdot \mathrm{D}H(\boldsymbol{z})] \tag{34}$$

En un sistema autónomo (es decir, $\partial H/\partial t = 0$), por la hemisimetría de $\mathbf{J}$, se deduce inmediatamente la conservación de la energía total,

$$\dot{H} = \mathrm{D}H(\boldsymbol{z}) \cdot [\mathbf{J} \cdot \mathrm{D}H(\boldsymbol{z})] = 0. \tag{35}$$

Empleando (33), se deduce igualmente que el sistema discreto $(P, \mathbf{J}, \mathsf{D}, H)$ hereda, por construcción, la conservación algorítmica de la energía H:

$$H(\boldsymbol{z}_{n+1}) - H(\boldsymbol{z}_n) = h\mathsf{D}H(\boldsymbol{z}_n, \boldsymbol{z}_{n+1}) \cdot [\mathbf{J} \cdot \mathsf{D}H(\boldsymbol{z}_n, \boldsymbol{z}_{n+1})] = 0. \tag{36}$$

Otras posibles simetrías de los sistemas Hamiltonianos pueden provenir de la conservación de todas o algunas de las componentes de los momentos lineal o cinético respectivamente $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{p})$. Estas simetrías consisten en la invariancia de las magnitudes cinéticas frente a la acción de ciertos grupos. En concreto, la invariancia frente al grupo de traslaciones conduce a la conservación del momento lineal, y la invariancia frente al grupo de rotaciones propias $SO(3)$ la del momento cinético.

En cada caso, la derivada discreta debe construirse según la expresión (31), atendiendo también a la conservación de los invariantes que pueda tener cada sistema concreto. Suponiendo que existe un conjunto $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_i\}$, formado por funciones $\pi_i(\boldsymbol{z})$ a lo sumo cuadráticas, invariantes frente a la acción de un determinado grupo G, admitiremos que se puede obtener una expresión «reducida» de H en función de los mismos:

$$H(\boldsymbol{z}) = \widetilde{H}(\boldsymbol{\pi}). \tag{37}$$

En este caso, la conservación algorítmica de los invariantes π_i se consigue mediante la derivada discreta G-invariante [5], definida como:

$$\mathsf{D}^G H(\boldsymbol{z}_n, \boldsymbol{z}_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{D}\widetilde{H}(\boldsymbol{\pi}_n, \boldsymbol{\pi}_{n+1}) \cdot \mathsf{D}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{z}_{n+\frac{1}{2}}). \tag{38}$$

Esta definición permite la construcción sistemática de los algoritmos conservativos de integración, asegurando la conservación algorítmica de las funciones de momento y energía. Como ejemplo, se desarrolla en lo que sigue en primer lugar el algoritmo para el caso más simple de una fuerza central. A continuación se generaliza el mismo concepto para la formulación conservativa de restricciones que pueden aparecer en un sistema multicuerpo general [15, 16].

5.2.1. Partícula bajo fuerza central

El modelo más simple es el de una partícula de masa m, cuya posición se denota por $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}$, sometida a una fuerza central desde el origen, que proviene de un potencial $V(q)$, siendo $q = \|\boldsymbol{q}\|$. La Hamiltoniana es $H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 + V(q)$, y el sistema puede formularse mediante las siguientes funciones cuadráticas, invariantes frente a la acción de las rotaciones $SO(3)$:

$$\pi_1 = \boldsymbol{q}^2; \quad \pi_2 = \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}; \quad \pi_3 = \boldsymbol{p}^2, \tag{39}$$

La expresión de la Hamiltoniana reducida es $\widetilde{H} = \frac{1}{2m}\pi_3 + \widetilde{V}(\pi_1)$. El desarrollo de la derivada discreta G-invariante (38) resulta en la expresión

$$\mathsf{D}^G H(\boldsymbol{z}_n, \boldsymbol{z}_{n+1}) = \frac{1}{m}\left\{\frac{\boldsymbol{0}}{\boldsymbol{p}_{n+\frac{1}{2}}}\right\} + \frac{V_{n+1} - V_n}{q_{n+1}^2 - q_n^2} 2 \left\{\frac{\boldsymbol{q}_{n+\frac{1}{2}}}{\boldsymbol{0}}\right\} \tag{40}$$

