

Capítulo 2

Dinámica de la partícula

La *partícula*, o punto material, es la idealización más simple de la mecánica, definiéndose como un punto dotado de masa. Por lo general se puede emplear este modelo cuando las dimensiones de un cuerpo sean lo suficientemente pequeñas como para suponer toda su masa concentrada en un punto.

Sin embargo, el criterio del tamaño pequeño no es siempre suficiente para establecer la validez de esta idealización. El modelo del punto material puede ser inadecuado en algunas situaciones, aunque las dimensiones del cuerpo sean pequeñas. Para ilustrar esta afirmación, supongamos como ejemplo la caída de una bolita pequeña por un plano inclinado bajo dos hipótesis distintas:

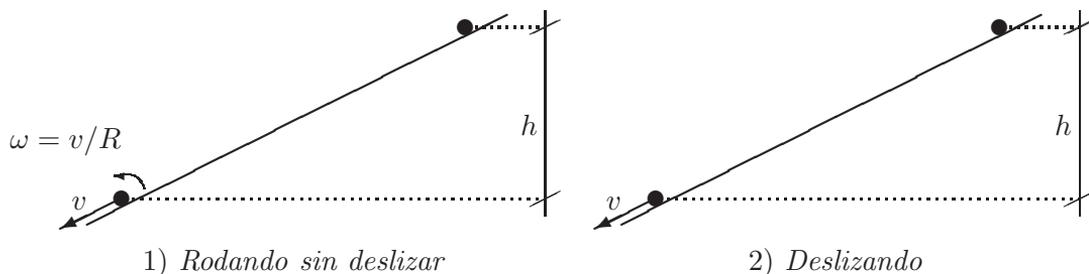


Figura 2.1: Bolita cayendo por un plano inclinado, en las hipótesis de rodadura perfecta o deslizamiento sin rodadura

1) Rodando sin deslizar.— Planteamos la conservación de la energía al bajar una altura h . Para ello se tiene en cuenta la energía cinética correspondiente a una esfera rodando, sumando el término correspondiente

a la traslación del centro de masa, y el de rotación como sólido rígido:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5}mR^2 \left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = 1,195\sqrt{gh}$$

2) Deslizado.— En esta hipótesis sólo hay energía cinética de traslación:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2gh} = 1,414\sqrt{gh}$$

En este segundo caso, que sería el correspondiente a la idealización como partícula, la velocidad de caída resulta ser un 18,32 % mayor. Esta diferencia se manifiesta *independientemente del tamaño de la bolita*, por pequeña que ésta sea. Baste este ejemplo para hacer notar que el concepto de partícula es una idealización, no necesariamente válida en todos los casos aunque el cuerpo sea pequeño.

Sin embargo, el modelo del punto material es una idealización sumamente útil, ya que en muchos casos se pueden estudiar independientemente el movimiento de traslación de un cuerpo (traslación del centro de masas), y el movimiento de rotación del mismo (alrededor del centro de masas). También es útil para aplicar los métodos de la mecánica a partes elementales de sistemas mayores (partículas de un sistema, elementos diferenciales de volumen en un medio continuo, etc.). Así, en este capítulo se exponen los teoremas generales y se desarrollan los métodos de cálculo que más tarde se generalizarán a sistemas de varias partículas.

2.1. Principios y teoremas generales

2.1.1. Cantidad de movimiento

Se llama *cantidad de movimiento*¹ de una partícula a

$$\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\mathbf{v}.$$

¹En Inglés se emplea el término «linear momentum» o simplemente «momentum», por lo que algunos autores emplean el término *momento lineal* (traducción literal del inglés) en lugar de *cantidad de movimiento*.

El principio de la cantidad de movimiento se deduce como consecuencia directa de la segunda ley de Newton (apto 1.4):

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{p}}. \quad (2.1)$$

En el caso usual de que la masa de la partícula no varíe², se obtiene la expresión clásica de la ley fundamental de la dinámica (1.2), *Fuerza = masa × aceleración*:

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}}}. \quad (2.2)$$

Conviene recordar que, en esta expresión, \mathbf{F} representa la resultante de todas las fuerzas aplicadas sobre la partícula. Se deben incluir, mediante suma vectorial, tanto las fuerzas activas como las reacciones de apoyo o reacciones del medio.

Cuando la fuerza total se anula, se obtiene el correspondiente teorema de conservación:

$$\boxed{\text{si } \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p} = \text{cte.}} \quad (2.3)$$

Por lo tanto, el movimiento de una partícula aislada es tal que se conserva su cantidad de movimiento; es decir, su velocidad se mantiene constante, describiendo un movimiento rectilíneo uniforme.

2.1.2. Momento cinético

Sea una partícula m , dotada de una velocidad \mathbf{v} y situada en un punto P . El *momento cinético*³ respecto a un punto fijo O , \mathbf{H}_O ⁴, se define como el momento de la cantidad de movimiento respecto a dicho punto. Tomando O como origen del sistema de referencia (inercial) $Oxyz$,

$$\mathbf{H}_O \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v};$$

derivando respecto del tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{H}_O}{dt} &= \dot{\mathbf{r}} \wedge m\mathbf{v} + \mathbf{r} \wedge m\dot{\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{0} + \underbrace{\mathbf{r} \wedge \mathbf{F}}_{\mathbf{M}_O} \end{aligned}$$

²Estrictamente hablando, la masa de una partícula es siempre invariable; al hablar de casos en los que m sea variable, nos referimos a cuerpos que pierdan o ganen partículas de masa (ver capítulo 6.6).

³En las traducciones literales de la terminología anglosajona se emplea el término *momento angular*.

⁴Otros autores emplean notaciones distintas para referirse al momento cinético: \mathbf{OK} (M. Roy, Fernández Palacios), \mathbf{L}_O (Marion, Goldstein, Griffiths)

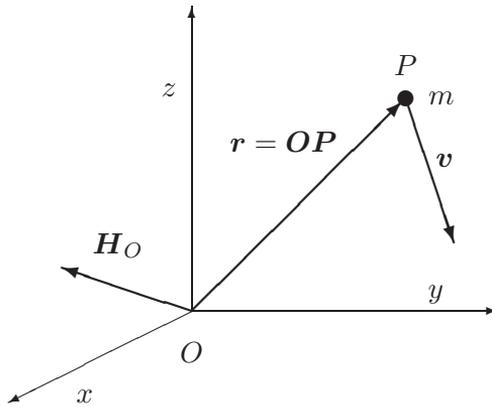


Figura 2.2: *Momento cinético de una partícula respecto al punto O.*

siendo $\mathbf{M}_O \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$ el momento de la fuerza \mathbf{F} respecto a O . Resulta por tanto la ecuación:

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \frac{d\mathbf{H}_O}{dt}.} \quad (2.4)$$

El correspondiente teorema de conservación que se deduce de (2.4) es:

$$\boxed{\text{si } \mathbf{M}_O = \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}_O = \text{cte.}} \quad (2.5)$$

Esta conservación se verificará en el caso de la partícula aislada, y también en el caso de fuerzas centrales que se describe más abajo.

Momento áxico.—

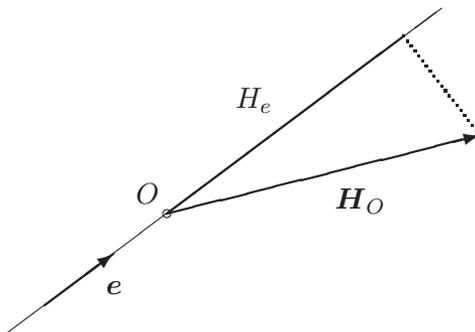


Figura 2.3: *Momento áxico respecto a un eje (O, e)*

Sea un eje de dirección fija e , pasando por el punto O . Se define como momento áxico respecto de este eje la proyección del momento cinético

respecto de un punto cualquiera del eje sobre la dirección del mismo. Empleando la notación

$$M_e \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}, \quad H_e \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{e},$$

multiplicando escalarmente ambos miembros de (2.4) por \mathbf{e} se deduce directamente la igualdad:

$$M_e = \frac{dH_e}{dt}.$$

Esta fórmula se puede aplicar entre otros casos al movimiento plano de rotación alrededor de un eje fijo.

Fuerzas centrales.—

Se denominan centrales a las fuerzas que pasan constantemente por un punto dado, «centro» de las fuerzas. Es evidente que respecto de este punto el momento de las fuerzas es nulo, por lo que aplicando (2.5) se deduce que el momento cinético se conserva:

$$\mathbf{H}_O = \text{cte.}$$

Se obtienen inmediatamente 2 características importantes del movimiento:

1. La *trayectoria es plana*;
ya que al ser $\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v}$, \mathbf{r} es constantemente perpendicular a una dirección \mathbf{H}_O fija, definiendo por tanto un plano.
2. La *velocidad areolar es constante*;
puesto que el área barrida por unidad de tiempo (figura 2.4) es:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\frac{1}{2}|\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}|}{dt} = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}| = \frac{1}{2m}|\mathbf{H}_O| \quad \text{cte.}$$

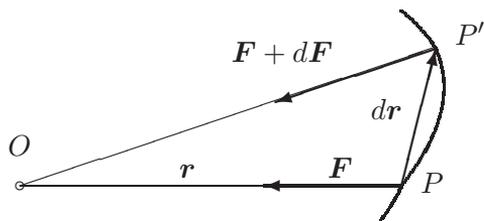


Figura 2.4: Fuerzas centrales, dirigidas hacia un centro de fuerzas O . El área barrida en el intervalo infinitesimal dt es $dS = OPP' = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}|$.

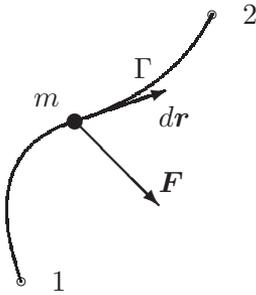


Figura 2.5: Trabajo realizado por \mathbf{F} al recorrer la curva Γ entre 1 y 2.