Como resultado de aplicar esta derivada discreta en (32), se obtiene el algoritmo:

$$\begin{aligned} m(\dot{\boldsymbol{q}}_{n+1} - \dot{\boldsymbol{q}}_n) &= -h\frac{V_{n+1} - V_n}{q_{n+1} - q_n}\frac{\boldsymbol{q}_{n+\frac{1}{2}}}{\overline{q}_{n+\frac{1}{2}}}, \\ \boldsymbol{q}_{n+1} - \boldsymbol{q}_n &= h\frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{q}}_n + \dot{\boldsymbol{q}}_{n+1}\right) \end{aligned} \tag{41}$$

donde se define

$$\overline{(\cdot)}_{n+\frac{1}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left[(\cdot)_n + (\cdot)_{n+1}\right], \tag{42}$$

debiendo notarse que, en general, resulta $\overline{q}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(q_n + q_{n+1}) \neq q_{n+\frac{1}{2}}$. Puede observarse la diferencia que se obtendría respecto a la aplicación de la regla del punto medio (30), que cambiaría la ecuación que define el algoritmo de actualización de momentos (41_1) por:

$$m(\dot{\boldsymbol{q}}_{n+1} - \dot{\boldsymbol{q}}_n) = -h(\mathrm{D}V)_{n+\frac{1}{2}}, \tag{43}$$

siendo $(\mathrm{D}V)_{n+\frac{1}{2}}$ la derivada particularizada en el punto medio.

5.2.2. Restricción de variable escalar

Consideremos un sistema de dos partículas, cuyo vector de coordenadas es $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$. La posición relativa viene dada por $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$, cuyo módulo es $r = \|\boldsymbol{r}\|$. Suponemos una restricción interna definida por la función $\Phi : \mathbb{R} \ni r \longmapsto \Phi(r) \in \mathbb{R}$, cuya energía potencial de penalización asociada es $V_\Phi(r) = \frac{1}{2}\alpha\left[\Phi(r)^2\right]$. Se trata por tanto de una fuerza central, pudiéndose aplicar un desarrollo similar al desarrollado en el apartado anterior, que conduce al algoritmo de actualización de momentos siguiente:

$$\mathbf{M}\cdot(\dot{\boldsymbol{q}}_{n+1} - \dot{\boldsymbol{q}}_n) = -h\,\alpha\frac{\Phi_{n+1}^2 - \Phi_n^2}{r_{n+1}^2 - r_n^2}\left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{r}_{n+\frac{1}{2}} \\ -\boldsymbol{r}_{n+\frac{1}{2}} \end{array}\right\} \tag{44}$$

5.2.3. Restricción de variable vectorial

Otro tipo de restricción más general es la de variable vectorial, que supondremos formulada en general a partir de las coordenadas de N puntos, mediante un vector de coordenadas $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$. La restricción se define mediante una función $\Phi : \mathbb{R}^{3N} \ni \boldsymbol{q} \longmapsto \Phi(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}$. Bajo estos supuestos, la conservación exacta de la energía [16] se consigue mediante el algoritmo de actualización de momentos siguiente:

$$\mathbf{M} \cdot (\dot{\boldsymbol{q}}_{n+1} - \dot{\boldsymbol{q}}_n) = -h\alpha\, \overline{\Phi}_{n+\frac{1}{2}} (\mathrm{D}\Phi)_{n+\frac{1}{2}}, \tag{45}$$

donde $(\mathrm{D}\Phi)_{n+\frac{1}{2}}$ es el gradiente de la restricción Φ evaluado en el punto medio $\boldsymbol{q}_{n+\frac{1}{2}}$, y $\overline{\Phi}_{n+\frac{1}{2}}$ tiene el significado asignado antes (42).

5.2.4. Restricciones de distancia constante (sólido rígido)

Las restricciones de distancia constante entre cada dos puntos de un sólido rígido se encuadran en la categoría de restricciones escalares (apartado 5.2.2). El vector de posición relativa lo denominamos $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)$, siendo su módulo $r = \|\boldsymbol{r}\|$. La restricción se expresa como $\Phi(r) = r - r_0$, siendo r_0 la distancia inicial. Con esta notación, y siguiendo lo expuesto en el apartado 5.2.2, el algoritmo de actualización de momentos que resulta de la derivada discreta es:

$$\mathbf{M} \cdot (\dot{\boldsymbol{q}}_{n+1} - \dot{\boldsymbol{q}}_n) = -h\alpha \left(1 - \frac{r_0}{\overline{r}_{n+\frac{1}{2}}}\right) \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{r}_{n+\frac{1}{2}} \\ -\boldsymbol{r}_{n+\frac{1}{2}} \end{array} \right\}. \tag{46}$$

6. PROGRAMA DE ORDENADOR

Se ha desarrollado un programa de ordenador para la dinámica de sistemas multicuerpo flexibles, que incorpora el método energía-momento descrito, así como otros integradores temporales, mediante técnicas de programación orientada a objetos en C++. Todos los objetos (restricciones, elementos) derivan de una única clase con unas ciertas funciones generales, que pueden tener significados distintos para cada clase derivada. Algunas de estas funciones generales son:

- Cálculo y ensamblaje de la matriz de masas $\mathbf{M}$ (`calc_M, ens_M`). (Aunque las restricciones no tienen masa en los modelos usuales, en este modelo se abre la posibilidad de representar pares con masa asociada.)
- Cálculo y ensamblaje del vector de fuerzas $\mathbf{f}$ (`calc_Fq, ens_Fq`). Para una restricción, $\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}_\Phi$; para un cuerpo elástico $\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}_{\mathrm{int}}$; asimismo se pueden incluir fuerzas de elementos activos o fuerzas aplicadas. Debe recordarse que los cuerpos rígidos definen un vector de fuerzas debido a las ligaduras internas.
- Cálculo y ensamblaje de la matriz de rigidez $\mathbf{K}$ (`calc_K, ens_K`). Se empleará para la definición de la matriz tangente consistente del conjunto en las iteraciones para convergencia del algoritmo implícito. Al igual que antes, debe notarse que los sólidos rígidos introducen componentes de rigidez interna debida a las ligaduras con penalización.

Las clases derivadas son:

- Cuerpos rígidos: `massp, rigidbar, rigidbody` para partículas, barras rígidas 1-D y cuerpos rígidos 3-D.
- Elementos finitos: `truss, barra, brick` para cuerpos elásticos en 1-D, 2-D y 3-D respectivamente.
- Restricciones: `consdis, tie, line3, angle, plane4` son las restricciones básicas mediante las que se pueden definir los pares estándar.

7. APLICACIONES

7.1. Sistema multicuerpo flexible

Se considera un sistema multicuerpo formado por un elipsoide rígido unido a un bloque elástico mediante dos varillas rígidas dispuestas de forma asimétrica. El bloque, de dimensiones $(2 \times 1 \times 0{,}5)$ m, tiene una densidad $\rho = 10$ kg/m^3, y constantes elásticas $E = 10^5$ N/m^2 y $\nu = 0{,}3$. La cara YZ está empotrada. Ambas varillas tienen una masa $m = 1$ kg y están unidas al bloque en su borde inferior de la cara anterior. Una de ellas se encuentra vertical en el instante inicial, con longitud $l = 0{,}8$ m. Los ejes principales del elipsoide son $a = 2$ m, $b = 1$ m y $c = 0{,}5$ m, y su masa total $M = 30$ kg. Inicialmente, todos los cuerpos se encuentran en reposo, con el eje principal más largo del elipsoide alineado con la dirección X, y las varillas en un plano vertical (figura 5). La única fuerza externa durante el movimiento es el peso propio, con $g = 9{,}8$ m/s^2. El bloque se discretiza con 32 elementos paralelepipédicos.

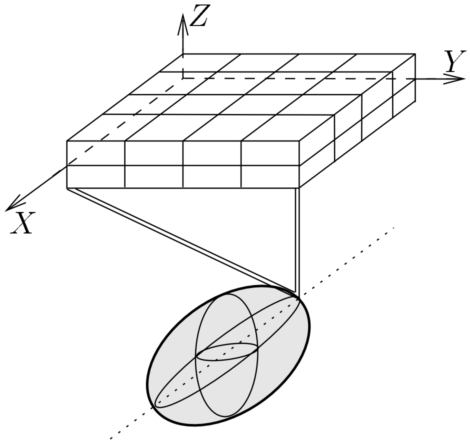

Figura 5: *Sistema multicuerpo rígido-flexible: configuración inicial.*

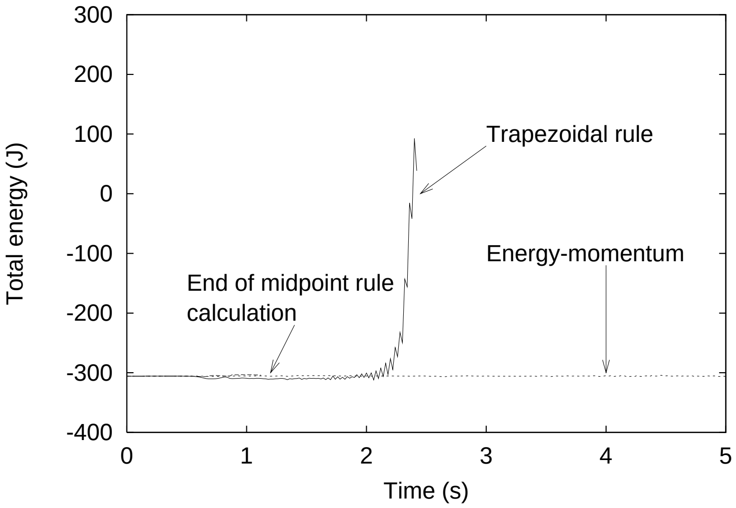

Figura 6: *Sistema multicuerpo rígido-flexible: energía en función del tiempo, $\Delta t = 0{,}02$ s.*

La figura 6 muestra la energía total para tres métodos de integración diferentes, con el paso $\Delta t = 0{,}02$ s. Se comprueba cómo el algoritmo energía-momento muestra una estabilidad excelente, conservando la energía de manera exacta. Las reglas del punto medio y trapezoidal acaban fallando: son incapaces de obtener simulaciones a largo plazo estables con este paso de tiempo. De hecho, en pruebas adicionales se ha verificado que el algoritmo energía-momento se comporta de forma bastante precisa hasta $\Delta t = 0{,}04$ s. En la figura 7 se muestran diversas instantáneas del movimiento.

7.2. Columpio

El asiento del columpio está representado mediante un sólido prismático rígido de dimensiones $(0{,}5 \times 0{,}3 \times 0{,}2)$ y masa $m_b = 10$ kg, unido desde los puntos C y D a dos puntos fijos A y B a través de dos cadenas de longitud $\overline{AC} = \overline{BD} = 1{,}5$ m (figura 8). Cada una de las cadenas está formada por 15 eslabones iguales de longitud $l_e = 0{,}1$ m y masa $m_e = 0{,}5$ kg. Cada eslabón se modeliza mediante una barra rígida unidimensional (sin inercia alrededor del eje longitudinal). Los extremos A, B, C y D de las cadenas están articulados mediante rótulas esféricas, lo mismo que cada eslabón con sus eslabones contiguos.

En el instante inicial, el columpio se encuentra en reposo fuera de la vertical, con el extremo D del asiento situado en el punto de coordenadas $\boldsymbol{x}_D = (1, -0{,}8, -0{,}381)$ m (en el sistema fijo de la Figura 8, que tiene

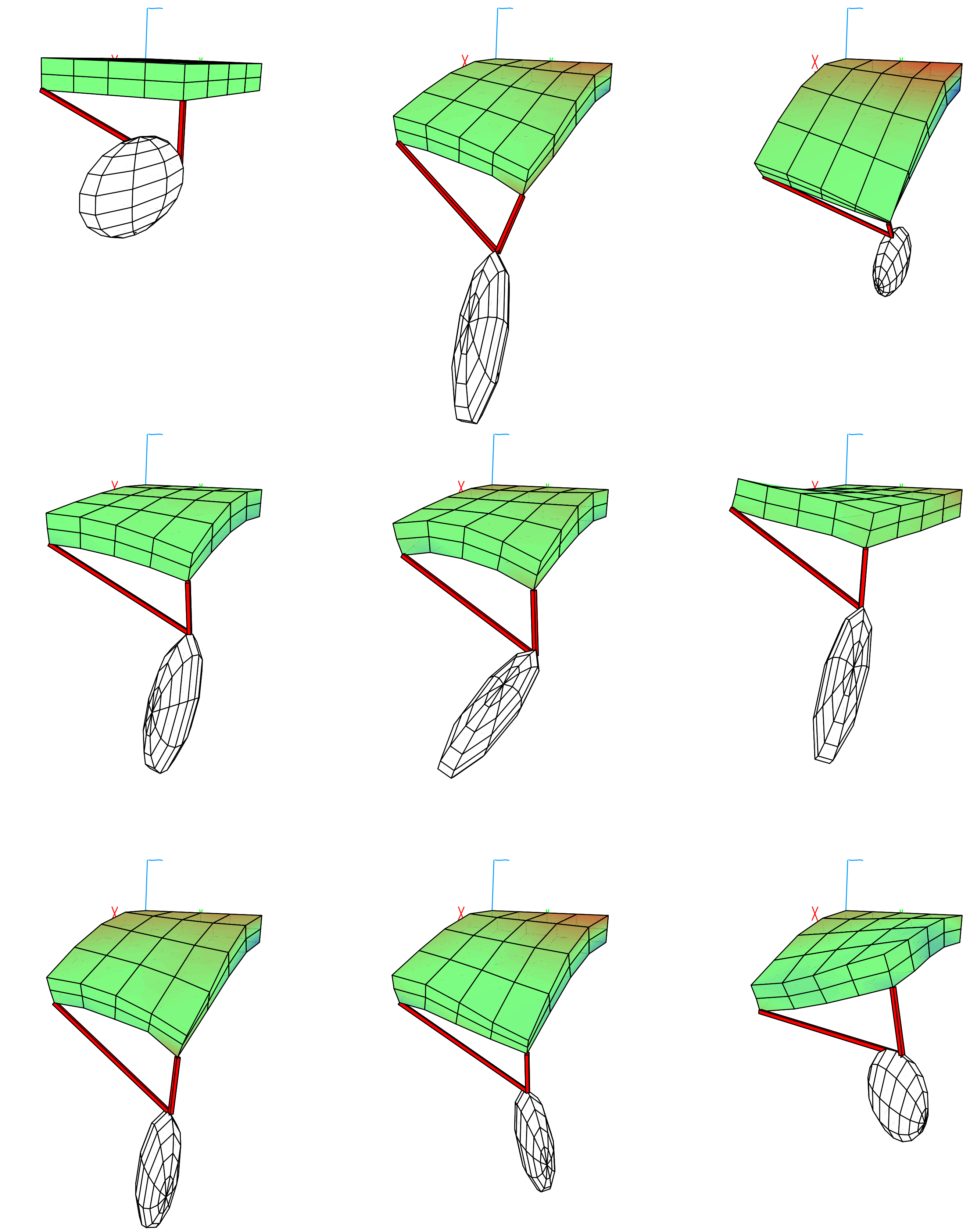

Figura 7: *Movimiento del sistema multicuerpo flexible. Los colores representan distintos valores absolutos de la tensión normal X.*

su origen en el punto medio del segmento $\overline{AB}$). Con esta restricción, en primer lugar se permite al sistema que adopte la correspondiente posición de equilibrio bajo la acción gravitatoria ($g = 9{,}8$ m/s^2). Desde esta posición inicial se suelta, iniciando un movimiento libre bajo la acción de la gravedad.

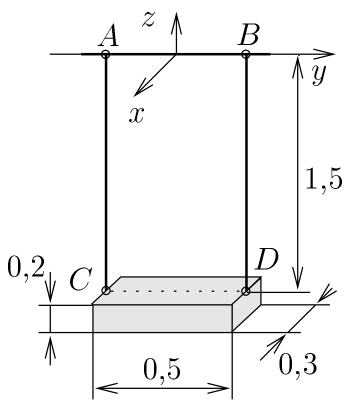

Figura 8: *Columpio: dimensiones generales. (Todas las cotas en m.)*

El movimiento se integra empleando el algoritmo energía-momento con un paso de tiempo $h = 0{,}002$ s durante 10 s. El parámetro de penalización empleado es $\alpha = 10^{10}$. Ensayando otros algoritmos con el mismo paso de tiempo, se ha comprobado que el único método capaz de completar la integración