2.1.3. Energía cinética

Sea una partícula de masa m , que se mueve según una trayectoria Γ , bajo la acción de fuerzas con resultante \mathbf{F} (recordemos que ésta incluye todas las fuerzas, activas y pasivas). El trabajo elemental realizado por \mathbf{F} en un desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{r}$ se define por el producto escalar siguiente⁵

$$dW \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r};$$

considerando que $\mathbf{F} = m \, d\mathbf{v}/dt$ y $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$,

$$dW = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \quad (2.6)$$

El trabajo realizado al recorrer Γ entre los dos puntos extremos 1 y 2 resulta de la integral curvilínea:

$$W_{12} = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv^2 \Big|_1^2.$$

Se define como energía cinética T de la partícula:

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2;$$

así, la expresión anterior equivale a

$$\boxed{W_{12} = T_2 - T_1} \quad (2.7)$$

Podemos enunciar entonces:

‘El trabajo realizado por la resultante de las fuerzas sobre una partícula es igual al incremento de su energía cinética.’

Este resultado se suele llamar también el *teorema de las fuerzas vivas*.

⁵La notación empleada, « dW », no indica aquí una diferencial exacta de una determinada función W , sino únicamente un incremento infinitesimal de trabajo producido por \mathbf{F} a lo largo de $d\mathbf{r}$. Tan sólo resulta ser una diferencial exacta cuando las fuerzas son conservativas.

Caso de fuerzas conservativas.—

Se denomina campo de fuerzas conservativas aquél en el que el trabajo realizado por la fuerza, para recorrer el camino entre dos puntos dados, es independiente de la trayectoria seguida Γ para ir de uno al otro. Así para distintos caminos $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ que tengan en común el origen (1) y el final (2),

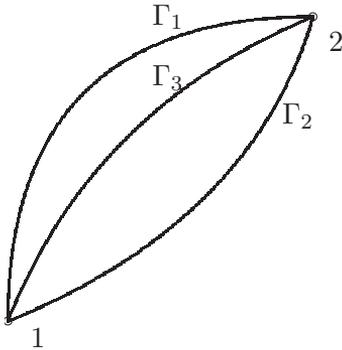


Figura 2.6: Trayectorias distintas en un campo conservativo para ir de 1 a 2.

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Es fácil ver que esta condición es equivalente a que el trabajo realizado para recorrer cualquier trayectoria cerrada sea nulo. En efecto, sea una curva cerrada cualquiera Γ , a la que pertenecen los puntos 1 y 2. Ésta puede descomponerse en dos curvas abiertas con extremos en 1 y 2: $\Gamma = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^-$, teniendo Γ_1^+ el sentido de 1 a 2 y Γ_2^- el sentido de 2 a 1. La integral curvilínea sobre Γ es pues

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\Gamma_2^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (2.8)$$

como queríamos demostrar.

No son conservativas las fuerzas debidas a resistencias pasivas, como el rozamiento o las fuerzas de tipo viscoso. En éstas el integrando ($\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$) es siempre negativo, puesto que la fuerza de resistencia (\mathbf{F}) se opone al movimiento ($d\mathbf{r}$), por lo que la integral (2.8) no se puede anular nunca. Se produce necesariamente una disipación de energía, no pudiendo recobrase el nivel energético inicial después de un trayecto cerrado.

Un teorema básico del cálculo vectorial establece que la condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial \mathbf{F} tenga circulación nula para cualquier curva cerrada es que sea un campo de gradientes. Recordemos en

primer lugar la definición de gradiente de un campo escalar; en un sistema de coordenadas cartesianas ortonormal con versores $\{\mathbf{e}_i\} \equiv \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ la expresión es⁶

$$\mathbf{grad} V \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k}$$

La afirmación anterior quiere decir que existirá un campo escalar $V(\mathbf{r})$, función de la posición, tal que:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad} V.$$

Al campo escalar V se le denomina potencial de las fuerzas, energía potencial, o simplemente *potencial*.

Una tercera forma de caracterizar un campo \mathbf{F} como conservativo, admitiendo las exigencias adicionales de que \mathbf{F} tenga derivada continua y que el dominio sea simplemente conexo, es que sea irrotacional. Esta condición es equivalente a su vez a las dos anteriores. Recordemos la definición de rotacional de un campo vectorial⁷:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Por lo que la condición para que el campo \mathbf{F} sea conservativo es

$$\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

En este caso, la función potencial $V(\mathbf{r})$ de la que proviene \mathbf{F} debe ser al menos C^2 .

Al expresarse \mathbf{F} como un gradiente, el trabajo elemental resulta ser una diferencial exacta:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{grad} V \cdot d\mathbf{r} = -dV$$

⁶En cuanto a notación, emplearemos indistintamente los índices o los «nombres propios» de vectores ($\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1$, $\mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2$, $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$) y coordenadas ($x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$, $z \equiv x_3$). Asimismo, a veces emplearemos también notaciones alternativas para el gradiente, $\mathbf{grad} V = dV/d\mathbf{r} = \nabla V$, empleando el operador $\nabla = \sum_{i=1}^3 \partial/\partial x_i \mathbf{e}_i = \partial/\partial x \mathbf{i} + \partial/\partial y \mathbf{j} + \partial/\partial z \mathbf{k}$.

⁷Empleando el operador ∇ , el rotacional se puede expresar también mediante la notación $\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F}$.

Si integramos para obtener el trabajo realizado entre dos puntos 1 y 2, y empleando el principio de la energía cinética (2.7):

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V_1 - V_2 \\ &= T_2 - T_1, \end{aligned}$$

es decir, se conserva la suma de la energía cinética más la potencial:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2.$$

o bien, definiendo como *energía total*⁸ a la suma de energía cinética y potencial,

$$E \stackrel{\text{def}}{=} T + V,$$

se obtiene la siguiente expresión para el teorema de conservación de la energía:

$$\boxed{\text{si } \mathbf{F} = -\mathbf{grad} V \text{ (conservativa), } E = T + V = \text{cte.}} \quad (2.10)$$

En lo anterior se ha supuesto que el potencial $V(\mathbf{r})$ es constante. Pudiera darse el caso de que \mathbf{F} provenga de una función potencial no constante, es decir que dependa explícitamente del tiempo, $V(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}, \quad \text{con} \quad \frac{\partial V}{\partial t} \neq 0.$$

En este caso, no se conservaría la energía total E , puesto que el trabajo elemental ya no sería una diferencial exacta del potencial:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial V}{\partial t} dt, \\ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \neq -dV. \end{aligned}$$

Estaríamos, pues, ante un campo de fuerzas no conservativas a pesar de que provengan de un potencial.

Integración de la ecuación fundamental de la dinámica.— Parte de lo expuesto arriba se puede interpretar como distintos procedimientos de integración de la ecuación fundamental de la dinámica (2.2). Señalemos tres procedimientos generales para ello, que permiten obtener los teoremas de conservación (2.3), (2.5) y (2.10) como casos particulares.

⁸Se sobreentiende que ésta es únicamente la energía mecánica, excluyendo a otros tipos de energía como la calorífica, química, ...

a) Integración directa en el tiempo.— Integrando entre dos instantes t_1 y t_2 ,

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\mathbf{r}} dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p}|_1^2$$

se obtiene la ecuación del balance de la cantidad de movimiento,

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{p}|_1^2.}$$

Como caso particular de esta ecuación de balance se desprende el teorema de conservación de la cantidad de movimiento (2.3)

b) Integración directa según la trayectoria.— Realizando ahora la integral curvilínea entre dos puntos de la trayectoria \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 ,

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 m\ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv^2\Big|_1^2$$

de donde se obtiene la ecuación del balance de la energía,

$$\boxed{\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv^2\Big|_1^2.}$$

Análogamente, para el caso de fuerzas conservativas ($\mathbf{F} = -\text{grad}V$), se desprende el teorema de conservación (2.10).

c) Integración del momento en el tiempo.— Integrando el momento de \mathbf{F} entre dos instantes t_1 y t_2 ,

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r} \wedge m\ddot{\mathbf{r}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \underbrace{(\mathbf{r} \wedge m\dot{\mathbf{r}})}_{\mathbf{H}_O} dt = \mathbf{H}_O|_1^2$$

se obtiene la ecuación del balance del momento cinético,

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} dt = \mathbf{H}_O|_1^2.}$$

Si las fuerzas son centrales o se trata de una partícula aislada, análogamente a los dos casos anteriores se desprende el teorema de conservación (2.5).

2.2. Expresiones de velocidad y aceleración

Antes de proseguir en la aplicación de los principios y teoremas generales expuestos para ejemplos concretos de dinámica de la partícula, conviene detenerse en el desarrollo de las expresiones de la velocidad y aceleración que habrán de emplearse.

Según las características geométricas de cada problema, será conveniente en cada caso escoger uno u otro sistema de coordenadas. La elección obvia en el caso más general será un sistema de coordenadas cartesianas ortonormal; sin embargo en ocasiones es ventajoso emplear otras coordenadas, como las coordenadas cilíndricas (o polares en el caso plano), esféricas, o el triedro intrínseco a la trayectoria.

En cada uno de estos casos, el aspecto que nos ocupa es obtener las componentes de los vectores velocidad, $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$ y aceleración, $\ddot{\mathbf{r}} = d^2\mathbf{r}/dt^2$.

2.2.1. Coordenadas cartesianas.

El triedro $Oxyz$ está asociado a los versores $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ según cada dirección coordenada (figura 2.7). Puesto que los versores del triedro son constantes, para obtener la velocidad y aceleración basta derivar directamente las coordenadas:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$$

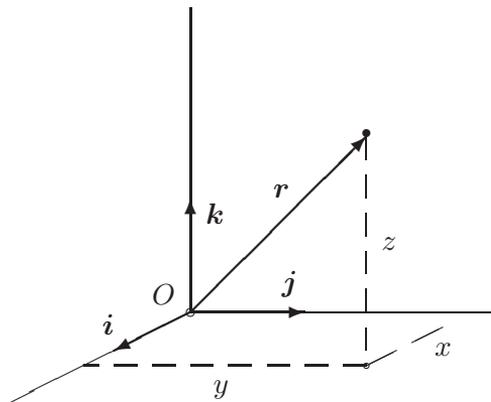


Figura 2.7: *Coordenadas cartesianas*

2.2.2. Coordenadas cilíndricas y polares.

En este caso, las coordenadas que definen la posición son (ρ, θ, z) , siendo ρ la distancia desde un punto fijo O , θ el ángulo que forma la proyección del radio vector sobre un plano fijo con una dirección dada del mismo, y z la altura del punto sobre dicho plano (figura 2.8).

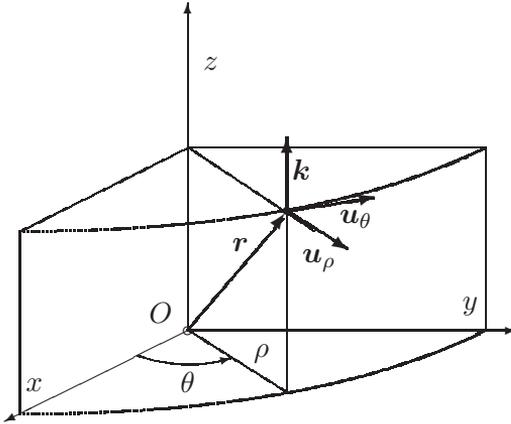


Figura 2.8: *Coordenadas cilíndricas*

El triedro de vectores unitarios asociado (o base física) es $(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k})$. El versor \mathbf{u}_ρ queda definido como un vector unitario en la dirección de la proyección de \mathbf{r} sobre el plano; \mathbf{k} es el versor perpendicular al mismo, y \mathbf{u}_θ es perpendicular a los dos anteriores. En este triedro tanto \mathbf{u}_ρ como \mathbf{u}_θ varían de punto a punto, constituyendo un sistema de coordenadas *curvilíneas*.

La posición de un punto queda definida mediante

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{u}_\rho + z \mathbf{k} \quad (2.11)$$

expresión que engloba también a las coordenadas polares para el movimiento plano, sin más que hacer $z = 0$.

Es inmediato establecer las relaciones con las coordenadas cartesianas, tomando el plano de referencia Oxy de forma que se comparte la coordenada z :

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

Mientras que entre los versores de ambos triedros la relación es

$$\mathbf{u}_\rho = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

Derivando estas expresiones respecto del tiempo se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_\rho &= -\dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \mathbf{i} + \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{j} \\ &= \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \\ \dot{\mathbf{u}}_\theta &= -\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{i} - \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} \\ &= -\dot{\theta} \mathbf{u}_\rho \\ \dot{\mathbf{k}} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Empleando estas igualdades y derivando el vector posición (2.11) se obtiene la velocidad,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \mathbf{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + \dot{z} \mathbf{k};$$

repitiendo la operación, se obtiene la aceleración:

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \mathbf{u}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \mathbf{u}_\theta + \ddot{z} \mathbf{k}.$$

2.2.3. Coordenadas esféricas.

La posición de un punto queda ahora referida a las dos coordenadas angulares en una esfera de radio r : la longitud φ y la latitud θ (figura 2.9).

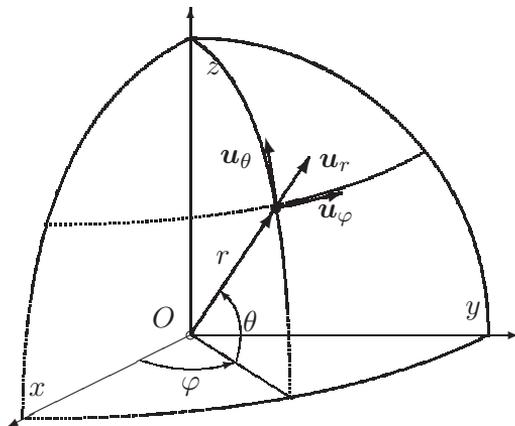


Figura 2.9: *Coordenadas esféricas*

El triedro físico es ahora $(\mathbf{u}_\varphi, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_r)$. La línea coordenada de longitud φ constante define el meridiano, al cual es tangente el vector \mathbf{u}_θ . Asimismo la línea de latitud θ constante define un paralelo, al cual es tangente el vector \mathbf{u}_φ . Por último, el vector \mathbf{u}_r lleva la dirección y sentido del radio vector \mathbf{r} .

Proyectando sobre las direcciones del triedro cartesiano se obtienen las relaciones con los versores del mismo:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_r &= \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \sin \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{u}_\theta &= -\sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} - \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{u}_\varphi &= \mathbf{u}_\theta \wedge \mathbf{u}_r = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}\end{aligned}$$

En este caso los tres versores son variables, función del punto. Para obtener sus derivadas temporales, expresaremos primero sus derivadas parciales respecto de las coordenadas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial r} &= \mathbf{0}; & \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \theta} &= \mathbf{u}_\theta; & \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \varphi} &= \cos \theta \mathbf{u}_\varphi \\ \frac{\partial \mathbf{u}_\theta}{\partial r} &= \mathbf{0}; & \frac{\partial \mathbf{u}_\theta}{\partial \theta} &= -\mathbf{u}_r; & \frac{\partial \mathbf{u}_\theta}{\partial \varphi} &= -\sin \theta \mathbf{u}_\varphi \\ \frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial r} &= \mathbf{0}; & \frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial \theta} &= \mathbf{0}; & \frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial \varphi} &= \sin \theta \mathbf{u}_\theta - \cos \theta \mathbf{u}_r\end{aligned}$$

Empleando estas relaciones, se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_r &= \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \\ &= \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{u}_\varphi \\ \dot{\mathbf{u}}_\theta &= -\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{u}_\varphi - \dot{\theta} \mathbf{u}_r \\ \dot{\mathbf{u}}_\varphi &= \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{u}_\theta - \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{u}_r\end{aligned}$$

Por último, utilizamos estas expresiones en las derivadas temporales de \mathbf{r} , para obtener:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + r \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{u}_\varphi \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta - r \dot{\theta}^2) \mathbf{u}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + r \ddot{\theta}) \mathbf{u}_\theta \\ &\quad + (2\dot{r} \dot{\varphi} \cos \theta - 2r \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \theta + r \ddot{\varphi} \cos \theta) \mathbf{u}_\varphi\end{aligned}$$

2.2.4. Triedro intrínseco

La propia curva definida por la trayectoria dinámica, $\mathbf{r}(t)$, permite definir un triedro denominado «*intrínseco*», que a menudo resulta de gran utilidad para describir el movimiento. Se resumen aquí algunas definiciones y propiedades fundamentales de dicho triedro. Para un mayor detalle puede consultarse algún texto de geometría diferencial⁹.

⁹D.J. Struik: *Geometría Diferencial Clásica*, Aguilar 1973; J.A. Fernández Palacios: *Mecánica Teórica de los Sistemas de Sólidos Rígidos*, (Anejo 1A), 1989.

Vectores y planos del triedro.— Los versores que constituyen el triedro intrínseco están definidos por la trayectoria misma. Ésta puede considerarse parametrizada bien por el tiempo ($\mathbf{r}(t)$, con derivada $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$), bien por la longitud del arco de curva s , sabiendo que $ds = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}$. El sentido positivo del arco coincide con el avance real sobre la curva a lo largo del tiempo.

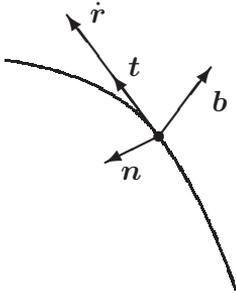


Figura 2.10: *Vectores del triedro intrínseco*

- *tangente* $\mathbf{t} \stackrel{\text{def}}{=} d\mathbf{r}/ds$, vector unitario con igual dirección y sentido que la velocidad $\dot{\mathbf{r}}$.
- *normal principal* \mathbf{n} , vector unitario normal a la curva ($d\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0$), y perteneciente al plano osculador (plano definido por dos tangentes sucesivas a la curva, \mathbf{t} y $\mathbf{t} + d\mathbf{t}$). Su dirección y sentido lo tomaremos por tanto según $d\mathbf{t}$, es decir, hacia el lado cóncavo de la misma.
- *binormal* $\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$, perpendicular por tanto a la curva ($d\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = 0$), y también a la normal principal ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0$).

Los versores \mathbf{n} y \mathbf{b} definen el plano normal, cualquier recta contenida en este plano es normal a la curva. Por otra parte, el plano osculador queda definido por (\mathbf{t}, \mathbf{n}) , siendo la binormal perpendicular al mismo.

Fórmulas de Frenet.— Al ser un versor de módulo unidad, la derivada del vector tangente es normal al mismo:

$$\frac{d}{ds} (\underbrace{\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}}_{=1}) = 2\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0. \quad (2.12)$$

Por la definición hecha de \mathbf{n} , la derivada $d\mathbf{t}/ds$ lleva la dirección de \mathbf{n} , y el módulo se denomina *curvatura*:

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right|.$$

Se puede interpretar de forma intuitiva razonando que cuanto más se «doble» la curva (por unidad de arco), mayor es su curvatura κ . Dada la definición realizada de \mathbf{n} , por la que su sentido es siempre hacia el lado cóncavo, dicha curvatura resulta siempre positiva. Asimismo, se define el radio de curvatura como su inversa: $R \stackrel{\text{def}}{=} 1/\kappa$. Así,

$$\boxed{\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n} = \frac{1}{R} \mathbf{n}} \quad (1.^\text{a} \text{ fórmula de Frenet}). \quad (2.13)$$

Veamos ahora la variación de la binormal \mathbf{b} . Si la curva es plana, el plano osculador es fijo y $d\mathbf{b}/ds = 0$. En un caso general, esta derivada constituye una medida del alabeo de la curva que denominaremos *torsión*. En cuanto a la dirección de esta derivada, razonamos en primer lugar, por los mismos argumentos esgrimidos en (2.12), que es normal al propio \mathbf{b} . Por otra parte,

$$\frac{d}{ds} (\underbrace{\mathbf{b} \cdot \mathbf{t}}_{=0}) = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{t} + \underbrace{\mathbf{b} \cdot (\kappa \mathbf{n})}_{=0} = 0.$$

Deducimos pues que $d\mathbf{b}/ds = 0$ es normal a \mathbf{b} y a \mathbf{t} , es decir, lleva la dirección de \mathbf{n} , mientras que su módulo lo llamaremos torsión τ . Estableciendo de forma convencional el signo negativo en esta relación, puede escribirse

$$\boxed{\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n} = -\frac{1}{T} \mathbf{n}} \quad (2.^\text{a} \text{ fórmula de Frenet}). \quad (2.14)$$

(El radio de torsión resulta, análogamente al de curvatura, $T \stackrel{\text{def}}{=} 1/\tau$.)