hasta $t = 10$ s es el método HHT con un parámetro $\alpha = -0{,}2$. Los demás tienen problemas de estabilidad en instantes muy cercanos al inicial, que causan la no convergencia. Aún así, la estabilidad del integrador HHT se consigue a expensas de una cierta disipación de energía.

7.3. Vehículo con chasis flexible sobre obstáculos alternados

Se considera un vehículo triciclo, con suspensiones McPherson y chasis deformable. Los detalles sobre dimensiones y distribución de masas pueden encontrarse en [16].

El vehículo se lanza con una velocidad inicial $v_0 = 2$ m/s sobre una serie de obstáculos de sección prismática alternados de forma asimétrica (figuras 10, 11). No se considera fuerza motriz en las ruedas ni rozamiento entre las partes móviles. Se toma un total de cuatro obstáculos iguales, situados de forma que el final de cada escalón del lado izquierdo (según el sentido de la marcha) coincide con el comienzo de un escalón en el lado derecho. La separación entre dos escalones de un mismo lado es 1 m, y el vehículo se sitúa inicialmente con las ruedas traseras a 2 m del primer obstáculo. La Figura 12 muestra dos instantáneas del movimiento, mientras el vehículo avanza sobre los obstáculos.

La integración se lleva a cabo empleando el algoritmo energía-momento con un paso de tiempo $h = 0{,}02$ s, y dos hipótesis distintas de rigidez del chasis, variando el módulo elástico E. La figura 13 muestra la evolución de la altura del punto O (situado en la parte superior del chasis, muy cerca del centro de masas). Se observa que el chasis más rígido recupera la configuración inicial antes que el más flexible. Este fenómeno es debido a que las ondas de tensión viajan más rápido hacia los amortiguadores en el más rígido, siendo los amortiguadores los únicos elementos disipativos del sistema.