Por último, derivando la normal principal,

$$\frac{d}{ds} \mathbf{n} = \frac{d}{ds} (\mathbf{b} \wedge \mathbf{t}) = (-\tau \mathbf{n}) \wedge \mathbf{t} + \mathbf{b} \wedge (\kappa \mathbf{n}),$$

es decir:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}} \quad (3.^\text{a} \text{ fórmula de Frenet}). \quad (2.15)$$

Expresiones de la velocidad y aceleración.— Empleando las fórmulas de Frenet es inmediato deducir las siguientes expresiones para velocidad y aceleración:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{ds}{dt} \mathbf{t} = v \mathbf{t},$$

relación que expresa simplemente que la velocidad es tangente a la trayectoria. Derivando de nuevo,

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{v} \mathbf{t} + v \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{v} \mathbf{t} + \frac{v^2}{R} \mathbf{n}$$

Se identifican en esta expresión claramente dos términos de la aceleración:

$$\begin{cases} \dot{v} \mathbf{t} & \text{aceleración tangencial} \\ \frac{v^2}{R} \mathbf{n} & \text{aceleración normal (centrípeta)} \end{cases}$$

2.3. Movimiento de una partícula libre

El principio de la cantidad de movimiento o 2.^a ley de Newton (2.2) proporciona una ecuación vectorial, que equivale a 3 ecuaciones escalares. Llamando (X, Y, Z) a las componentes cartesianas de la fuerza \mathbf{F} ,

$$\mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{r}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X = m\ddot{x} \\ Y = m\ddot{y} \\ Z = m\ddot{z} \end{cases}$$

Integrando estas 3 ecuaciones, será posible obtener las 3 incógnitas (x, y, z) que definen la posición de la partícula en cada instante. Las dificultades que puedan surgir para esta integración resultarán de las expresiones de (X, Y, Z) que por lo general no tienen porqué ser constantes.

Consideraremos como aplicación dos casos particulares relacionados con el movimiento de proyectiles.

2.3.1. Proyectil pesado en el vacío.

Admitimos en este caso que no existen resistencias del medio, por lo que la única fuerza actuante sobre la partícula es la gravedad terrestre, que suponemos definida por el campo gravitatorio simplificado $(-mg\mathbf{k})$. Las ecuaciones son:

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = 0; \quad m\ddot{z} = -mg.$$

Si tomamos unos ejes en los que el plano vertical Oxz contenga a la velocidad inicial \mathbf{v}_0 , es fácil comprobar que el movimiento se desarrollará dentro del mismo plano vertical:

$$\dot{y} = \ddot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

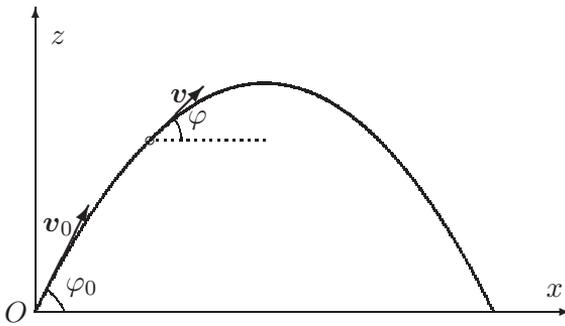


Figura 2.11: *trayectoria parabólica de un proyectil pesado en el vacío*

Denominando φ_0 el ángulo de la velocidad en el lanzamiento con la horizontal (figura 2.11) las ecuaciones en x y z se integran de manera trivial:

$$\dot{x} = v_0 \cos \varphi_0, \quad \dot{z} = -gt + v_0 \operatorname{sen} \varphi_0; \quad (2.16)$$

$$x = v_0 \cos \varphi_0 t, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \operatorname{sen} \varphi_0 t. \quad (2.17)$$

Las expresiones (2.17) son las llamadas *ecuaciones horarias* de la trayectoria, es decir, las ecuaciones que permiten obtener la posición en función del tiempo.

La *trayectoria* descrita por la partícula queda definida por las ecuaciones horarias de forma paramétrica, mediante el parámetro t . Se puede obtener la ecuación implícita de la trayectoria eliminando el parámetro t de las ecuaciones horarias: despejando t en (2.17₁) y sustituyendo en la expresión (2.17₂) de z :

$$z = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{(v_0 \cos \varphi_0)^2} + x \operatorname{tg} \varphi_0, \quad (2.18)$$

ecuación que representa una parábola de eje vertical (*movimiento parabólico*).

El alcance horizontal se obtiene haciendo $z = 0$ en (2.18),

$$L = \operatorname{sen}(2\varphi_0) \frac{v_0^2}{g},$$

de donde se deduce inmediatamente que el alcance máximo se produce para $\varphi_0 = \pi/4$, valiendo $L_{max} = v_0^2/g$. Por otra parte, para distancias inferiores, existen dos soluciones posibles de tiro para obtener un mismo alcance: tiro directo y por elevación:

$$1 > \frac{L}{L_{max}} = \operatorname{sen} 2\varphi_0 \quad \Rightarrow \quad 2 \text{ soluciones } \begin{cases} \varphi_1 < \pi/4 & (\text{tiro directo}), \\ \varphi_2 > \pi/4 & (\text{tiro por elevación}). \end{cases}$$

El tiro por elevación es el característico de los morteros, mientras que el tiro directo es el normal de los proyectiles denominados balísticos.

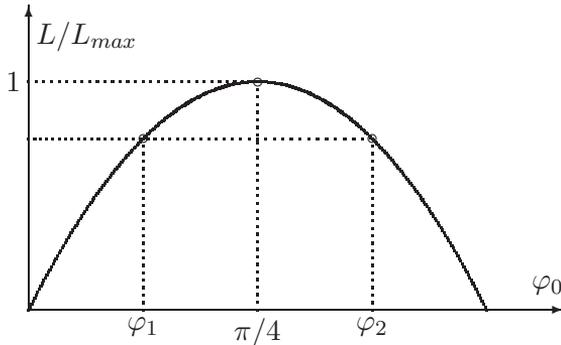


Figura 2.12: Alcance del tiro parabólico en función del ángulo inicial φ_0 : $L = \frac{v_0^2}{2g} \text{sen } 2\varphi_0$. Para distancias inferiores al alcance máximo ($L_{max} = v_0^2/g$, para $\varphi_0 = \pi/4$), existen dos posibilidades, el tiro directo ($\varphi_0 = \varphi_1$), y por elevación ($\varphi_0 = \varphi_2$).

La envolvente de las posibles parábolas de tiro para v_0 dada, es decir para una energía dada, es otra parábola, denominada parábola de seguridad. Para determinarla, expresamos la condición de que la trayectoria (2.18) pase

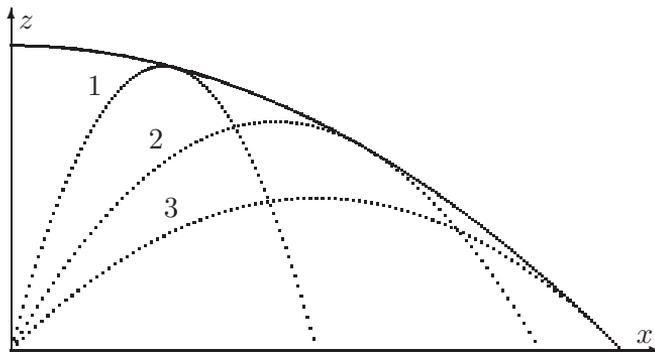


Figura 2.13: Parábola de seguridad, envolvente de las diversas trayectorias (1, 2, 3) para una energía de lanzamiento dada

por un punto (a, b) dado:

$$b = -\frac{1}{2}g \frac{a^2}{(v_0 \cos \varphi_0)^2} + a \text{tg } \varphi_0;$$

haciendo $\text{tg } \varphi_0 = u$, obtenemos la ecuación:

$$u^2 - \frac{2v_0^2}{ag}u + 1 + \frac{2bv_0^2}{a^2g} = 0;$$

para que tenga solución real en u , ha de ser $b < v_0^2/2g - ga^2/2v_0^2$. Por tanto, la ecuación de la parábola de seguridad es

$$z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

La altura máxima en una trayectoria se obtiene haciendo $\dot{z} = 0$ en (2.16):

$$0 = -gt + v_0 \operatorname{sen} \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \varphi_0}{g},$$

y entrando con este valor de t en (2.17),

$$z_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_0}{g}.$$

Es obvio que la máxima altura de todas las trayectorias posibles se obtiene para $\varphi_0 = \pi/2$, es decir para tiro vertical:

$$z_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}.$$

Mediante *consideraciones energéticas* se podrían haber obtenido algunos de estos mismos resultados de forma muy sencilla. Por ejemplo, la altura máxima para un tiro vertical resulta de igualar la energía total en el punto de altura máxima con la inicial:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + mgz_{max} \quad \Rightarrow \quad z_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}.$$

Asimismo, para una trayectoria inclinada, podemos obtener la velocidad en el punto de máxima altura igualando la energía con la del instante inicial:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + mg \left(\frac{1}{2} \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_0}{g} \right)$$

De donde $v = v_0 \cos \varphi_0$, deducción que podríamos haber realizado también al considerar que, al ser $\dot{z} = 0$ en ese instante, la velocidad no tiene componente vertical, reduciéndose a la velocidad horizontal que es constante.

2.3.2. proyectil pesado en medio resistente

Complicamos ahora el problema anterior al considerar una resistencia del medio, cuya dirección es la de la velocidad y cuya magnitud depende del módulo de la misma de forma monótonamente creciente (es decir, a mayor velocidad, mayor resistencia):

$$\mathbf{R} = -R(v) \frac{\mathbf{v}}{v}.$$

La función de resistencia $R(v)$ tiene por lo general una caracterización compleja, habiendo de determinarse mediante ensayos aerodinámicos en túneles de viento o simulaciones en el ordenador. Como simplificación se suele

aceptar la aproximación como una función proporcional al cuadrado de la velocidad, $R(v) = \alpha v^2$, o para velocidades muy bajas, proporcional a la velocidad, $R(v) = \alpha v$.

En un caso general, llamando (R_x, R_y, R_z) a las componentes cartesianas de \mathbf{R} , las ecuaciones son:

$$m\ddot{x} = R_x; \quad m\ddot{y} = R_y; \quad m\ddot{z} = R_z - mg. \quad (2.19)$$

En primer lugar, demostraremos que la trayectoria es plana, manteniéndose dentro de un plano vertical. En efecto, puesto que $\mathbf{R} \parallel \mathbf{v}$,

$$R_x = -\frac{R}{v}\dot{x}; \quad R_y = -\frac{R}{v}\dot{y}; \quad R_z = -\frac{R}{v}\dot{z}$$

Eliminando R_x y R_y con las ecuaciones (2.19) resulta

$$\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}}{\dot{y}} = -\frac{R}{mv}.$$

Integrando cada miembro de esta ecuación en variables separadas se obtiene

$$\log \dot{y} = \log C\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = C\dot{x} \quad \Rightarrow \quad y = Cx + D,$$

ecuación que define un plano vertical.

A continuación expondremos un método de solución general, para una resistencia $R(v)$ cualquiera. Para ello, expresemos las ecuaciones en las direcciones tangencial y normal a la trayectoria:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \operatorname{sen} \varphi - R(v) \quad (2.20)$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos \varphi \quad (2.21)$$

donde ρ es el radio de curvatura de la misma. La relación de éste con los incrementos infinitesimales de arco (ds) y ángulo girado ($d\varphi$) es

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\varphi}{ds},$$

donde se toma convencionalmente el signo negativo, lo que equivale a establecer que φ decrece al crecer s , siendo ρ siempre positivo.

Queremos obtener la ecuación que relaciona el módulo de la velocidad con el ángulo de la trayectoria, $v(\varphi)$, llamada «hodógrafa». Para ello, eliminamos ρ de la ecuación (2.21), quedando:

$$-mv^2 \frac{d\varphi}{ds} = mg \cos \varphi \quad (2.22)$$

Dividiendo (2.20) y (2.22) término a término, y considerando que

$$\frac{dv}{dt} \frac{ds}{d\varphi} = v \frac{dv}{d\varphi}$$

se obtiene:

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{d\varphi} = \frac{mg \operatorname{sen} \varphi + R(v)}{mg \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi + \frac{R(v)}{mg \cos \varphi} \quad (2.23)$$

Se trata de una ecuación diferencial de primer orden que, integrada, proporcionaría la solución $v(\varphi)$ buscada. Esta integración puede no ser inmediata, al menos por métodos analíticos, habiendo de recurrir entonces a procedimientos numéricos. Una vez calculada esta solución de la hodógrafa $v(\varphi)$, la ecuación de la trayectoria en función de t se hallaría mediante una simple cuadratura. En efecto, de (2.22):

$$-mv^2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{ds} = mg \cos \varphi$$

por lo que

$$dt = -\frac{v(\varphi)d\varphi}{g \cos \varphi} \Rightarrow t = -\frac{1}{g} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{v(\varphi)}{\cos \varphi} d\varphi \quad (2.24)$$

obteniéndose así $t(\varphi)$, e invirtiendo ésta, $\varphi(t)$. Las ecuaciones paramétricas de $x(t)$, $z(t)$, se obtendrían mediante nuevas cuadraturas:

$$dx = v \cos \varphi dt = -\frac{v^2}{g} d\varphi \Rightarrow x = -\frac{1}{g} \int_{\varphi_0}^{\varphi} v^2(\varphi) d\varphi \quad (2.25)$$

$$dz = v \operatorname{sen} \varphi dt = -\frac{v^2}{g} \operatorname{tg} \varphi d\varphi \Rightarrow z = -\frac{1}{g} \int_{\varphi_0}^{\varphi} v^2(\varphi) \operatorname{tg} \varphi d\varphi \quad (2.26)$$

Aún sin solucionar explícitamente las ecuaciones anteriores, se puede extraer de ellas algunas conclusiones cualitativas. De (2.20) se deduce que *la velocidad permanece acotada*. En efecto, si no fuera así, la resistencia $R(v)$ que es una función monótona tampoco estaría acotada, llegándose a una aceleración negativa infinita:

$$v \rightarrow \infty \Rightarrow R(v) \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{dv}{dt} \rightarrow -\infty$$

Por otra parte, de (2.24), si v está acotado, para $t \rightarrow \infty$ será $\varphi \rightarrow -\pi/2$, por lo que la trayectoria tiene una *asíntota vertical*.

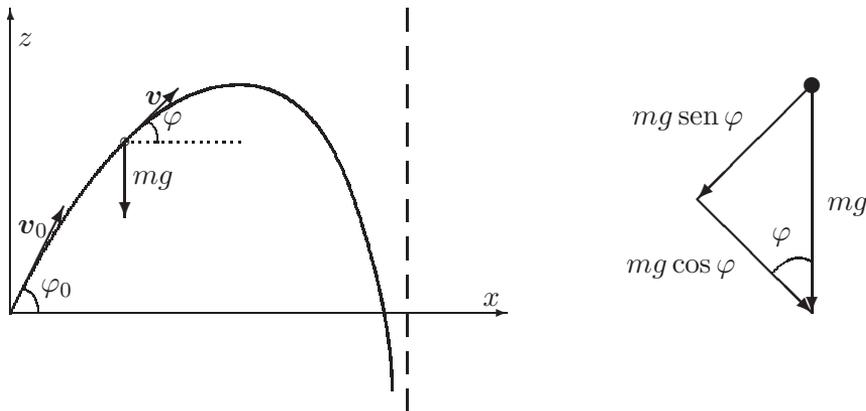


Figura 2.14: *Trayectoria de un proyectil en medio resistente. Descomposición del peso en dirección normal y tangencial.*

Existe una solución analítica debida a Legendre¹⁰, reduciendo el problema a cuadraturas sucesivas, si la función resistente toma la forma:

$$R(v) = mg(b + cv^n)$$

Como aplicación, consideremos el caso particular de resistencia del medio proporcional a la velocidad, ($b = 0$, $n = 1$), es decir: $R(v) = mgcv$. En este caso la ecuación (2.23) resulta:

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{d\varphi} = \operatorname{tg} \varphi + \frac{cv}{\cos \varphi}$$

La integración de esta ecuación arroja:

$$v = \frac{v_0 \cos \varphi_0}{\cos \varphi - cv_0 \operatorname{sen}(\varphi \pm \varphi_0)}.$$

Aunque no demostraremos la deducción de esta expresión, es fácil comprobar que cumple la ecuación diferencial (2.23).

Para este caso de resistencia viscosa otra forma de resolver el problema es integrando directamente las ecuaciones en componentes cartesianas, procedimiento que queda descrito en el siguiente

EJEMPLO 2.1: Una partícula se mueve en un medio viscoso, con resistencia proporcional a la velocidad, $R(v) = mgcv$. Obtener la trayectoria.

¹⁰ver p.ej. P. Appel y S. Dautheville, *Précis de Mécanique Rationnelle*, Gauthier-Villars, 1952

Solución. Particularizamos las ecuaciones diferenciales (2.19) que resultan

$$\ddot{x} = -gc\dot{x}, \quad (2.27)$$

$$\ddot{z} = -gc\dot{z} - g. \quad (2.28)$$

La ecuación (2.27) es de variables separadas, por lo que se integra directamente:

$$\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = -gc \Rightarrow \ln \frac{\dot{x}}{v_{0x}} = -gct;$$

e integrando de nuevo y teniendo en cuenta que $x(0) = 0$,

$$\dot{x} = v_{0x}e^{-gct} \Rightarrow \boxed{x = \frac{v_{0x}}{gc}(1 - e^{-gct})}.$$

Por su parte, en la ecuación (2.28) se pueden separar variables de forma similar e integrar una primera vez:

$$\frac{\ddot{z}}{\dot{z} + 1/c} = -gc \Rightarrow \ln \frac{\dot{z} + 1/c}{v_{0z} + 1/c} = -gct;$$

e integrando de nuevo, con la condición inicial $z(0) = 0$,

$$\dot{z} = -\frac{1}{c} + \left(v_{0z} + \frac{1}{c}\right)e^{-gct} \Rightarrow \boxed{z = -\frac{t}{c} + \left(\frac{v_{0z}}{gc} + \frac{1}{gc^2}\right)(1 - e^{-gct})}. \quad \square$$

2.4. Movimiento de una partícula sobre una curva

Sea una curva Γ definida como la intersección de dos superficies f y g :

$$f(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.29)$$

$$g(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.30)$$

Una normal a la curva viene dada, en función de 2 parámetros λ y μ arbitrarios, por:

$$\mathbf{N} = \lambda \mathbf{grad} f + \mu \mathbf{grad} g.$$

Decimos que la curva es lisa si la fuerza de reacción que se produce sobre la partícula es normal a la misma. Además de esta reacción, pueden existir unas fuerzas aplicadas o activas \mathbf{f} , por lo que la ecuación dinámica es:

$$\mathbf{f} + \underbrace{\lambda \mathbf{grad} f + \mu \mathbf{grad} g}_{\mathbf{N}, \text{ reacción normal}} = m\ddot{\mathbf{r}} \quad (2.31)$$

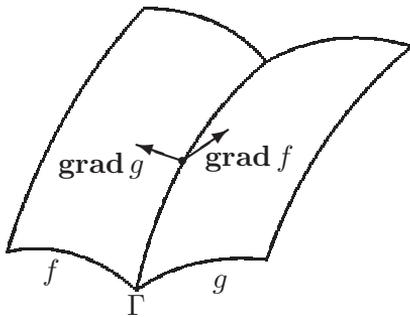


Figura 2.15: Partícula sobre una curva Γ , definida como intersección de dos superficies, con normales $\mathbf{grad} f$ y $\mathbf{grad} g$.

El problema queda planteado con cinco ecuaciones ((2.29), (2.30), y tres ecuaciones escalares de (2.31)) para cinco incógnitas (x, y, z, λ, μ).

Multiplicando (2.31) por $d\mathbf{r}$, y suponiendo que se trata de una curva fija (es decir, $\partial f/\partial t = 0$, $\partial g/\partial t = 0$):

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = m\ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \quad (2.32)$$

(puesto que $\mathbf{grad} f \cdot d\mathbf{r} = df = 0$, e igual para g).

El trabajo elemental de las fuerzas aplicadas $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ lo podemos poner en función de un parámetro que define la posición en la curva (por ejemplo, el arco recorrido), que llamaremos q :

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = f_x dx + f_y dy + f_z dz = f_x \frac{dx}{dq} dq + f_y \frac{dy}{dq} dq + f_z \frac{dz}{dq} dq = Q dq$$

definiéndose la «fuerza generalizada» como el producto escalar de la fuerza (física) aplicada por la derivada de la curva respecto del parámetro, $Q \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}/dq = f_x dx/dq + f_y dy/dq + f_z dz/dq$. Así,

$$Q dq = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{q_0}^q Q(q) dq,$$

con lo que el problema queda reducido a una cuadratura. Si fuera $\partial f/\partial t \neq 0$ ó $\partial g/\partial t \neq 0$ (caso de una curva móvil), obtendríamos:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} - \lambda \frac{\partial f}{\partial t} dt - \mu \frac{\partial g}{\partial t} dt. \quad (2.33)$$

El término adicional respecto a (2.32) corresponde al trabajo realizado por la fuerza de reacción, $(\lambda \mathbf{grad} f + \mu \mathbf{grad} g) \cdot d\mathbf{r} = (-\lambda \partial f/\partial t - \mu \partial g/\partial t) dt$, debido a que el desplazamiento real ($d\mathbf{r}$) no sigue la tangente a la curva en un instante t , por ser ésta móvil.