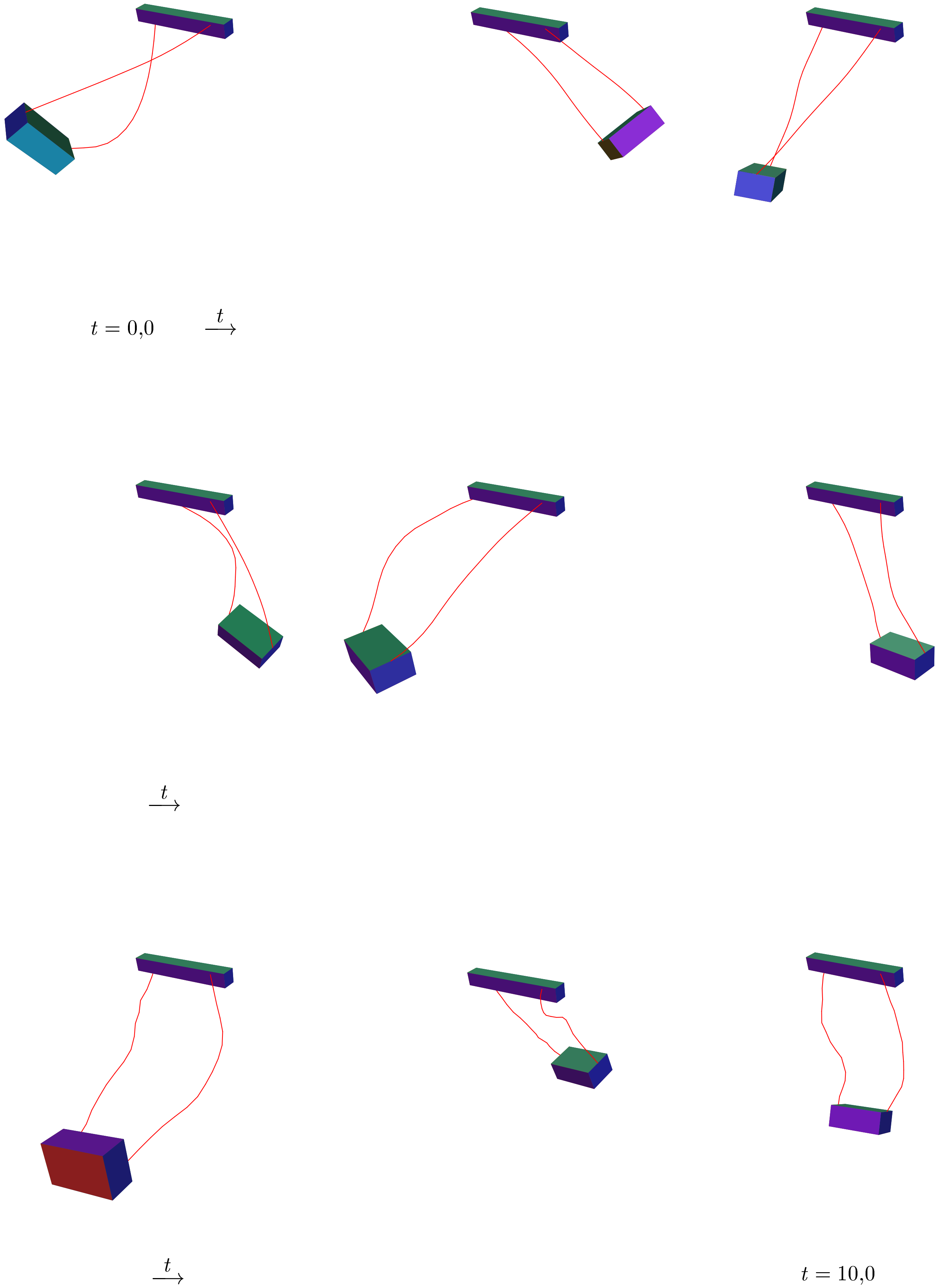

Figura 9: *Columpio: instantáneas del movimiento. (el tiempo transcurre de izquierda a derecha y de arriba a abajo)*

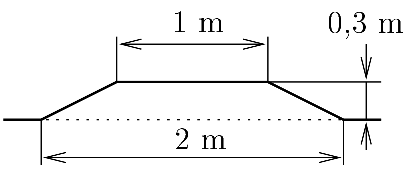

Figura 10: *Obstáculos alternados. Geometría de un obstáculo individual*

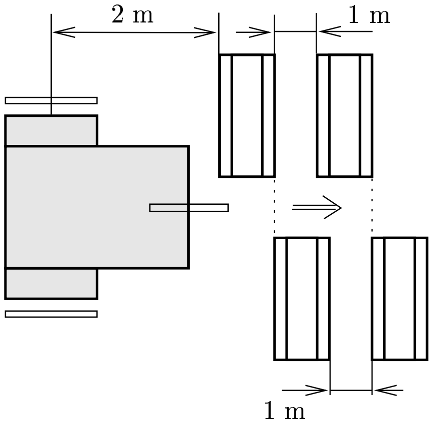

Figura 11: *Obstáculos alternados. Configuración general inicial (no está a escala)*

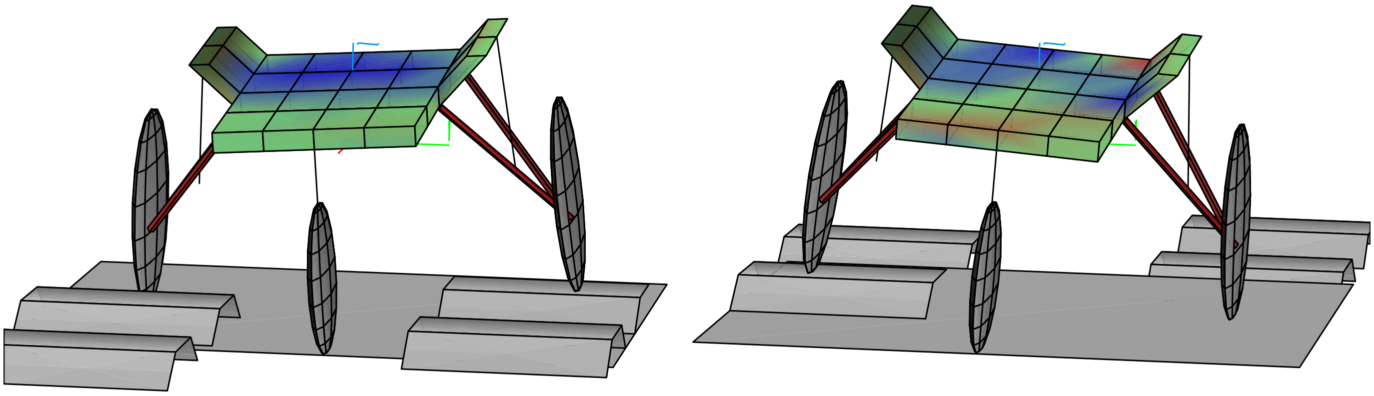

Figura 12: *Obstáculos alternos, $v = 2$ m/s. Instantáneas del movimiento*

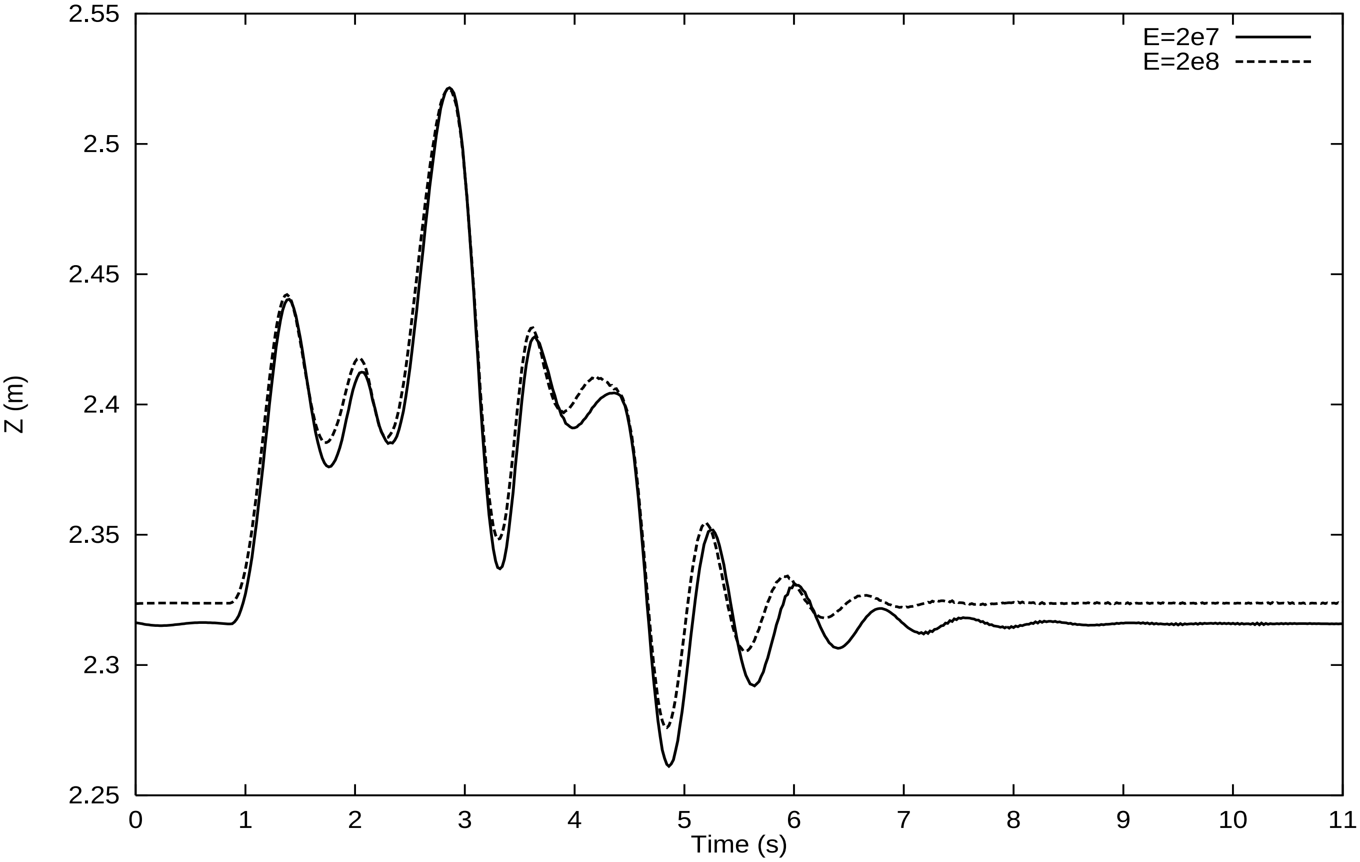

Figura 13: *Obstáculos alternados. Posición vertical del punto central superior del chasis (punto O)*

8. CONCLUSIONES

De lo expuesto en este trabajo, señalamos las siguientes conclusiones generales:

- El empleo de coordenadas inerciales de puntos para definir la configuración del sistema, junto con el método de penalización, ofrece una estructura simple para las ecuaciones dinámicas en sistemas multicuerpo. Es posible incluir bajo el mismo marco tanto los cuerpos rígidos (modelo discreto) como los cuerpos flexibles (modelo continuo discretizado mediante elementos finitos), obteniéndose un conjunto único de ecuaciones diferenciales ordinarias.

- El algoritmo energía-momento, aplicado a la dinámica no lineal de sistemas multicuerpo, es capaz de adoptar pasos de tiempo que abarcan centenas de periodos del modo de vibración más rápido, y mantenerse estable conservando de forma exacta la energía total. Estos pasos de tiempo resultan al menos un orden de magnitud superiores a los necesarios mediante otros integradores como la regla trapezoidal o la regla del punto medio. El método HHT puede adoptar pasos algo más grandes que estos dos últimos, pero sin igualar al energía-momento y además a costa de una importante disipación de energía.

  El método energía-momento, por tanto, supera los problemas tradicionales asociados al empleo del método de penalización, permitiendo una modelización directa y sencilla de sistemas multicuerpo. Además de conservar propiedades físicas esenciales como energía y momento de forma algorítmicamente exacta, se revela como un método extraordinariamente robusto, con un gran potencial para la simulación de mecanismos y sistemas multicuerpo flexibles.

Referencias

[1] Simo, J.C. y Wong, K.K. *Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum* Int. J. Num. Meth. Eng. Vol 31. pp 19-52, 1991.

[2] Simo, J.C. y Tarnow, N. *The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics.* ZAMP, 1992.