Si \mathbf{f} proviene de un potencial, $\mathbf{f} = -dV/dr$, entonces $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ es un diferencial exacto:

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = Q dq = -dV,$$

pudiéndose integrar (2.32) para obtener

$$\frac{mv^2}{2} + V(\mathbf{r}) = h,$$

siendo h una constante de integración (energía mecánica total constante).

Una vez obtenida v , se introduciría en las ecuaciones de equilibrio, formuladas en el triedro intrínseco, para calcular la reacción normal \mathbf{N} :

$$f_t = m \frac{dv}{dt}; \quad f_n + N_n = m \frac{v^2}{\rho}; \quad f_b + N_b = 0$$

Señalemos por último que en un caso general \mathbf{N} es normal a la curva Γ , aunque no necesariamente coincide con la normal principal. Esto último sí se cumple si no hay fuerzas aplicadas ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$), pues al particularizar las ecuaciones anteriores se obtiene $N_n = mv^2/\rho$ y $N_b = 0$.

EJEMPLO 2.2: Una partícula de masa m está ligada a una circunferencia lisa de radio R sobre la que puede deslizarse libremente. A su vez la circunferencia se mueve en un plano horizontal, girando con velocidad de rotación uniforme (impuesta) ω , alrededor de un punto O de su perímetro. Se pide:

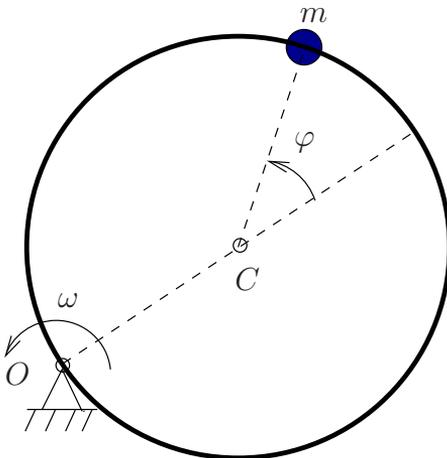


Figura 2.16: *Ejemplo 2.2 - partícula que se mueve sobre una circunferencia lisa, con un punto (O) fijo de su perímetro y velocidad de rotación impuesta ω .*

- Empleando como parámetro el ángulo φ (figura 2.2), determinar la aceleración (absoluta) de la partícula en un instante genérico.
- Obtener la ecuación diferencial del movimiento.

- c. Obtener la expresión de la reacción de la circunferencia sobre la partícula.
- d. ¿Se conserva la energía total ($T + V$)? (responder razonadamente).
- e. Obtener una integral primera del sistema (constante del movimiento, igual a una expresión función de las derivadas primeras, en este caso $\dot{\varphi}$). Tomar como condiciones iniciales $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = \omega$.

Solución.

a.— El procedimiento más directo es emplear coordenadas cartesianas para la posición de la partícula (figura 2.17):

$$\begin{aligned} x &= R \cos(\omega t) + R \cos(\varphi + \omega t); \\ y &= R \operatorname{sen}(\omega t) + R \operatorname{sen}(\varphi + \omega t). \end{aligned} \tag{2.34}$$

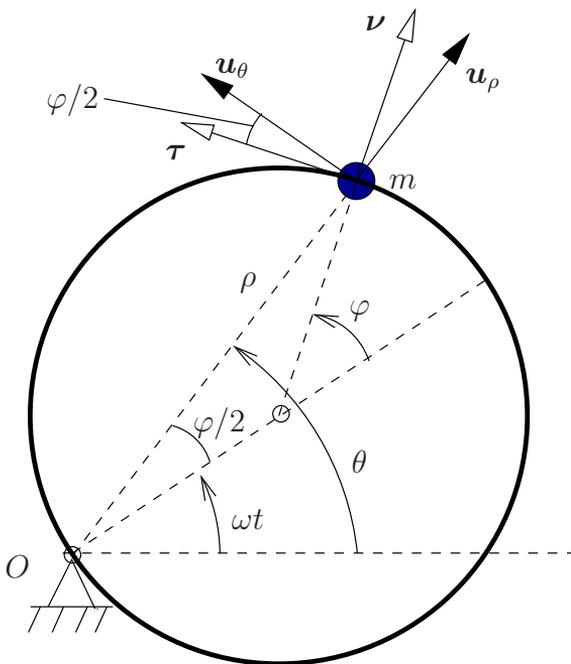


Figura 2.17: Coordenadas y vectores básicos para el ejemplo 2.2; (τ, ν) son los versores tangente y normal respectivamente a la circunferencia móvil, mientras que $(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\theta)$ son los versores de las coordenadas polares. La velocidad de la partícula se puede interpretar como suma de una componente de arrastre $\rho\omega$ debida al movimiento del aro, según \mathbf{u}_θ , y otra componente $R\dot{\varphi}$ relativa al aro, según τ .

A partir de aquí, derivando:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -R\omega \operatorname{sen}(\omega t) - R(\dot{\varphi} + \omega) \operatorname{sen}(\omega t + \varphi); \\ \dot{y} &= R\omega \cos(\omega t) + R(\dot{\varphi} + \omega) \cos(\omega t + \varphi); \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -R\omega^2 \cos(\omega t) - R\ddot{\varphi} \sin(\omega t + \varphi) - R(\dot{\varphi} + \omega)^2 \cos(\omega t + \varphi); \\ \ddot{y} &= -R\omega^2 \sin(\omega t) + R\ddot{\varphi} \cos(\omega t + \varphi) - R(\dot{\varphi} + \omega)^2 \sin(\omega t + \varphi).\end{aligned}\quad (2.36)$$

Las direcciones en que interesa proyectar la aceleración son (lógicamente) la tangente y la normal a la circunferencia. Estas resultan:

$$\begin{aligned}a_\tau &= -\ddot{x} \sin(\varphi + \omega t) + \ddot{y} \cos(\varphi + \omega t) = R\omega^2 \sin \varphi + R\ddot{\varphi}; \\ a_\nu &= \ddot{x} \cos(\varphi + \omega t) + \ddot{y} \sin(\varphi + \omega t) = -R\omega^2 \cos \varphi - R(\dot{\varphi} + \omega)^2.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Otra manera¹¹ de calcular sería utilizando las coordenadas polares (ρ, θ) (figura 2.17):

$$\theta = \omega t + (\varphi/2); \quad \rho = 2R \cos(\varphi/2); \quad (2.38)$$

La aceleración es $\mathbf{a} \equiv (a_\rho, a_\theta)$:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2; \quad a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi},$$

con lo que:

$$\begin{aligned}a_\rho &= -R\ddot{\varphi} \sin(\varphi/2) - R\dot{\varphi}^2/2 \cos(\varphi/2) - 2R \cos(\varphi/2)(\omega + \dot{\varphi}/2)^2, \\ a_\theta &= -2R\dot{\varphi} \sin(\varphi/2)(\omega + \dot{\varphi}/2) + R \cos(\varphi/2)\ddot{\varphi}/2.\end{aligned}\quad (2.39)$$

Finalmente, proyectando sobre tangente y normal al aro:

$$\begin{aligned}a_\tau &= -a_\rho \sin(\varphi/2) + a_\theta \cos(\varphi/2) = R\omega^2 \sin \varphi + R\ddot{\varphi}; \\ a_\nu &= a_\rho \cos(\varphi/2) + a_\theta \sin(\varphi/2) = -R\omega^2 \cos \varphi - R(\dot{\varphi} + \omega)^2.\end{aligned}\quad (2.40)$$

Se obtienen los mismos valores que antes (2.37), como era de esperar.

b.— La única fuerza sobre la partícula es la reacción de la circunferencia, que lleva la dirección de ν . La componente de la aceleración según τ será por tanto nula, lo que proporciona la ecuación del movimiento buscada. A partir de (2.37)₁:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0 \quad (2.41)$$

Por similitud con la ecuación del péndulo simple ($l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$), esta ecuación indica que se produce un movimiento pendular alrededor del punto diametralmente opuesto al punto O , con longitud de péndulo equivalente $l_{\text{equiv}} = g/\omega^2$.

¹¹Un tercer procedimiento recomendable para este caso sería la descomposición del movimiento en el arrastre del aro y el de la partícula relativo al aro, originando la descomposición del campo de aceleraciones $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{arr}} + \mathbf{a}_{\text{cor}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}$, como se verá en el apartado 4.2, ecuación (4.9).

c.— Sea la reacción $\mathbf{N} = N\nu$. Obtenemos el valor de N mediante la aceleración a_ν , ecuación (2.37)₂, expresando la ecuación dinámica según esta dirección:

$$N = ma_\nu = -mR [(\omega + \dot{\varphi})^2 + \omega^2 \cos \varphi]. \quad (2.42)$$

d.— *No se conserva la energía*, ya que se trata de una curva móvil, en la que la fuerza de reacción desarrolla un trabajo. Es necesario aplicar un momento al sistema para conseguir la rotación uniforme ω , momento que no es una fuerza conservativa.