[3] Garcia de Jalon, J. y Bayo, E. *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems* Springer-Verlag, 1994

[4] Gonzalez, O. , Simo, J.C. *On the stability of symplectic and energy-momentum algorithms for non-linear Hamiltonian systems with symmetry* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996.

[5] Gonzalez, O. *Design and analysis of conserving integrators for nonlinear Hamiltonian systems with symmetry* Stanford University, Department of mechanical engineering. PhD thesis, 1996.

[6] Armero, F., Petöcz, E.*On the formulation of stable time-stepping algorithms for contact problems* Computational Plasticity. Fundamental and Applications. CIMNE, Barcelona, 1997

[7] Ortiz, M. *A note on energy conservation and stability of nonlinear time-stepping algorithms* Computers & Structures, Vol. 24, No. 1, 1986.

[8] Crisfield, M.A.*Non-linear finite element analysis of solids and structures* Vol.II. Wiley

[9] Laursen, T.A., Chawla, V.*Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems* International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 40. 1997.

[10] Stuart, A.M., Humphries, A.R. *Dynamical systems and numerical analysis* Cambridge, 1996.

[11] Chen, A.J.*Energy-momentum conserving methods fir three dimensional dynamic nonlinear multibody systems.* Stanford University, Department of mechanical engineering. PhD thesis, 1998.

[12] Ferreira, C. *Simulacion dinamica de mecanismos tridimensionales con elementos flexibles* Centro Politecnico Superior de la Universidad de Zaragoza. Tesis doctoral, 1997.

[13] Goicolea, J.M. y García orden, J.C., *Dynamic analysis of rigid and deformable multibody systems with penalty methods and energy-momentum schemes*, accepted for publication in Comp. Meth. In Appl. Mech. and Eng., 1999.

[14] Bathe, K.-J. Finite element procedures. Prentice Hall, 1996

[15] G. Orden, J.C., Goicolea, J.M. *Conserving properties in constrained dynamics of flexible multibody systems* Submitted to Multibody System Dynamics, 1999.

[16] G. Orden, J.C. *Dinámica de sistemas multicuerpo flexibles empleando algoritmos conservativos.* E.T.S.I. Caminos, Madrid. Tesis doctoral, 1999.