Aunque a primera vista pudiera parecer que la reacción de la circunferencia, al ser lisa la ligadura, no desarrolla trabajo alguno, esto no es así, ya que la reacción es normal a la circunferencia pero no a la trayectoria (absoluta) de la partícula.

e.— Ya que no resulta posible aplicar directamente un teorema de conservación, integraremos directamente la ecuación de la dinámica (2.41). Para ello, multiplicamos primero por $\dot{\varphi}$:

$$\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + \omega^2\dot{\varphi} \sin \varphi = 0; \quad (2.43)$$

esta ecuación tiene integral inmediata:

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos \varphi = C \quad (2.44)$$

Aplicando las condiciones iniciales, resulta $C = -\omega^2$. La integral primera es por tanto:

$$\dot{\varphi}^2 + \omega^2(1 - 2 \cos \varphi) = 0 \quad (2.45)$$

Puede comprobarse que la expresión de la energía total del sistema es:

$$T + V = \frac{1}{2}mR^2 [\dot{\varphi}^2 + 2(1 + \cos \varphi)(\omega^2 + \omega\dot{\varphi})] \quad (2.46)$$

por lo que, comparándola con (2.45), se deduce que la energía total no puede ser constante, ya que ambas expresiones no coinciden. \square

2.5. Movimiento de una partícula sobre una superficie

Sea una superficie lisa, definida en forma implícita por una ecuación escalar

$$f(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.47)$$

cuya normal viene dada por $\mathbf{grad} f = \partial f / \partial \mathbf{r}$. Si existen otras fuerzas aplica-

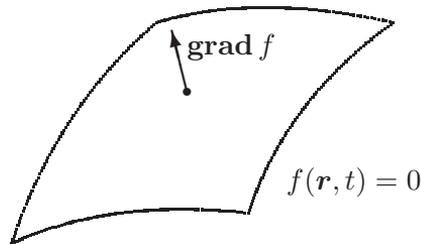


Figura 2.18: Partícula sobre una superficie lisa f , con normal $\mathbf{grad} f$.

das \mathbf{f} —además de la reacción normal $\mathbf{N} = \lambda \mathbf{grad} f$ — la ecuación dinámica será:

$$\mathbf{f} + \lambda \mathbf{grad} f = m\ddot{\mathbf{r}} \quad (2.48)$$

El problema queda planteado con las tres ecuaciones escalares (2.48) y la propia de la superficie (2.47), para las cuatro incógnitas (x, y, z, λ) .

Multiplicando escalarmente (2.48) por \mathbf{r} , y suponiendo que la superficie es fija ($\partial f / \partial t = 0$),

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \quad (2.49)$$

Para definir la posición sobre la superficie son necesarios dos parámetros (u, v) , coordenadas de la superficie. Así:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv \\ &= Q_u du + Q_v dv \\ &= d\left(\frac{mv^2}{2}\right), \end{aligned}$$

donde $Q_u \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f} \cdot \partial \mathbf{r} / \partial u$, $Q_v \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f} \cdot \partial \mathbf{r} / \partial v$. Es necesario integrar esta ecuación diferencial para resolver el problema.

Si la superficie es móvil ($\partial f / \partial t \neq 0$), en la ecuación anterior debe incluirse el trabajo de la reacción normal ($\lambda \mathbf{grad} f \cdot d\mathbf{r} = -\lambda(\partial f / \partial t)dt \neq 0$), resultando la expresión

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = Q_u du + Q_v dv - \lambda \frac{\partial f}{\partial t} dt = d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Si \mathbf{f} proviene de un potencial, $\mathbf{f} = -dV/d\mathbf{r}$, por lo que $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ es diferencial exacto, y de la integración de (2.49) se obtiene

$$\frac{mv^2}{2} + V(\mathbf{r}) = h.$$

Una vez calculada la velocidad v , hallaríamos λ y \mathbf{N} (reacción normal), aplicando las ecuaciones en el triedro intrínseco, de manera similar al caso anterior. En este caso emplearemos el triedro intrínseco de la superficie, formado por (figura 2.19):

- \mathbf{N} , según la dirección de la recta MC en la figura 2.19, normal a la superficie.
- $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$, tangente a la trayectoria.
- $\mathbf{B} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{N}$, según la recta MP (figura 2.19), contenido en el plano tangente Π_t y normal a los anteriores.

El punto C es el centro de curvatura de la sección normal (definida como la intersección de la superficie con el plano definido por \mathbf{t} y \mathbf{N}), y C' el centro de curvatura de la trayectoria Γ . Por tanto, la normal principal a la curva lleva la dirección de MC' : $\mathbf{n} \parallel MC'$. Los segmentos que definen ambos radios de curvatura (MC y MC') forman entre sí un ángulo θ . Las ecuaciones en las direcciones del triedro intrínseco son

$$\begin{aligned} f_t &= m \frac{dv}{dt}, \\ f_n + N_n &= \frac{mv^2}{\rho}, \\ f_b + N_b &= 0, \end{aligned}$$

siendo ρ el radio de curvatura de la trayectoria. Proyectando sobre la dirección \mathbf{N} (normal a la superficie), las componentes de la fuerza aplicada y de la reacción son respectivamente

$$f_N = f_n \cos \theta + f_b \sen \theta; \quad N = N_n \cos \theta + N_b \sen \theta.$$

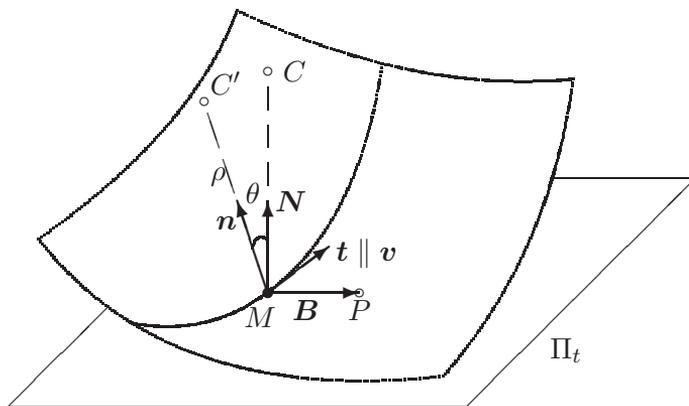


Figura 2.19: *Triedro intrínseco de la superficie.*

La ecuación dinámica según esta dirección es

$$f_N + N = \frac{mv^2}{\rho} \cos \theta.$$

El radio de curvatura de la sección normal es $R_N = \overline{MC} = \rho / \cos \theta$, por el *teorema de Meusnier*¹². Por tanto, la ecuación anterior puede escribirse como

$$f_N + N = \frac{mv^2}{R_N}.$$

Proyectando sobre \mathbf{B} (normal a la trayectoria y $\in \Pi_t$), la componente de la reacción normal es naturalmente nula, mientras que la fuerza aplicada es

$$f_B = -f_n \operatorname{sen} \theta + f_b \cos \theta,$$

y la ecuación es

$$f_B = -\frac{mv^2}{\rho} \operatorname{sen} \theta.$$

Se pueden definir las *geodésicas* de la superficie como aquellas curvas en las que el radio de curvatura y el de la sección normal de la superficie coinciden ($\theta = 0$). En ellas el plano osculador contiene constantemente

¹²cf. D.J. Struik: *Geometría Diferencial Clásica*, Aguilar 1973, (apartado 2.5).

a la normal a la superficie \mathbf{N} . Si no actúan fuerzas exteriores ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$), una partícula ligada a la superficie recorre una geodésica con velocidad constante. En efecto:

$$\begin{cases} f_t = 0 & \Rightarrow v = v_0 \\ f_B = 0 & \Rightarrow \theta = 0 \quad (\text{Geodésica}) \\ N = mv^2/R_N \end{cases}$$

2.6. Problemas propuestos.

Problema 2.1. Una varilla AB de longitud $2a$ se mueve de forma que su extremo A recorre el eje Oz de un sistema de referencia $Oxyz$ ortogonal. El extremo B recorre la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0, z = 0$$

con velocidad angular constante ω . Inicialmente B está en el origen de coordenadas. Se pide:

- Ecuaciones horarias del movimiento del punto medio M de la varilla.
- Caracterizar geoméricamente la trayectoria.
- Velocidad de M .
- Valores máximos o mínimos de la velocidad de M y posiciones en que se presentan.
- Caracterizar el movimiento de A .
- Aceleración de M .
- Aceleraciones tangencial y normal en los instantes de los máximos y mínimos de la velocidad.
- Radio de curvatura de la trayectoria en esos instantes.

Problema 2.2. Un punto M describe la cardioide

$$\rho = a(1 + \cos \theta)$$

de modo que su aceleración pasa continuamente por el polo O . Inicialmente el punto se encuentra en $(2a, 0)$ con una velocidad v_0 . Se pide:

- Velocidad del punto en función de ρ .
- Aceleraciones total, tangencial y normal en función de ρ .
- Radio de curvatura de la trayectoria.

d. Tiempo que tarda en llegar al polo O .

Problema 2.3. Un punto se mueve en un plano alrededor de un punto fijo O , de modo que su aceleración γ es siempre normal al radio vector ρ , y este último gira alrededor de O con velocidad angular constante ω . Hallar la ecuación de la trayectoria y el valor de γ , sabiendo que en el instante inicial $\rho = r_0, \theta = 0$, y v_0 es perpendicular a r_0 .

Problema 2.4. Un punto M se mueve con velocidad constante c sobre la catenaria $y = a \cosh(x/a) = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a})$. Hallar la aceleración del punto M en función de x e y y la dirección de la misma.

Problema 2.5. Un punto material M pesado y de masa m está obligado a moverse sin rozamiento sobre una circunferencia vertical de radio a . Dicha circunferencia gira con velocidad angular constante ω alrededor del diámetro vertical AB . En el instante inicial el punto se sitúa en el punto más bajo y tiene una velocidad inicial relativa a la circunferencia $V_0 = \sqrt{2ga}$. Se pide:

- Ecuación diferencial del movimiento de M ;
- Dejar el movimiento reducido a una cuadratura;
- Reacción de la circunferencia sobre el punto M en función de la posición.

Problema 2.6. Una partícula material pesada M , de masa m , se mueve sobre una hélice cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$\begin{aligned}x &= R \cos \theta, \\y &= R \operatorname{sen} \theta, \\z &= R \theta.\end{aligned}$$

Sobre el punto actúa además de la gravedad una fuerza de resistencia proporcional y opuesta a la velocidad tal que cuando la velocidad del punto es \sqrt{gR} , la fuerza de resistencia es igual al peso mg de la partícula. En el instante inicial ($t = 0$) la partícula se encuentra en la posición definida por las coordenadas $(R, 0, 0)$ y se lanza con una velocidad $V_0\sqrt{2}/2(\mathbf{j} + \mathbf{k})$. Se pide:

- demostrar que existe un valor de la velocidad inicial V_0 para el cual la aceleración total de la partícula en el instante inicial es mínima.
- Plantear las ecuaciones que determinan el movimiento de la partícula M y la reacción de la hélice.
- Calcular la posición más alta alcanzada por la partícula, suponiendo que el valor algebraico de la velocidad inicial es: $V_0 = \sqrt{2gR}$.

Problema 2.7. Se considera un punto material pesado M , de masa m , que puede deslizar sin rozamiento y con ligadura bilateral, sobre un cono de revolución de eje vertical y semiángulo 30° . Sobre el punto actúa, además del peso, una repulsión desde el vértice del cono, de valor:

$$F = \frac{\sqrt{3}}{2}mg \left[1 - \frac{a^4}{r^4} \right]$$

donde r es la distancia del punto M al vértice del cono. En el instante inicial se lanza el punto M , tangente al paralelo local, a una distancia a del vértice y con velocidad inicial $V_0 = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}}ga}$. Se pide:

- Determinar completamente la trayectoria y ley horaria del movimiento del punto M , indicando el tiempo que tarda en alcanzar la cota más baja.
- Reacción normal del cono sobre el punto.

Problema 2.8. Una bolita pesada de masa m desliza sobre sin rozamiento sobre la trayectoria de la figura, cuyo lazo es circular de radio R , siendo el enlace unilateral. ¿A qué altura H es necesario soltar la bolita, sin velocidad inicial, para que recorra el lazo sin desprenderse? ¿y para que se desprenda y pase por el centro del lazo?

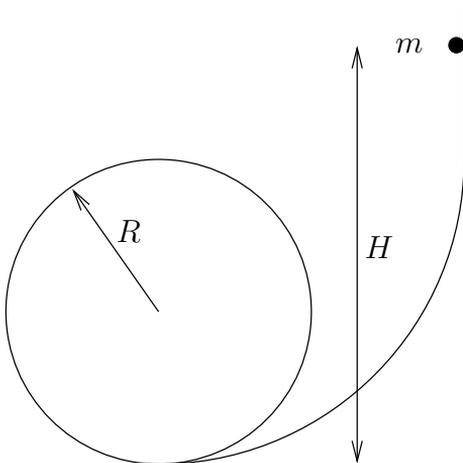


Figura 2.20: Problema 2.8

Problema 2.9. Una partícula que se mueve sobre una circunferencia es atraída por un punto de su perímetro, con una fuerza función de la distancia. Determinar esta función de modo que la reacción que ejerza la circunferencia sobre la partícula sea constante, y calcúlese la reacción en función de las condiciones iniciales.

Problema 2.10. Un punto material de masa m se mueve sin rozamiento sobre la superficie de revolución engendrada por una catenaria al girar alrededor de su eje de simetría, cuya ecuación es

$$z = a \cosh \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}.$$

Sobre el punto actúa únicamente una fuerza atractiva hacia el eje Oz cuya expresión vectorial es:

$$\mathbf{F} = -m\omega^2 a^4 \frac{r^2 + 2a^2}{r^5} \mathbf{u}_r$$

donde ω es una constante conocida. En el instante inicial el punto material se encuentra en una posición situada a distancia a del eje Oz y está dotado de una velocidad $v_0 = \sqrt{2}\omega a$, formando un ángulo de 45° con la tangente al meridiano correspondiente. El sentido de la velocidad es tal que el punto tiende a alejarse del eje Oz . Se pide:

- Calcular la velocidad del punto en función de su posición.
- Calcular la proyección del punto sobre el plano Oxy , a lo largo del movimiento.
- Determinar la ley horaria del movimiento.
- Calcular la reacción normal de la superficie.

Problema 2.11. Un punto pesado M de masa m se mueve por la cicloide

$$\begin{aligned} x &= R\varphi - R \operatorname{sen} \varphi, \\ y &= R - R \cos \varphi, \end{aligned}$$

a la que puede abandonar por el lado convexo. Sabiendo que el eje Oy es la vertical ascendente, se lanza el punto desde la posición más alta de la cicloide con una velocidad inicial v_0 . Se pide:

- Ecuación del movimiento.
- Reacción normal.
- Punto en que M se despega de la cicloide.
- Valor máximo de v_0 para que el punto no se despegue inmediatamente de la cicloide.

Problema 2.12. Un cuadrado indeformable $OABC$, formado por 4 varillas huecas de longitud l cada una, se mueve en un plano horizontal alrededor del vértice fijo O con velocidad de giro constante ω . En el lado AB , según

indica la figura, puede moverse sin rozamiento una partícula P de masa m , unida al vértice A mediante un resorte de constante k y longitud nula sin tensión. Se pide:

- Aceleración absoluta de P , en sus componentes normal y tangencial a AB , para un instante genérico. Se tomará como parámetro $u = \overline{AP}$.
 - Ecuación diferencial del movimiento de P relativo a AB .
 - Suponiendo que inicialmente $u(0) = u_0$ y $\dot{u}(0) = 0$, estudiar la posibilidad de equilibrio relativo estable, en función de la relación entre ω y k .
 - Reacción de la varilla AB sobre P .
- (Examen parcial, 9/2/1996)

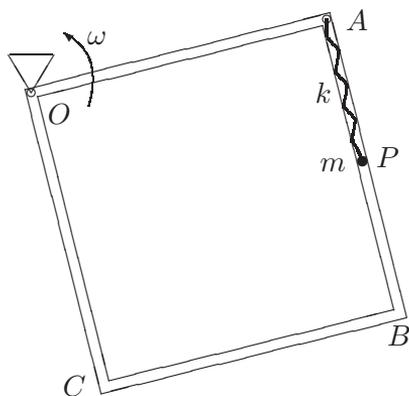


Figura 2.21: *Problema 2.12*

Problema 2.13. Bajo la acción de la gravedad, una partícula m se mueve sin rozamiento sobre la cicloide (ver figura adjunta) definida en forma paramétrica por las expresiones:

$$x = R(\theta - \operatorname{sen} \theta); \quad y = -R(1 - \cos \theta),$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

- Obtener la relación $s(\theta)$, siendo s la longitud de arco medido desde el punto más bajo de la cicloide ($\theta = \pi$).
- Obtener la ecuación dinámica del movimiento (ecuación diferencial de orden 2 en $s(t)$).
- Si la partícula se libera partiendo del reposo, desde la posición $\theta = \pi/2$, obtener el tiempo que tarda en llegar al punto más bajo de la cicloide. Misma cuestión si parte del punto más alto ($\theta = 0$).

(Examen parcial, 26/1/1998)

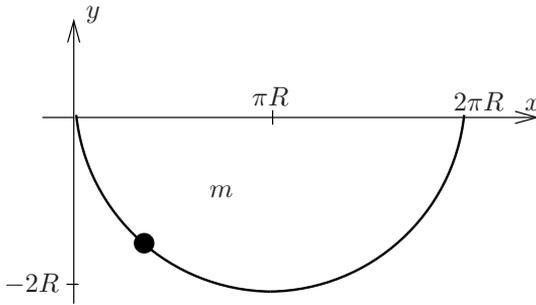


Figura 2.22: Problema 2.13

Problema 2.14. Una partícula de masa m se mueve libremente sobre un aro circular liso y rígido, de radio R , que tiene un movimiento de rotación impuesto con velocidad angular ω constante alrededor de un diámetro vertical fijo. Además del peso, sobre la partícula actúa un resorte lineal de constante k y longitud natural nula, cuyo otro extremo desliza libremente sobre el diámetro horizontal del aro. Se pide:

- Componentes de la aceleración (absoluta) de la partícula en las direcciones tangencial al aro, normal al mismo según la dirección radial y normal al plano del mismo, en función de θ y sus derivadas.
- Ecuación diferencial del movimiento.
- Expresión general de la reacción del aro sobre la partícula, así como el momento que se necesita aplicar al aro para obtener el movimiento impuesto (se supondrá masa nula para el aro).
- Si en el instante inicial la partícula parte de una posición sobre el diámetro horizontal con velocidad relativa nula, deducir razonadamente el máximo y mínimo de la inclinación θ en el movimiento subsiguiente.

(Examen parcial, 27/11/1999)

Problema 2.15. Un disco de radio R se mueve en todo momento en un plano vertical de forma que gira con velocidad angular ω constante. El disco además rueda sin deslizar sobre una recta horizontal que se mueve con una velocidad constante v . En el disco existe una ranura radial lisa en la que se mueve una partícula de masa m , que está unida además al centro (C) del disco mediante un resorte de constante elástica k y longitud natural nula. Se pide:

- Expresar la ecuación diferencial del movimiento de la partícula en la ranura.
- Obtener el valor mínimo de k para que el movimiento de la partícula respecto de la ranura sea de tipo oscilatorio.

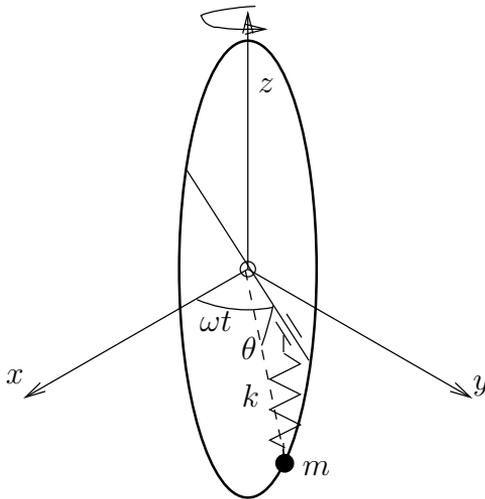


Figura 2.23: Problema 2.14

- c. Expresar la reacción que ejerce la ranura sobre la partícula.
- d. Suponiendo que en el instante inicial la ranura está horizontal y la partícula se encuentra en el borde derecho del disco y en reposo respecto de éste, calcular el trabajo de la reacción entre $t = 0$ y un instante en que la ranura ha girado un cuarto de vuelta ($t = \pi/(2\omega)$). Particularizar este cálculo para $k = 10mg/R$, $\omega = \sqrt{g/R}$ y $v = (5/6)\omega R$.
(Examen parcial, 25/11/2000)

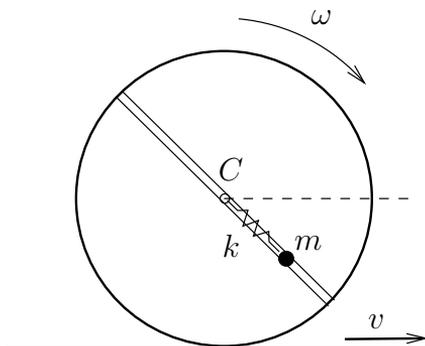


Figura 2.24: Problema 2.15

